Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

А. А. Лебедев

(Москва)

Для постановки задачи об устойчивости движения, данной А. М. Ляпуновым[1], характерны следующие основные особенности:

1) рассматривается неограниченный интервал времени $[t_0, \infty)$;

2) принимается, что начальные возмущения, а следовательно, и последующие возмущения суть достаточно малые величины;

3) рассматривается устойчивость невозмущенного движения только по отношению к возмущениям начальных условий.

Однако в реальных задачах об устойчивости движения какой-либо материальной системы имеют место, как правило, другие условия движения, а именно:

1) движение происходит только в течение некоторого конечного промежутка времени;

2) начальные возмущения являются конечными величинами;

3) реальная материальная система находится под постоянным воздействием небольших по величине, но конечных возмущающих сил.

Поэтому задача об устойчивости движения на конечном интервале времени при конечных начальных и конечных постоянно действующих возмущениях представляет большой интерес.

Вопрос об устойчивости на конечном промежутке времени по отношению к конечным начальным возмущениям впервые был поставлен Н. Г. Четаевым[2]. Им же впервые был поставлен вопрос о влиянии сколь угодно малых постоянных возмущений на устойчивость движения на неограниченном интервале времени[3].

Исследованию задач об устойчивости на неограниченном интервале времени 1) при конечных начальных возмущениях и 2) при достаточно малых начальных и постоянно действующих возмущениях были посвящены многочисленные работы советских ученых[4].

Однако для общего случая неустановившегося движения даже в задаче, поставленной А. М. Ляпуновым, теория не достигла еще, по нашему мнению, необходимой для приложений степени совершенства.

Первый метод, позволяющий решать различные прикладные задачи об устойчивости неустановившегося движения на конечном интервале времени, был дан Г. В. Каменковым [5]. В этой работе были доказаны теоремы, устанавливающие условия устойчивости по уравнениям первого приближения в предположении, что начальные возмущения достаточно малы, а постоянные возмущения отсутствуют, и поставлена задача об определении максимального интервала времени, на котором невозмущенное движение устойчиво.

В настоящей работе используется метод, данный Г. В. Каменковым, для определения по уравнениям первого приближения условий устойчивости неустановившегося движения при конечных начальных и конечных постоянно действующих возмущениях. При этом дается способ определения интервала времени, на котором невозмущенное движение устойчиво.

§ 1. Исходный метод решения задачи. Задача об устойчивости движения какой-либо материальной системы в случае, когда постоянно действующие возмущения отсутствуют, обычно приводится к исследованию n неизвестных функций $x_i(t)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений возмущенного движения вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n + X_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $p_{ij}(t)$ представляют собой вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t, а $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — обладающие такими же свойствами функции времени t и возмущений $x_i(t)$, имеющие порядок малости выше первого относительно возмущений x_i и обращающиеся в нуль, когда все x_i равны нулю.

Пусть эти предположения относительно правых частей уравнений (1.1) выполняются в области

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \qquad |x_i| \leqslant h \tag{1.2}$$

где $T \neq t_0$ и $h \neq 0$ суть постоянные.

Предположим также, что для всяких начальных возмущений x_{i0}, лежащих в области (1.2), уравнения (1.1) допускают единственное решение.

Для решения задачи об устойчивости на конечном интервале времени, начинающемся с того момента t_0, когда материальная система получила возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, Г. В. Каменков несколько видоизменяет определение устойчивости Ляпунова и формулирует его так.

Если для всяких начальных возмущений x_{j0}, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_{10} + \ldots + a_{in}x_{n0})^2 \leqslant A \tag{1.3}$$

где определитель $|a_{ij}| \neq 0$ и A — достаточно малое число, можно указать такой конечный интервал времени $[t_0, t_0 + \tau]$, на котором возмущения $x_i(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 \leqslant A \tag{1.4}$$

то невозмущенное движение по отношению к $x_1, \ldots, x_n$ устойчиво на этом интервале времени; в противном случае, если $\tau = 0$, невозмущенное движение не обладает устойчивостью на конечном интервале времени.

Запишем систему уравнений (1.1) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t_0)x_1 + \ldots + p_{in}(t_0)x_n + \tag{1.5}$$
$$+ \Delta p_{i1}(t)x_1 + \ldots + \Delta p_{in}(t)x_n + X_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

где $p_{ij}(t_0)$ — значения коэффициентов $p_{ij}(t)$ при $t = t_0$, а $\Delta p_{ij}(t)$ — функции от t, равные нулю при $t = t_0$. В дальнейшем введем обозначение $p_{ij}(t_0) = p_{ij}^{(0)}$.

Рассмотрим линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}^{(0)} x_1 + \ldots + p_{in}^{(0)} x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Пусть характеристическое уравнение системы (1.6), представленное определителем

$$| p_{ij}^{(0)} - \varkappa \delta_{ij} | = 0 \qquad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j) \tag{1.7}$$

имеет m вещественных и 2σ комплексных корней.

Задачу об определении интервала времени, на котором невозмущенное движение устойчиво, будем рассматривать для наиболее общего случая, когда характеристическое уравнение (1.7) имеет кратные корни.

Как известно, в пространстве вещественных переменных всегда существует линейное преобразование

$$y_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

у которого коэффициенты a_{ij} вещественны и постоянны, определитель $|a_{ij}| \neq 0$ и которое приводит систему (1.6) к каноническому виду. Тогда систему уравнений (1.5) преобразованием (1.8) можно привести к виду:

$$\frac{dy_1}{dt} = \varkappa_1 y_1 + Q_1 + Y_1, \quad \frac{dy_i}{dt} = y_{i-1} + \varkappa_1 y_i + Q_i + Y_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n_1)$$

$$\frac{dy_{n_1+1}}{dt} = \varkappa_2 y_{n_1+1} + Q_{n_1+1} + Y_{n_1+1}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{i-1} + \varkappa_2 y_i + Q_i + Y_i \qquad (i = n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2)$$

. . . .

$$\frac{dy_{m-n_\alpha+1}}{dt} = \varkappa_\alpha y_{m-n_\alpha+1} + Q_{m-n_\alpha+1} + Y_{m-n_\alpha+1}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{i-1} + \varkappa_\alpha y_i + Q_i + Y_i \qquad (i = m - n_\alpha + 2, \ldots, m)$$

$$\frac{dy_{m+1}}{dt} = \lambda_1 y_{m+1} - \mu_1 y_{m+\sigma+1} + Q_{m+1} + Y_{m+1}$$

$$\frac{dy_{m+\sigma+1}}{dt} = \lambda_1 y_{m+\sigma+1} + \mu_1 y_{m+1} + Q_{m+\sigma+1} + Y_{m+\sigma+1}$$

$$\frac{dy_s}{dt} = y_{s-1} + \lambda_1 y_s - \mu_1 y_{\sigma+s} + Q_s + Y_s$$

$$\frac{dy_{\sigma+s}}{dt} = y_{\sigma+s-1} + \lambda_1 y_{\sigma+s} + \mu_1 y_s + Q_{\sigma+s} + Y_{\sigma+s} \qquad (s = m+2, \ldots, m+r_1) \tag{1.9}$$

. . . .

$$\frac{dy_{n-\sigma-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta y_{n-\sigma-r_\beta+1} - \mu_\beta y_{n-r_\beta+1} + Q_{n-\sigma-r_\beta+1} + Y_{n-\sigma-r_\beta+1}$$

$$\frac{dy_{n-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta y_{n-r_\beta+1} + \mu_\beta y_{n-\sigma-r_\beta+1} + Q_{n-r_\beta+1} + Y_{n-r_\beta+1}$$

$$\frac{dy_s}{dt} = y_{s-1} + \lambda_\beta y_s - \mu_\beta y_{\sigma+s} + Q_s + Y_s$$

$$\frac{dy_{\sigma+s}}{dt} = y_{\sigma+s-1} + \lambda_\beta y_{\sigma+s} + \mu_\beta y_s + Q_{\sigma+s} + Y_{\sigma+s} \qquad (s = n - \sigma - r_\beta + 2, \ldots, n - \sigma)$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&Y_i(t_0, t, y_i) = a_{i1} X_1 + \ldots + a_{in} X_n \qquad (i = 1, \ldots, n)\\
&Q_i(t_0, t, y_i) = q_{i1} y_1 + \ldots + q_{in} y_n \qquad (i = 1, \ldots, n)\\
&q_{ij}(t_0, t) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}(a_{i1}\Delta p_{1k} + \ldots + a_{in}\Delta p_{nk})
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где b_{kj} — коэффициенты линейного преобразования

$$x_k = b_{k1} y_1 + \ldots + b_{kn} y_n \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

обратного преобразованию (1.8).

В этой системе уравнений $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\alpha$ и $\lambda_1 \pm i\mu_1, \ldots, \lambda_\beta \pm i\mu_\beta$ суть корни характеристического уравнения (1.7). Количество групп уравнений, соответствующих действительными корням, составляет α, а количество групп уравнений, отвечающих комплексным корням, равно β. Числа $n_1, \ldots, n_\alpha$, $r_1, \ldots, r_\beta$ определяют порядок кратности корней.

В системе уравнений (1.9) все $q_{ij}(t)$ представляют собой линейные формы от $\Delta p_{ij}(t)$ и, следовательно, равны нулю при $t = t_0$.

Предположим, что любые начальные значения возмущений x_{j0} удовлетворяют условию (1.3), где a_{ij} — коэффициенты преобразования (1.8), и исследуем изменение со временем величины

$$r^2(t_0, t) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 \tag{1.12}$$

в которой функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ представляют собой решение системы (1.1). С этой целью рассмотрим производную dr^2/dt, составленную в силу уравнений возмущенного движения (1.9):

$$
\begin{aligned}
r\frac{dr}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} y^i \frac{dy_i}{dt} = \varkappa_1 \sum_{i=1}^{n_1} y_i^2 + \varkappa_2 \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} y_i^2 + \ldots + \varkappa_\alpha \sum_{i=m-n_\alpha+1}^{m} y_i^2 +\\
&+ \lambda_1 \sum_{s=m+1}^{m+r_1} (y_s^2 + y_{\sigma+s}^2) + \lambda_2 \sum_{s=m+r_1+1}^{m+r_1+r_2} (y_s^2 + y_{\sigma+s}^2) + \ldots +\\
&+ \lambda_\beta \sum_{s=n-\sigma-r_\beta+1}^{n-\sigma} (y_s^2 + y_{\sigma+s}^2) + y_1 y_2 + y_2 y_3 + \ldots + y_{n_1-1} y_{n_1} + y_{n_1+1} y_{n_1+2} + \ldots +\\
&+ y_{n_1+n_2-1} y_{n_1+n_2} + \ldots + y_{m-1} y_m + y_{m+1} y_{m+2} + \ldots +\\
&+ y_{m+r_1+1} y_{m+r_1+2} + \ldots + y_{m+r_1+r_2-1} y_{m+r_1+r_2} + \ldots +\\
&+ y_{m+\sigma-1} y_{m+\sigma} + y_{m+\sigma+1} y_{m+\sigma+2} + \ldots + y_{n-1} y_n +\\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} q_{ik} y_i y_k + \sum_{i=1}^{n} y_i Y_i
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Выражение (1.13) может быть представлено таким образом:

$$r\frac{dr}{dt} = H + S, \qquad H = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} y_i Y_i \tag{1.14}$$

Здесь $H(t_0, t, y_i)$ — квадратичная форма переменных y_i с ограниченными и непрерывными относительно t коэффициентами, а $S(t_0, t, y_i)$ — функция переменных y_i и времени t.

Матрица $\|c_{ik}\|$ квадратичной формы H может быть представлена как сумма матриц

$$\|c_{ik}\| = \|e_{ik}\| + \|f_{ik}\| \tag{1.15}$$

Матрица $\|e_{ik}\|$ состоит из ряда клеток, расположенных по главной диагонали, причем все элементы, не принадлежащие ни одной из этих клеток, равны нулю. Каждая клетка, соответствующая какой-либо группе уравнений (1.9), имеет вид:

$$L(\varkappa_i) = \begin{Vmatrix} \varkappa_i & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1/2 & \varkappa_i & 1/2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \varkappa_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varkappa_i & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/2 & \varkappa_i \end{Vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \alpha) \tag{1.16}$$

или

$$L(\lambda_s) = \begin{Vmatrix} \lambda_s & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1/2 & \lambda_s & 1/2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \lambda_s & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_s & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/2 & \lambda_s \end{Vmatrix} \qquad (s = 1, \ldots, \quad) \tag{1.17}$$

Вся же матрица $\|e_{ik}\|$ оказывается составленной из таких клеток, порядков $n_1, \ldots, n_\alpha, r_1, \ldots, r_\beta, r_1, \ldots, r_\beta$, и имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} L(\varkappa_1) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & L(\varkappa_2) & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & L(\varkappa_\alpha) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & L(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & L(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & L(\lambda_\beta) \end{Vmatrix} \tag{1.18}$$

где все элементы вне матричных клеток являются нулями.

Элементы же матрицы $\|f_{ik}\|$ выражаются следующей формулой:

$$f_{ik}(t_0, t) = \frac{1}{2}\left[q_{ik} + q_{ki}\right] \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

т. е. все $f_{ik}(t_0, t_0) = 0$.

Будем искать теперь необходимые и достаточные условия устойчивости на конечном интервале времени, предполагая, что начальные возмущения сколь угодно малы.

Из равенства (1.14) получим, что

$$r^2(t_0, t) = r_0^2 \exp 2 \int_{t_0}^{t} \frac{H(t_0, t, y_i) + S(t_0, t, y_i)}{r^2(y_i)}\, dt \tag{1.20}$$

где $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — решение системы (1.9). Обозначим через $r_m^2(t_0, t)$ точную верхнюю границу значений $r^2(t_0, t)$ в каждый момент времени.

Невозмущенное движение будет устойчиво на конечном интервале времени $[t_0, t_0 + \tau]$, если на этом интервале выполняется неравенство (1.4), т. е. если соблюдается неравенство

$$r_m^2(t_0, t) \leqslant r_0^2$$

Как следует из (1.20), последнее будет иметь место, когда на этом интервале для любых решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ системы (1.9) удовлетворяется неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \frac{H + S}{r^2}\, dt \leqslant 0 \tag{1.21}$$

Следовательно, для выполнения на некотором интервале времени неравенства (1.21) при любом выборе функции S необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма H при всех t на этом интервале являлась определенно отрицательной.

Для того чтобы квадратичная форма H была определенно отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы у матрицы $\| c_{ik} \|$ этой квадратичной формы последовательные главные миноры $D_\nu(t)$ нечетного порядка были отрицательными, а четного порядка — положительными:

$$D_1(t) < 0, \quad D_2(t) > 0, \quad D_3(t) < 0, \ldots, (-1)^n D_n(t) > 0 \tag{1.22}$$

Пусть при $t = t_0$ условия (1.22) выполнены. Тогда, каковы бы ни были элементы $c_{ik}(t_0, t)$, в силу их непрерывности условия (1.22) выполняются в течение некоторого конечного интервала времени, а именно до того момента t_1, когда определитель $D_n(t_1)$ обращается в нуль:

$$D_n(t_1) = 0 \tag{1.23}$$

Условия (1.22) могут быть выполнены при $t = t_0$ тогда и только тогда, когда у клеток (1.16) и (1.17) матрицы (1.18) последовательные главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного порядка положительны. В частности, необходимо, чтобы были отрицательными главные миноры первого порядка, т. е. все вещественные корни и вещественные части комплексных корней характеристического уравнения (1.7):

$$\varkappa_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad \lambda_s < 0 \quad (s = 1, \ldots, \sigma) \tag{1.24}$$

Если характеристическое уравнение не имеет кратных корней, то условия (1.24) являются не только необходимыми, но и достаточными.

Таким образом, результаты, полученные Г. В. Каменковым [5], могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчиво на каком-либо конечном интервале времени, каковы бы ни были члены высших порядков X_i в уравнениях возмущенного движения, необходимо и достаточно, чтобы при $t = t_0$ у клеток $L(\varkappa_i)$ и $L(\lambda_s)$ матрицы квадратичной формы H последовательные главные миноры нечетного порядка были отрицательными и четного порядка — положительными.

Из этой теоремы вытекает следующее важное предложение.

Если все корни характеристического уравнения (1.7) различны, то для устойчивости невозмущенного движения на каком-либо конечном интервале времени при любом выборе функций X_i необходимо и достаточно, чтобы при $t = t_0$ все вещественные корни и вещественные части комплексных корней характеристического уравнения были отрицательными.

Теорема 2. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчиво на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$, каковы бы ни были члены высших порядков X_i в уравнениях (1.1), достаточно, если при выполнении условий теоремы 1 будет на отрезке времени $[t_0, t_1]$ соблюдаться неравенство $(-1)^n D_n(t) > 0$.

Следует заметить, что неравенства (1.22) определяют интервал времени, на котором величина r_m^2 уменьшается. Соответственно уравнение (1.23) дает то значение времени t_1, начиная с которого величина r_m^2, оставаясь менее r_0^2, может возрастать. Поэтому в задаче об определении полного интервала времени, на котором соблюдается условие (1.4), требование выполнения при $t > t_0$ неравенств (1.22) не является необходимым

Таким образом, первая теорема устанавливает по уравнениям первого приближения необходимые и достаточные условия существования для данного начального момента t_0 какого-либо отличного от нуля конечного интервала времени, в течение которого движение устойчиво. Вторая теорема дает лишь достаточные условия для определения величины этого интервала. Во многих случаях найденная величина гарантированного интервала времени может оказаться намного меньше того интервала времени, на котором должна быть исследована устойчивость движения. Очевидно, что задача, связанная с определением полного интервала времени, на котором выполняется неравенство (1.4), представляет большой интерес с точки зрения приложений.

§ 2. Постановка задачи об определении интервала времени, на котором невозмущенное движение устойчиво. В настоящей статье эту задачу мы ставим следующим образом. Пусть начальные значения возмущений x_{j0} удовлетворяют условию (1.3), и неравенство (1.4) выполняется по крайней мере на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$.

Найдем условия, достаточные для того, чтобы возмущения $x_j(t_1)$ в момент времени t_1 можно было, не нарушая условий (1.3) и (1.4), принять за новые начальные возмущения, т. е. предположить, что в момент времени t_1 материальная система получила начальные возмущения [1] $x_j(t_1)$.

[1] Здесь требование выполнения неравенств (1.3) и (1.4) весьма существенно, так как в противном случае мы имеем новую задачу об устойчивости на конечном интервале времени, начинающемся с момента t_1, т. е. задачу, никак не связанную с поставленной задачей об устойчивости на интервале времени, начинающемся с момента t_0.

Очевидно, что в случае выполнения искомых условий исследование устойчивости движения на интересующем нас интервале времени можно провести последовательным применением метода, данного Г. В. Каменковым [5].

Если при $t = t_0$ возмущения $x_j(t_0)$ удовлетворяли условию (1.3), то при $t = t_1$ возмущения $x_j(t_1)$ будут удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 \leqslant r_m^2(t_0, t_1) \tag{2.1}$$

Запишем теперь систему уравнений (1.1) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t_1)x_1 + \ldots + p_{in}(t_1)x_n + \tag{2.2}$$

$$+ \Delta p_{i1}(t)x_1 + \ldots + \Delta p_{in}(t)x_n + X_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где $p_{ij}(t_1) = p_{ij}^{(1)}$ — значения коэффициентов $p_{ij}(t)$ при $t = t_1$. Тогда эту систему уравнений линейным преобразованием с постоянными вещественными коэффициентами

$$y_i = a_{i1}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

у которого определитель $|a_{ij}^{(1)}| \neq 0$, можно привести к системе уравнений вида, аналогичного виду системы (1.9). В системе уравнений (1.9), полученной преобразованием (2.3), $\varkappa_i(t_1)$ и $\lambda_s(t_1) \pm i\mu_s(t_1)$ являются теперь корнями характеристического уравнения

$$|p_{ij}^{(1)} - \varkappa\delta_{ij}| = 0 \qquad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j) \tag{2.4}$$

В системе (1.9), полученной преобразованием (2.3), все $q_{ij}(t_1, t)$ представляют собой линейные формы от

$$\Delta p_{ij}(t) = p_{ij}(t) - p_{ij}(t_1)$$

и, следовательно, равны нулю при $t = t_1$.

Очевидно, что в новой задаче начальные возмущения $x_j^{(1)}$ должны удовлетворять неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{(1)}x_1^{(1)} + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n^{(1)})^2 \leqslant r_1^2 \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1^{(1)} + \ldots + a_{in}x_n^{(1)})^2 \leqslant r_0^2 \tag{2.6}$$

где a_{ij} — коэффициенты преобразования (1.8), $a_{ij}^{(1)}$ — коэффициенты преобразования (2.3), а r_1^2 — произвольно задаваемое достаточно малое число, верхняя граница которого зависит от числа r_0^2.

Если при этом можно подобрать такое число r_1^2, чтобы всякие начальные возмущения $x_j^{(1)}$, удовлетворяющие неравенству (2.1), одновременно удовлетворяли бы и неравенству (2.5), то новую задачу об устойчивости на отрезке времени $[t_1, t_2]$ можно рассматривать как продолжение задачи об устойчивости на интервале времени, начинающемся с момента t_0.

Рассмотрим в n-мерном пространстве замкнутые поверхности

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 = r_0^2 \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 = r_m^2(t_0, t_1) \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n)^2 = r_1^2 \tag{2.9}$$

Поверхности (2.7) и (2.8) представляют собой концентрические и гомотетичные между собой эллипсоиды, причем поверхность (2.8), если невозмущенное движение устойчиво, лежит внутри поверхности (2.7). Сформулированные выше условия выполняются одновременно тогда и только тогда, когда поверхность (2.7) полностью содержит внутри себя поверхность (2.9), а последняя полностью содержит в себе поверхность (2.8). Это требование можно записать следующим образом.

Левые части выражений (2.7) и (2.8) представляют собой положительно определенную квадратичную форму, элементы матрицы которой

$$\alpha_{jk} = a_{1j}a_{1k} + \ldots + a_{nj}a_{nk} \tag{2.10}$$

Левая часть выражения (2.9) также является квадратичной формой, у которой элементы матрицы имеют вид:

$$\beta_{jk} = a_{1j}^{(1)}a_{1k}^{(1)} + \ldots + a_{nj}^{(1)}a_{nk}^{(1)} \tag{2.11}$$

Линейным преобразованием (1.8) обе эти формы могут быть представлены одновременно в виде суммы квадратов, т. е.

$$\sum_{j,\,k=1}^{n}\alpha_{jk}x_jx_k = y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

$$\sum_{j,\,k=1}^{n}\beta_{jk}x_jx_k = \gamma_1 y_1^2 + \ldots + \gamma_n y_n^2 \tag{2.12}$$

Здесь числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ являются корнями следующего уравнения, записанного в виде определителя:

$$|\beta_{jk} - \gamma\alpha_{jk}| = 0 \tag{2.13}$$

Для данной системы уравнений возмущенного движения (1.1) корни уравнения (2.13) зависят от выбора двух моментов времени t_0 и t_1.

Уравнения поверхностей (2.7), (2.8), (2.9) примут следующий вид:

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 = r_0^2 \tag{2.14}$$

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 = r_m^2(t_0, t_1) \tag{2.15}$$

$$\gamma_1 y_1^2 + \ldots + \gamma_n y_n^2 = r_1^2 \tag{2.16}$$

Пользуясь возможностью произвольного выбора числа r_1^2, подберем это число так, чтобы эллипсоид (2.16) находился между концентрическими эллипсоидами (2.14) и (2.15) или в крайнем случае касался их.

Это всегда можно сделать, если

$$\frac{\gamma_{\min}(t_0, t_1)}{\gamma_{\max}(t_0, t_1)} \geqslant \frac{r_m^2(t_0, t_1)}{r_0^2} \tag{2.17}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если невозмущенное движение устойчиво на конечных интервалах времени $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$ и при этом выполняется неравенство (2.17), то невозмущенное движение устойчиво на интервале времени $[t_0, t_2]$.

Теоремой 3, использующей неравенство (2.17), непосредственно воспользоваться невозможно, поскольку это неравенство предполагает интегрирование выражения (1.20). Однако вместо условия (2.17) можно дать соответствующее более узкое условие, основанное на оценке выражения (1.20). При оценке этого выражения необходимо уже учитывать величину функции S.

§ 3. Об устойчивости при конечных начальных возмущениях. Теоремы об условиях устойчивости по первому приближению, рассмотренные в § 1, основываются на предположении, что начальные возмущения являются достаточно малыми величинами и соответственно достаточно малым является число A в определении устойчивости движения. При этом не требуется конкретного указания о величине числа A. Чтобы невозмущенное движение являлось устойчивым, вполне достаточно существования сколь угодно малого числа A, при котором выполняются сформулированные условия устойчивости. Только если такого числа не существует, невозмущенное движение признается неустойчивым.

В задаче об устойчивости при конечных начальных возмущениях будем теперь считать, что число A является уже некоторым фиксированным числом, известным или неизвестным в зависимости от условий рассматриваемой задачи.

При таком условии свойство устойчивости движения будет зависеть от величины числа A. Может случиться, например, что невозмущенное движение, устойчивое при $A \leqslant A_1$, оказывается неустойчивым при $A > A_1$.

Назовем невозмущенное движение устойчивым в конечной области A на конечном интервале времени, если возмущения удовлетворяют неравенствам (1.3) и (1.4), в которых число A является фиксированным.

Будем искать теперь условия устойчивости на конечном интервале времени при конечных начальных возмущениях и при любом выборе функций X_i в уравнениях (1.1). Представим функцию $|S|$ в виде

$$|S| = \varphi(t, y_i)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{3.1}$$

Пусть функция $k(t)$ является в каждый момент времени точной верхней границей функции $\varphi(t, y_i)$ в области (1.3).

Тогда для любых y_i, принадлежащих этой области, будем иметь

$$|S| \leqslant k(t)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{3.2}$$

Положительная функция $k(t)$ зависит от числа A и уравнений возмущенного движения (1.1), так как является в каждый момент времени точной верхней границей следующей функции от x_i, принадлежащих области (1.3):

$$\varphi(t, y_i(x_j)) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)(a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n)\right|}{\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2} \tag{3.3}$$

Для выполнения неравенства (1.21) на отрезке времени $[t_0, t_1]$ при любых функциях $y_i(t)$ и $S(t, y_i)$ достаточно, чтобы функция $H + |S|$ при всех t в этом интервале являлась знакопостоянной отрицательной. Это условие для $t = t_0$ является также и необходимым.

Следовательно, невозмущенное движение устойчиво, если квадратичная форма

$$G(t_0, t, y_i) = \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik}y_iy_k + k\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{3.4}$$

является знакопостоянной отрицательной при всех t в интервале $[t_0, t_1]$. Таким образом, условия устойчивости даются следующей теоремой.

Теорема 4. Невозмущенное движение устойчиво в конечной области (1.3) на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ при любом выборе функций X_i в уравнениях (1.1), если на этом отрезке времени у матрицы квадратичной формы G все главные миноры нечетного порядка неположительны, а четного порядка неотрицательны.

Условия, сформулированные в этой теореме, являются необходимыми только при $t = t_0$ вследствие того, что:

1) на рассматриваемом отрезке времени величина r_m^2 может возрастать, оставаясь менее r_0^2, т. е. не нарушая неравенства (1.4);

2) функция $k(t)$ определена для области (1.3), тогда как необходимой областью для определения $k(t)$ является область

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant r_m^2(t_0, t) \tag{3.5}$$

Теорема 4 дает возможность при решении прикладных задач определять:

1) достаточную область устойчивости (число A), если заданы коэффициенты при линейных членах и нелинейные члены;

2) достаточные условия, которым должны удовлетворять нелинейные члены, если известны коэффициенты при линейных членах и требуемая область устойчивости;

3) достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты при линейных членах, если заданы необходимая область устойчивости и нелинейные члены.

§ 4. Об устойчивости при конечных постоянно действующих возмущениях. Реальная материальная система всегда находится под воздействием небольших постоянно действующих возмущений. Задача об устойчивости движения на конечном интервале времени по отношению к таким возмущениям приводится к исследованию уравнений возмущенного движения вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n + X_i + R_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Здесь $p_{ij}(t)$ и $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — те же функции, что и в уравнениях (1.1), а вещественные функции $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, характеризующие постоянно действующие возмущающие силы, непрерывны и ограничены в области (1.2) и удовлетворяют условию, что уравнения (4.1) имеют в этой области единственное решение.

Функции R_i обычно неизвестны. Поэтому задачу об устойчивости на неограниченном интервале времени при постоянно действующих возмущениях решают в предположении, что как начальные, так и постоянно действующие возмущения достаточно малы. Это предположение либо вводится в формулировку определения устойчивости[6], либо просто принимается, что постоянно действующие возмущения представлены нелинейными членами в уравнениях (1.1), обращающимися в нуль, когда все $x_i = 0$. В общем случае функции R_i не обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Рассмотрим задачу об устойчивости на конечном интервале времени при конечных начальных и конечных постоянно действующих возмущениях для случая, когда функции $R_i(0, \ldots, 0, t) = 0$. В частности, с возмущающими силами такого характера приходится иметь дело во всех прикладных задачах, поскольку правые части уравнений (1.1) определяются с теми или иными погрешностями, полностью избежать которые невозможно. Эти погрешности при исследовании системы (1.1) равносильны постоянно действующим возмущениям.

Очевидно, что постоянно действующие возмущения, обусловленные погрешностями в определении функций p_{ij} и X_i в уравнениях (1.1), характеризуются функциями R_i, обладающими свойством $R_i(0, \ldots, 0, t) = 0$. Учет погрешностей в определении правых частей уравнений (1.1) особенно важен при исследовании устойчивости неустановившихся движений, когда само невозмущенное движение, определяющее функции p_{ij} и X_i, может быть найдено лишь приближенным интегрированием.

Предположим, что функции R_i в уравнениях (4.1) могут быть представлены в виде

$$R_i(x_1, \ldots, x_n, t) = l_{i1}x_1 + \ldots + l_{in}x_n + \Delta X_i \tag{4.2}$$

где функции $l_{ij}(t)$ и $\Delta X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ обладают такими же свойствами, как и функции $p_{ij}(t)$ и $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ в уравнениях (1.1).

Функции l_{ij} и ΔX_i представляют собой соответственно возмущения коэффициентов p_{ij} при линейных членах и возмущения нелинейных членов X_i.

В некоторых задачах функции l_{ij} и ΔX_i, характеризующие возмущающие силы, являются известными. Когда эти функции неизвестны, в ряде случаев могут быть даны более или менее точные оценки либо для каждой из функций l_{ij} и ΔX_i:

$$|l_{ij}(t)| \leqslant \lambda_{ij}(t), \qquad |\Delta X_i| \leqslant \chi_i(t) \tag{4.3}$$

либо для всех функций одновременно:

$$|l_{ij}(t)| \leqslant \lambda(t), \qquad |\Delta X_i| \leqslant \chi(t) \tag{4.4}$$

причем в простейшем случае λ и χ могут не зависеть от времени.

Задачу об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях будем рассматривать, сохраняя определение устойчивости, сформулированное в § 1, в предположении, что область (1.3) является конечной. При этом не будем предполагать, что функции l_{ij} и ΔX_i являются достаточно малыми.

Будем искать теперь условия, которые достаточно наложить на функции p_{ij}, X_i, l_{ij} и ΔX_i в уравнениях (4.1), чтобы невозмущенное движение было устойчиво на конечном интервале времени, каковы бы ни были удовлетворяющие этим условиям функции X_i, l_{ij} и ΔX_i. С этой целью коэффициенты $p_{ij}(t)$ в уравнениях (4.1) представим в виде суммы

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(t_0) + \Delta p_{ij}(t) \tag{4.5}$$

и применим к системе (4.1) линейное преобразование (1.8). Полученная система уравнений будет отличаться от системы (1.9) только тем, что в каждом i-м уравнении добавятся члены $\Delta Q_i(t_0, t, y_i)$ и $\Delta Y_i(t_0, t, y_i)$, аналогичные членам Q_i и Y_i. Эти добавочные члены представляют собой линейные формы от соответствующих функций l_{ij} и ΔX_i

$$\Delta Q_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta q_{ij} y_j, \qquad \Delta q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}(a_{i1}l_{1k} + \ldots + a_{in}l_{nk}) \tag{4.6}$$

$$\Delta Y_i = a_{i1}\Delta X_1 + \ldots + a_{in}\Delta X_n \tag{4.7}$$

В отличие от функций q_{ij} функции Δq_{ij} не равны нулю при $t = t_0$.

Предположим теперь, что в неравенствах (1.3) и (1.4) a_{ij} являются коэффициентами преобразования (1.8), и исследуем изменение со временем величины (1.12), в которой функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ представляют собой решение системы (4.1). Выражение для $r(dr/dt)$ может быть представлено в виде

$$r\frac{dr}{dt} = H + \Delta H + S + \Delta S \tag{4.8}$$

Здесь H — та же квадратичная форма, что и в выражении (1.14) с матрицей $\|c_{ik}\|$, зависящей только от коэффициентов $p_{ij}(t)$ и выбора начального момента t_0; ΔH—квадратичная форма, элементы матрицы которой зависят от возмущений l_{ij} коэффициентов p_{ij}:

$$\Delta H(t_0, t, y_i) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} y_i y_k, \qquad g_{ik}(t_0, t) = \tfrac{1}{2}[\Delta q_{ik} + \Delta q_{ki}] \tag{4.9}$$

функция $S(t_0, t, y_i)$ — та же, что и в выражении (1.14); $\Delta S(t_0, t, y_i)$ — функция, зависящая от возмущений ΔX_i нелинейных членов X_i

$$\Delta S(t_0, t, y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta Y_i \tag{4.10}$$

Представим функцию $|\Delta S|$ в виде, аналогичном (3.2)

$$|\Delta S| \leqslant \Delta k(t)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{4.11}$$

Из выражения (4.8) получим, что

$$r^2(t_0, t) = r_0^2 \exp 2\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^2}(H + \Delta H + S + \Delta S)\,dt \tag{4.12}$$

Невозмущенное движение будет устойчиво, если $H + \Delta H + S + \Delta S$ на рассматриваемом интервале времени является функцией знакопостоянной отрицательной.

Для выполнения этого условия при любых функциях S и ΔS достаточно, чтобы функция $H + \Delta H + |S| + |\Delta S|$ была знакопостоянной отрицательной. Следовательно, для устойчивости невозмущенного движения на отрезке времени $[t_0, t_1]$ достаточно, чтобы квадратичная форма

$$F(t_0, t, y_i) = \sum_{i,k=1}^{n} (c_{ik} + g_{ik}) y_i y_k + (k + \Delta k) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{4.13}$$

на этом интервале времени являлась знакопостоянной отрицательной.

Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением сформулированных выше теорем 1, 2 и 4.

Теорема 5. Невозмущенное движение устойчиво в конечной области (1.3) на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ при конечных постоянно действующих возмущениях и при любом выборе функций X_i в уравнениях возмущенного движения, если на этом отрезке времени у матрицы квадратичной формы F все главные миноры нечетного порядка неположительны и четного порядка неотрицательны. При этом для $t = t_0$ эти условия являются необходимыми.

В частности, для выполнения условий этой теоремы требуется, чтобы на рассматриваемом интервале времени имели место неравенства

$$\begin{aligned} \varkappa_i(t_0) + q_{ii}(t) + \Delta q_{ii}(t) + k(t) + \Delta k(t) &\leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \lambda_s(t_0) + q_{ss}(t) + \Delta q_{ss}(t) + k(t) + \Delta k(t) &\leqslant 0 \quad (s = 1, \ldots, \sigma) \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $q_{rr}(t_0) = 0$.

Из этих неравенств следует, что для устойчивости движения как при конечных начальных возмущениях, так и при конечных постоянно действующих возмущениях необходимо, чтобы вещественные корни и вещественные части комплексных корней, будучи отрицательными, имели достаточно большую величину.

Замечание 1. Если характеристическое уравнение (1.7) имеет только различные корни и установившееся невозмущенное движение устойчиво на каком-либо интервале времени, то этот интервал времени является неограниченным.

Замечание 2. В приложениях вместо условий неположительности квадратичной формы удобнее применять чуть более узкие, но зато более простые условия отрицательной определенности.

§ 5. Приложение изложенных выше методов к исследованию устойчивости движения. Теоремой 3 для исследования устойчивости движения непосредственно воспользоваться невозможно, так как она предполагает интегрирование выражения (4.12).

Теорема 5 может быть непосредственно использована только в том случае, когда известны функции l_{ij} и ΔX_i, характеризующие постоянные возмущающие силы. Практически могут быть известны лишь оценки этих функций. Поэтому необходимо указать условия устойчивости при конечных постоянно действующих возмущениях, основанные на оценке выражения (4.12) для $r^2(t_0, t)$:

$$r^2(t_0, t) \leqslant r_0^2 \exp 2 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^2(y_i)} F(t_0, t, y_i)\, dt \qquad (5.1)$$

Выражение (5.1) можно записать в следующем виде: (5.2)

$$r^2(t_0, t) \leqslant r_0^2 \exp 2 \int_{t_0}^{t} \Big[\sum_{i=1}^{n} (c_{ii} + g_{ii}) \frac{y_i^2}{r^2} + \sum_{\substack{i,\, k=1 \\ i \neq k}}^{n} (c_{ik} + g_{ik}) \frac{y_i y_k}{r^2} + k + \Delta k \Big]\, dt$$

Обозначим через $\max(c_{ii} + |g_{ii}|)$ наибольшее из чисел $c_{ii}(t_0, t) + |g_{ii}(t)|$ в каждый момент времени t. Тогда, учитывая, что $|y_i / r| \leqslant 1$, получим оценку точной верхней границы значений $r^2(t_0, t)$ в каждый момент времени:

$$r_m^2(t_0, t) \leqslant r_0^2 \exp 2 \int_{t_0}^{t} \Big[\max(c_{ii} + |g_{ii}|) + \sum_{\substack{i,\, k=1 \\ i \neq k}}^{n} (|c_{ik}| + |g_{ik}|) + k + \Delta k \Big]\, dt \qquad (5.3)$$

Правую часть этого неравенства будем обозначать через $\rho^2(t_0, t)$.

Оценка (5.3) совместно с теоремой 3 дает возможность указать практический метод исследования устойчивости на конечном интервале времени, начинающемся с момента t_0, если отрезок времени $[t_0, t_1]$, гарантированный одной из теорем 2, 4 или 5, оказался меньше интервала, на котором в действительности выполняется неравенство (1.4).

Очевидно, что невозмущенное движение устойчиво на некотором конечном интервале времени при конечных начальных и постоянно действующих возмущениях, если на этом интервале выполняется неравенство

$$\rho^2(t_0, t) \leqslant r_0^2 \qquad (5.4)$$

Интервал времени, на котором $\rho^2(t_0, t)$ не возрастает, определяется неравенством

$$\max(c_{ii} + |g_{ii}|) + \sum_{\substack{i,\, k=1 \\ i \neq k}}^{n} (|c_{ik}| + |g_{ik}|) + k + \Delta k \leqslant 0 \qquad (5.5)$$

Интервалы времени, на которых выполняются неравенства (5.4) и (5.5), как правило, меньше интервала, на котором соблюдается неравенство (1.4). Это объясняется не только приближенностью оценки (5.3), но и тем, что теоремы 2, 4 и 5 дают только достаточные условия устойчивости. Поэтому исследование устойчивости движения необходимо вести, опираясь на теорему 3.

Из оценки (5.3) и неравенства (2.17) следует, что, когда для некоторого начального момента времени t_s выполняется неравенство

$$\frac{\gamma_{\min}(t_s, t_{s+1})}{\gamma_{\max}(t_s, t_{s+1})} \geqslant \frac{\rho^2(t_s, t_{s+1})}{r_s^2} \tag{5.6}$$

мы имеем право новую задачу об устойчивости на интервале времени $[t_{s+1}, t_{s+2}]$ рассматривать как продолжение задачи об устойчивости на интервале времени, начинающемся с момента t_s.

Отсюда вытекает достаточное условие устойчивости на интервале времени $[t_s, t_{s+2}]$, которое представляет собой следствие теоремы 3.

Если невозмущенное движение устойчиво на конечных отрезках времени $[t_s, t_{s+1}]$ и $[t_{s+1}, t_{s+2}]$ и при этом выполняется неравенство (5.6), то невозмущенное движение устойчиво и на отрезке времени $[t_s, t_{s+2}]$.

Последовательным (шаг за шагом) применением этого следствия устанавливается следующая теорема.

Теорема 6. Невозмущенное движение устойчиво на конечном отрезке времени $[t_0, t_n]$, если для каждого из промежутков $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$ выполняются неравенства (5.5) и (5.6).

При выполении условий этой теоремы область, в которой находятся возмущения, с течением времени уменьшается. В тех же случаях, когда эта область возрастает, оставаясь внутри области (1.4), условия теоремы 6 оказываются излишне узкими.

Поэтому более общим является следующий метод исследования устойчивости на конечном интервале времени.

Этот метод основывается на повторении шаг за шагом оценки (5.3), выполненной для достаточно малого интервала времени, и не связан с требованием соблюдения неравенства (5.5) при $t > t_0$.

Пусть при $t = t_{s-1}$ возмущения $x_j(t_{s-1})$ находятся в области

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^{(s-1)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(s-1)}x_n)^2 \leqslant r_{s-1}^2 \tag{5.7}$$

Тогда при $t = t_s$ возмущения $x_j(t_s)$ не выйдут за пределы области

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^{(s-1)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(s-1)}x_n)^2 \leqslant \rho^2(t_{s-1}, t_s) \tag{5.8}$$

Чтобы иметь возможность выполнить следующий шаг, необходимо выбрать величину r_s^2 таким образом, чтобы

$$r_s^2 \geqslant \gamma_{\max}(t_{s-1}, t_s)\,\rho^2(t_{s-1}, t_s) \qquad (s = 1, \ldots, n-1) \tag{5.9}$$

Тогда область (5.8) будет расположена внутри области

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{(s)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(s)}x_n)^2 \leqslant r_s^2 \tag{5.10}$$

и можно гарантировать, что возмущения $x_j(t_{s+1})$ не выйдут за пределы области

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{(s)}x_1 + \ldots + a_{in}^{(s)}x_n)^2 \leqslant \rho^2(t_s,\ t_{s+1}) \tag{5.11}$$

Если при этом для каждого промежутка $[t_s,\ t_{s+1}]$ имело место неравенство

$$\frac{\rho^2(t_s,\ t_{s+1})}{\gamma_{\min}(t_0,\ t_s)} \leqslant r_0^2 \qquad (s = 0,\ 1, \ldots,\ n-1) \tag{5.12}$$

то можно гарантировать, что возмущения $x_j(t_{s+1})$ не выйдут также и за пределы области (1.4).

Так как $\gamma(t_0,\ t_0) = 1$, то при $s = 0$ неравенство (5.12) обращается в неравенство (5.4). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. Невозмущенное движение устойчиво на конечном отрезке времени $[t_0,\ t_n]$, если для каждого из промежутков $[t_s,\ t_{s+1}]$ $(s = 0, 1, \ldots$ $\ldots,\ n-1)$ выполняются неравенства (5.9) и (5.12).

Изложенный здесь метод исследования устойчивости на конечном интервале времени может быть использован для оценки области, в которой находятся возмущения в любой момент времени. С этой целью необходимо в неравенстве (5.9) брать знак равенства и иметь в виду, что чем меньше рассматриваемые промежутки времени $[t_s,\ t_{s+1}]$, тем ближе область (5.11) к истинной. Если для какого-либо момента времени t_s выполняется неравенство (5.5), то для увеличения точности оценки целесообразно момент времени t_{s+1} выбирать таким образом, чтобы это неравенство не нарушалось.

§ 6. Примеры исследования систем второго порядка с переменными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим исследование системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + p_{i2}(t)\,x_2 + X_i(x_1,\, x_2,\, t) \qquad (i = 1, 2) \tag{6.1}$$

в предположении, что постоянно действующие возмущения отсутствуют. Несмотря на частный характер этой системы, к ней приводятся многие важные технические задачи об устойчивости движения. Эту систему будем записывать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \Delta p_{i1}x_1 + \Delta p_{i2}x_2 + X_i \qquad (i = 1, 2) \tag{6.2}$$

где $p_{ij} = p_{ij}(t_s)$ — постоянные величины, представляющие собой значения коэффициентов $p_{ij}(t)$ в некоторый фиксированный момент времени t_s, а $\Delta p_{ij} = p_{ij}(t) - p_{ij}(t_s)$ — функции времени t и фиксированного момента времени t_s. Пусть в первом примере характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{6.3}$$

составленное для момента времени t_s, имеет комплексные корни

$$\varkappa_{1,\,2} = \lambda \mp i\mu$$

где

$$\lambda(t_s) = \frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})$$

$$\mu(t_s) = \frac{1}{2}\sqrt{4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})-(p_{11}+p_{22})^2} \tag{6.4}$$

Как известно, однородная система уравнений

$$\begin{aligned} (p_{11}-\varkappa_i)\alpha_{i1}+p_{21}\alpha_{i2} &= 0 \\ p_{12}\alpha_{i1}+(p_{22}-\varkappa_i)\alpha_{i2} &= 0 \end{aligned} \qquad (i=1,2) \tag{6.5}$$

определяет коэффициенты α_{ij} невырожденного преобразования

$$y_i = \alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2 \qquad (i=1,2) \tag{6.6}$$

которое приводит линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1+p_{i2}x_2 \qquad (i=1,2) \tag{6.7}$$

к каноническому виду в комплексном пространстве

$$\frac{dy_i}{dt} = \varkappa_i y_i \qquad (i=1,2)$$

Если воспользоваться преобразованием

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y_1+y_2) = \frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{21})x_1+\frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{22})x_2 \\ v &= \frac{1}{2}i(y_2-y_1) = \frac{1}{2}i(\alpha_{21}-\alpha_{11})x_1+\frac{1}{2}i(\alpha_{22}-\alpha_{12})x_2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

то система (6.7) в вещественном пространстве будет приведена к виду

$$\frac{du}{dt} = \lambda u+\mu v, \qquad \frac{dv}{dt} = \lambda v-\mu u$$

Коэффициенты α_{ij} преобразования (6.6) определим из первого уравнения системы (6.5), приняв за свободные неизвестные α_{i1}. Положив для определенности, что $\alpha_{11}=\alpha_{21}=1$, найдем[1]

$$\alpha_{12} = \frac{1}{p_{21}}(\lambda-i\mu-p_{11}), \qquad \alpha_{22} = \frac{1}{p_{21}}(\lambda+i\mu-p_{11})$$

Тогда линейным преобразованием

$$u = x_1+\frac{1}{2p_{21}}(p_{22}-p_{11})x_2, \qquad v = -\frac{\mu}{p_{21}}x_2 \tag{6.9}$$

[1] Если $p_{21}=0$, но $p_{12}\neq 0$, то следует воспользоваться вторым уравнением системы (6.1) или, что одно и то же, изменить нумерацию неизвестных. Если же $p_{21}=p_{12}=0$, то система (6.1) уже имеет необходимый вид.

система уравнений (6.2) приводится к следующему виду:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + \mu v + q_{11}u + q_{12}v + U$$
$$\frac{dv}{dt} = \lambda v - \mu u + q_{21}u + q_{22}v + V \tag{6.10}$$

где

$$q_{11} = \Delta p_{11} + \frac{p_{22} - p_{11}}{2p_{21}}\Delta p_{21}, \qquad q_{22} = -\frac{p_{22} - p_{11}}{2p_{21}}\Delta p_{21} + \Delta p_{22} \tag{6.11}$$

$$q_{12} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{p_{22} - p_{11}}{2}(\Delta p_{11} - \Delta p_{22}) - p_{21}\Delta p_{12} + \frac{(p_{22} - p_{11})^2}{4p_{21}}\Delta p_{21}\right], \quad q_{21} = -\frac{\mu}{p_{21}}\Delta p_{21}$$

Пусть при $t = t_0$ начальные возмущения x_{j0} ограничены эллипсом

$$x_1^2 + \frac{p_{22}^{(0)} - p_{11}^{(0)}}{p_{21}^{(0)}}x_1x_2 - \frac{p_{12}^{(0)}}{p_{21}^{(0)}}x_2^2 = r_0^2$$

Тогда при $t = t_1$ возмущения $x_j(t_1)$ не выйдут за пределы эллипса

$$x_1^2 + \frac{p_{22}^{(0)} - p_{11}^{(0)}}{p_{21}^{(0)}}x_1x_2 - \frac{p_{12}^{(0)}}{p_{21}^{(0)}}x_2^2 = \rho^2(t_0, t_1)$$

где

$$\rho^2(t_0, t_1) = r_0^2 \exp 2\int_{t_0}^{t_1}[\lambda + \max q_{ii} + |q_{12} + q_{21}| + k]\,dt$$

Выбираем величину r_1^2 так, чтобы

$$r_1^2 = \gamma_{\max}(t_0, t_1)\,\rho^2(t_0, t_1)$$

где $\gamma_{\max}(t_0, t_1)$ — максимальный корень уравнения

$$\left(\frac{\mu^{(0)}}{p_{21}^{(0)}}\right)^2\gamma^2 - \left\{\frac{p_{12}^{(0)}}{p_{21}^{(0)}} + 2\,\frac{p_{22}^{(0)} - p_{11}^{(0)}}{2p_{21}^{(0)}}\,\frac{p_{22}^{(1)} - p_{11}^{(1)}}{2p_{21}^{(1)}} + \frac{p_{12}^{(1)}}{p_{21}^{(1)}}\right\}\gamma + \left(\frac{\mu^{(1)}}{p_{21}^{(1)}}\right)^2 = 0$$

Это уравнение составлено в предположении, что при $t = t_1$ корни уравнения (6.3) комплексные. Если теперь выполняются неравенства

$$\rho^2(t_0, t_1) \leqslant r_0^2, \qquad \frac{\rho^2(t_1, t_2)}{\gamma_{\min}(t_0, t_1)} \leqslant r_0^2$$

то рассматриваемое невозмущенное движение будет устойчивым на конечном интервале времени $[t_0, t_2]$.

Для второго примера возьмем случай, когда характеристическое уравнение (6.3) имеет вещественные различные корни

$$\varkappa_{1,2} = \lambda \mp \nu \qquad (\nu^2 = -\mu^2 > 0)$$

В этом случае наиболее простые выкладки получаются, если воспользоваться преобразованием, аналогичным преобразованию (6.8):

$$u = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{21})x_1 + \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{22})x_2$$
$$v = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(\alpha_{21} - \alpha_{11})x_1 + \frac{1}{2}(\alpha_{22} - \alpha_{12})x_2 \tag{6.12}$$

где

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = 1, \qquad \alpha_{12} = \frac{\lambda - \nu - p_{11}}{p_{21}}, \qquad \alpha_{22} = \frac{\lambda + \nu - p_{11}}{p_{21}}$$

Тогда линейным преобразованием

$$u = x_1 + \frac{p_{22} - p_{11}}{2p_{21}} x_2, \qquad v = \frac{\nu}{p_{21}} x_2 \tag{6.13}$$

система уравнений (6.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda u + \nu v + q_{11}u + q_{12}v + U \\ \frac{dv}{dt} &= \nu u + \lambda v + q_{21}u + q_{22}v + V \end{aligned} \tag{6.14}$$

где (6.15)

$$q_{11} = \Delta p_{11} + \frac{p_{22} - p_{11}}{2p_{21}} \Delta p_{21}, \qquad q_{22} = -\frac{p_{22} - p_{11}}{2p_{21}} \Delta p_{21} + \Delta p_{22}$$

$$q_{12} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{p_{22} - p_{11}}{2}(\Delta p_{22} - \Delta p_{11}) + p_{21}\Delta p_{12} - \frac{(p_{22} - p_{11})^2}{4p_{21}} \Delta p_{21}\right], \; q_{21} = \frac{\nu}{p_{21}} \Delta p_{21}$$

При этом вследствие применения преобразования (6.12) выражение для $r(\partial r / \partial t)$ принимает вид:

$$r\frac{dr}{dt} = (\lambda + q_{11}) u^2 + (2\nu + q_{12} + q_{21}) uv + (\lambda + q_{22}) v^2 + S \tag{6.16}$$

не удовлетворяющий общему выражению (1.13).

Согласно теореме 4 невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$, если $\varkappa_{1,2}(t_0) = \lambda \mp \nu + k \leqslant 0$, а $q_{ij}(t_0, t)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{vmatrix} \lambda + q_{11} + k & {}^1/_2 (q_{12} + q_{21}) + \nu \\ {}^1/_2 (q_{12} + q_{21}) + \nu & \lambda + q_{22} + k \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{6.17}$$

Если вместо теоремы 4 воспользоваться оценкой (5.3), то неравенство

$$\int_{t_0}^{t} [\lambda + \max q_{ii} + 2\nu + |q_{12} + q_{21}| + k]\, dt \leqslant 0 \tag{6.18}$$

гарантирует минимальный интервал времени, на котором невозмущенное движение устойчиво.

Поступила 21 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Об одной мысли Пуанкаре. Сб. научн. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 3, 1935.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 91, кн. 4, вып. 1, 1931.
4. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография. Изд. АН СССР, 1953.
5. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.