Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБЩИЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

М. Г. Слободянский

(Москва)

В этой работе изучаются представления общих решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей через гармонические функции.

Для решения задач теории упругости, для частного вида областей были предложены различные формы решений уравнений упругости, выраженные через гармонические и бигармонические функции (Ляме, Буссинеск, Треффтц, Галеркин, Папкович и др.). Эти формы решений оказались удобными для решения частных задач (равновесия сферы, полупространства, толстых плит и т. д.), так как они дают возможность воспользоваться хорошо известными представлениями и разложениями гармонических функций.

В работах Б. Г. Галеркина [1], П. Ф. Папковича [2], Г. Д. Гродского [3] были даны новые формы решений и поставлен вопрос об их общности. Кроме того, были предложены формы решений уравнений упругости, выраженные через гармонические функции при помощи объемных интегралов от ньютоновых потенциалов.

К таким решениям относится решение, использованное Корном [4] для доказательства теоремы существования, и решение, предложенное Тер-Мкртичьяном [5] (см. § 8 настоящей работы).

§§ 1 и 2 настоящей работы посвящены выводу и доказательству общности двух форм общих решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, а именно решения Папковича-Гродского и другой формы решения (2.7), так же симметричной относительно переменных x, y, z, содержащих, однако, более трех гармонических функций.

Особенность решения (2.7) по сравнению с решением Папковича-Гродского будет выяснена в последующих параграфах, которые посвящены вопросу о выражении общих решений уравнений упругости для односвязных, двусвязных и многосвязных областей (конечных и бесконечных) через три гармонические функции.

§ 1. Решение Папковича-Гродского. Покажем, что решение уравнения упругости

$$\nabla^2\mathbf{u} = -\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения, σ — коэффициент Пуассона, можно представить в виде суммы частного решения этого уравнения (1.1) и решения уравнения (1.1) без правой части.

За решение уравнения (1.1) с правой частью возьмем

$$\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} F \tag{1.2}$$

где F — частное решение уравнения

$$\nabla^2 F = -\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{1.3}$$

В самом деле, беря операцию grad от обеих частей (1.3), получим

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 = \nabla^2 \operatorname{grad} F = -\frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$$

Следовательно, вектор смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющий уравнению (1.1), можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \operatorname{grad} F \tag{1.4}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{i}\varphi_1 + \mathbf{j}\varphi_2 + \mathbf{k}\varphi_3$ — гармонический вектор, т. е. φ_1, φ_2, φ_3 — гармонические функции. Из (1.4) имеем

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{div} \operatorname{grad} F = \operatorname{div} \mathbf{B} + \nabla^2 F \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), найдем

$$\nabla^2 F = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{div} \mathbf{B} = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) \tag{1.6}$$

т. е. функция F является также решением уравнения (1.6) и, следовательно, она может быть представлена в виде

$$F = -\frac{1}{4(1-\sigma)} (x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_0) = -\frac{1}{4(1-\sigma)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \varphi_0)$$

где φ_0 — гармоническая функция, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Таким образом, приходим к выводу, что вектор смешения всегда можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \varphi_0) \tag{1.7}$$

Далее, так как правая часть (1.7) удовлетворяет уравнениям упругости (1.1) при произвольных гармонических функциях φ_1, φ_2, φ_3, φ_0, в чем нетрудно убедиться непосредственно, то решение Папковича-Гродского (1.7) является общим решением для любой области (односвязной и многосвязной), содержащим, однако, более трех гармонических функций.

§ 2. Другая форма решения, симметричная относительно переменных *x*, *y*, *z*. Если напишем уравнения упругости в виде

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{2.1}$$

то вектор смещения $\mathbf{u}$ можно представить в виде суммы частного решения уравнения (2.1) с правой частью и решения уравнения (2.1) без правой части.

За частное решение уравнения (2.1) с правой частью можно взять

$$\mathbf{u}_1 = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — частное решение уравнения

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2(1-\sigma)} (\operatorname{rot} \mathbf{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}) \tag{2.2}$$

В самом деле, беря от обеих частей (2.2) операцию rot и принимая во внимание, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$, найдем

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 = \nabla^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$$

Таким образом, вектор смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющий уравнению (2.1), можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{B}_1$ — гармонический вектор. Из (2.3) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), найдем

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 - \frac{1}{2(1-\sigma)} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi})$$

Полагая в (2.2) и в последнем равенстве $k = -1$ и принимая во внимание, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \operatorname{grad} \operatorname{div} = \nabla^2$, получим

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 \tag{2.5}$$

Следовательно, полагая $B_1 = \mathbf{i}\varphi_1 + \mathbf{j}\varphi_2 + \mathbf{k}\varphi_3$ и беря общее решение уравнения (2.5) в виде

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2(1-2\sigma)} [(y\varphi_3 - z\varphi_2)\,\mathbf{i} + (z\varphi_1 - x\varphi_3)\,\mathbf{j} + (x\varphi_2\,\mathbf{k} - y\varphi_1)] + \boldsymbol{\psi}_0 =$$
$$= -\frac{1}{2(1-2\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\psi}_0$$

где $\boldsymbol{\psi}_0$ — гармонический вектор, придем к выводу, что вектор смещения $\mathbf{u}$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{2(1-2\sigma)} \operatorname{rot} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}_1) + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_0 \tag{2.6}$$

или, иначе, в результате некоторых преобразований

$$\mathbf{u} = 4(1-\sigma)\,\mathbf{B} + r\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} - r \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_0 \qquad \left(\frac{1}{2(1-2\sigma)}\,\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}\right) \tag{2.7}$$

С другой стороны, так как правая часть (2.6) или (2.7) удовлетворяет уравнениям упругости при произвольных гармонических векторах $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\psi}_0$, в чем нетрудно убедиться непосредственно, то форма решения (2.7) является общим решением для произвольной области (односвязной и многосвязной), однако число гармонических функций в (2.7), как и в (1.7), велико.

Для исследования вопроса о возможности уменьшения числа гармонических функций в (1.7) и (2.7) необходимо отдельно рассмотреть односвязные, двусвязные и многосвязные области (конечные и бесконечные).

Примечание[1]. Независимо от данной работы форма решения (2.6) приводится также в работах[12,13].

При этом следует отметить, что в работе[12] автор прибавляет к решению (2.6) (обозначенное (I rot)) решение Папковича-Гродского (1.7), что является излишним, как это следует из данного в настоящей работе доказательства общности решений (1.7) и (2.6).

---

[1] Все примечания в этой статье автором сделаны при окончательном просмотре и подготовке статьи к печати в октябре 1953 г.

§ 3. Конечная односвязная область. Решение Папковича-Гродского и решение (2.6). **1°.** Пусть имеем конечную односвязную область D, ограниченную поверхностью Ляпунова S. Возьмем начало координат во внутренней точке области D.

Спрашивается, можно ли отбросить в рассматриваемом случае функцию φ_0 в решении Папковича-Гродского (1.7) без нарушения общности?

При этом мы под общей формой решений уравнений упругости будем понимать такую форму решений, которая дает возможность равномерно аппроксимировать компоненты смещений u, v, w (или также их первые производные), удовлетворяющие уравнениям упругости.

Пусть функция φ_0 — гармоническая в области D и непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$.

На основании известной теоремы Келдыша-Лаврентьева [6] гармоническая функция φ_0 представима равномерно сходящимся рядом гармонических полиномов и, следовательно, производные $\partial\varphi_0/\partial x$, $\partial\varphi_0/\partial y$, $\partial\varphi_0/\partial z$ в любой внутренней точке области D можно получить почленным дифференцированием этого ряда (см., например, [7], гл. III,§ 16).

Если мы еще предположим, что функции $\partial\varphi_0/\partial x$, $\partial\varphi_0/\partial y$, $\partial\varphi_0/\partial z$ непрерывные на поверхности S и, следовательно, на основании той же теоремы Келдыша-Лаврентьева также представимы равномерно сходящимися рядами гармонических полиномов, то мы придем к выводу, что если функция φ_0 вместе с ее производными $\partial\varphi_0/\partial x$, $\partial\varphi_0/\partial y$, $\partial\varphi_0/\partial z$ непрерывна на поверхности S, то производные $\partial\varphi_0/\partial x$, $\partial\varphi_0/\partial y$, $\partial\varphi_0/\partial z$ можно равномерно аппроксимировать в области D при помощи гармонических полиномов, т. е. существует функция

$$\varphi_0^* = \sum_{n=0}^{k} r^n Y_n \tag{3.1}$$

такая (Y_n — сферические функции порядка n), что

$$|\operatorname{grad}(\varphi_0 - \varphi_0^*)| < \varepsilon$$

где ε — заданное сколь угодно малое число.

Введя в (1.7) вместо функции φ_0, на которую наложены указанные ограничения, функцию φ_0^*, получим компоненты смещений u^*, v^*, w^*, которые отличаются от компонент смещении u, v, w на величину меньшую, чем $\varepsilon/4(1-\sigma)$.

Решение вопроса о возможности опустить функцию φ_0 в (1.7) сводится к нахождению гармонического вектора $\mathbf{B}^*$, удовлетворяющего уравнению

$$\operatorname{grad}\varphi_0^* = \mathbf{B}^* - \frac{1}{4(1-\sigma)}\operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}^*) \tag{3.2}$$

Беря от обеих частей (3.2) операции div и rot, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{B}^* = 0, \qquad \operatorname{rot} B^* = 0$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}^* = \operatorname{grad}\theta^*, \qquad \nabla^2\theta^* = 0$$

и из (3.2) имеем

$$\operatorname{grad}\left[-\varphi_0^* + \theta^* - \frac{1}{4(1-\sigma)}\, r\, \frac{\partial\theta^*}{\partial r}\right] = 0 \tag{3.3}$$

Подставляя (3.1) в (3.3), получим

$$\theta^* - \frac{1}{4(1-\sigma)}\, r\, \frac{\partial\theta^*}{\partial r} = \sum_{n=0}^{k} r^n Y_n + c \qquad (c = \mathrm{const}) \tag{3.4}$$

Из (3.4) видно, что можно положить

$$\theta^* = c + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{1 - n/4(1-\sigma)}\, r^n Y_n \tag{3.5}$$

Если знаменатель в (3.5) обращается в нуль, т. е. если $n-4(1-\sigma)=0$, что будет при $\sigma = 0.25$, $n = 3$, $\varphi_0^* = r^3 Y_3$, то, как это показал впервые П. Ф. Папкович, нет таких функций θ^*, а следовательно, нет такого вектора $\mathbf{B}^*$, чтобы имело место равенство (3.2).

Следовательно, вектор смещения $\mathbf{u}$ в случае конечной односвязной области может быть представлен в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}) \tag{3.6}$$

если только $\sigma \neq 0.25$, т. е. форма решения (3.6) будет общей для конечной односвязной области D при $\sigma \neq 0.25$.

Примечание. Здесь уместно отметить, что утверждения, содержащиеся в работах [5,8], о том что решение (3.6) является общим решением при любом значении σ, являются необоснованными, даже если область D является областью шара.

В самом деле, в работе [8] общее решение записывается в виде [стр. 166, формула (IV.4)]

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}[\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\eta + \Phi_0']$$

где η — гармоническая функция. Последнее выражение действительно будет общим решением уравнений упругости, однако дальнейшее утверждение, что можно свободно распоряжаться функцией η и выбирать ее так, чтобы $r\cdot\operatorname{grad}\eta - \Phi_0' = 0$ без нарушения общности решения, представляется не обоснованным.

Аналогичное необоснованное утверждение содержится в работе [5].

2°. Рассмотрим теперь решение (2.6) или, что то же самое, (2.7). Спрашивается, не может ли быть опущен вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0$ без нарушения общности решения при любом значении σ в случае односвязной области D. Полагая, как и выше, что составляющие гармонического вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0$ непрерывны на поверхности S области D, мы можем найти вектор $\boldsymbol{\psi}_0^*$ так, чтобы

$$|\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0 - \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0^*| < \varepsilon, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0^* = \sum_{n=0}^{k} r^n \mathbf{Y}_n \tag{3.7}$$

где ε — сколь угодно малое число.

Подставляя в (2.7) вместо $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0$ гармонический вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0^*$, получим вектор смещения $\mathbf{u}^*$, удовлетворяющий однородным уравнениям упругости, причем $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*| < \varepsilon$.

Далее, вопрос об опускании вектора $\operatorname{rot}\psi_0$ в (2.6) или (2.7) сводится к нахождению гармонического вектора $\mathbf{B}^*$ из уравнения

$$\operatorname{rot}\psi_0^* = 4(1-\sigma)\mathbf{B}^* + r\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial r} - \mathbf{r}\cdot\operatorname{div}\mathbf{B}^* \tag{3.8}$$

Беря от обеих частей (3.8) операцию div, найдем

$$\operatorname{div}\mathbf{B}^* = 0 \tag{3.9}$$

Полагая

$$\mathbf{B}^* = \sum_{n=0}^{k} b_n r^n \mathbf{Y}_n \tag{3.10}$$

и сравнивая (3.10) с (3.7), убедимся, что условие (3.9) выполнено. Подставляя (3.7) и (3.10) в (3.8), принимая во внимание (3.9), найдем

$$\mathbf{B}^* = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{4(1-\sigma)+n} r^n \mathbf{Y}_n \tag{3.11}$$

Из (3.11) видно, что при любом значении $0 < \sigma < 0.5$ знаменатель в (3.11) отличен от нуля и поэтому может быть найден вектор $\mathbf{B}^*$, удовлетворяющий уравнению (3.8).

Следовательно, в случае конечной односвязной области вектор смещения $\mathbf{u}$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{u} = 4(1-\sigma)\mathbf{B} + r\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} - \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{B} \tag{3.12}$$

или иначе

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{2(1-2\sigma)}\operatorname{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{B}_1) \tag{3.13}$$

Таким образом, в отличие от решения Папковича-Гродского решение (3.12) или (3.13) является общим для односвязной конечной области при любом значении σ.

Напишем решения (3.6) и (3.12) в координатной форме. Решение (3.6)

$$u = \varphi_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3), \ldots$$

Решение (3.12)

$$u = 4(1-\sigma)\varphi_1 + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - x\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right), \ldots$$

§ 4. Конечная односвязная область. Решения Буссинеска, Треффтца и другие. 1°. Приведенные выше формы решений (3.6) и (3.12) симметричны относительно переменных x, y, z. Но часто бывает удобно пользоваться решениями, не симметричными относительно переменных x, y, z. Для получения подобных решений и анализа их общности для конечной односвязной области нам необходимо предварительно разобрать вопрос об определении гармонической функции по ее производной.

Если ψ — гармоническая функция в заданной конечной односвязной области D и непрерывная на поверхности S, то мы можем аппроксимировать ее гармоническими полиномами, т. е. функцией ψ^*, так что

$|\psi - \psi^*| < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число:

$$\psi^* = \sum_{n=0}^{k} r^n Y_n = \sum_{n=0} r^n \Big[A_n P_n(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{n} (A_n{}^m \cos m\varphi + B_n{}^m \sin m\varphi) P_n{}^m(\cos\theta) \Big] \tag{4.1}$$

где r, φ, θ — сферические координаты.

Воспользовавшись известным представлением гармонического полинома в виде определенного интеграла

$$r^n P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi = \frac{(n+m)!}{2\pi i^m n!} \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\, du$$

имеем

$$r^n P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi = \frac{(n+m)!}{2\pi i^m n!} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(z + ix\cos u + iy\sin u)^{n+1}}{n+1} \cos mu\, du = \\ = \frac{1}{n+m+1} \frac{\partial}{\partial z} [r^{n+1} P_{n+1}{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi]$$

Следовательно, если обозначим

$$\psi_1{}^* = \sum_{n=0}^{k} r^{n+1} \Big[\frac{A_n}{n+1} P_{n+1}(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{A_n{}^m}{n+m+1} \cos m\varphi + \frac{B_n{}^m}{n+m+1} \sin m\varphi \Big) P_{n+1}{}^m(\cos\theta) \Big]$$

то получим

$$\psi^* = \frac{\partial \psi_1{}^*}{\partial z} \tag{4.2}$$

Таким образом, по заданной в конечной односвязной области гармонической функции ψ можно найти гармоническую функцию $\psi_1{}^*$, чтобы было

$$\left| \psi - \frac{\partial \psi_1{}^*}{\partial z} \right| < \varepsilon \tag{4.3}$$

где ε — сколь угодно малое число, и аналогично это же можно показать для производных по x и по y.

Воспользовавшись (4.2) и (4.3), можно доказать общность решений Буссинеска, Треффтца [4], Нейбера [9] и ряда других [10] для конечной односвязной области.

2°. Если, например, в решении Папковича-Гродского (1.7) положить, что функция φ_3 непрерывна вместе с ее первыми производными на поверхности S, и аппроксимировать ψ_3 функцией

$$\varphi_3{}^* = \sum_{n=0}^{k} r^n Y_n = \frac{\partial}{\partial z} \psi_3{}^* \tag{4.4}$$

так, чтобы

$$|\operatorname{grad}(\varphi_3 - \varphi_3{}^*)| < \varepsilon$$

и вместо F в уравнении (1.4) подставить

$$F^* = -\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3^* + \varphi_0) \tag{4.5}$$

то смещения в (1.4) будут аппроксимированы так:

$$u^* = \frac{\partial F^*}{\partial x} + \varphi_1, \qquad v^* = \frac{\partial F^*}{\partial y} + \varphi_2, \qquad w^* = \frac{\partial F^*}{\partial z} + \varphi_3^* \tag{4.6}$$

где компоненты u^*, v^*, w^* удовлетворяют уравнениям упругости и $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*| < \varepsilon_1$, причем $\varepsilon_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Или на основании (4.4)

$$u^* = \frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi_1', \qquad v^* = \frac{\partial F'}{\partial y} + \varphi_2', \qquad w^* = \frac{\partial F'}{\partial z} \tag{4.7}$$

где

$$F' = F^* + \psi_3^*, \qquad \varphi_1' = \varphi_1 - \frac{\partial \psi_3^*}{\partial x}, \qquad \varphi_2' = \varphi_2 - \frac{\partial \psi_3^*}{\partial y} \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.7), найдем

$$F' = -\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1' + y\varphi_2' + \varphi_0') \qquad \left(\varphi_0' = \varphi_0 + r\frac{\partial \psi_3^*}{\partial r}\right) \tag{4.9}$$

Очевидно, что φ_0' — гармоническая функция.

Подставляя (4.9) в (4.7), получим решение Нейбера, выраженное через три гармонические функции φ_1', φ_2', φ_0'.

Так как при выводе решения Нейбера приходится строить гармоническую функцию ψ_3, производная которой равна заданной произвольной гармонической функции φ_3, то приходим к выводу, что решение Нейбера является общим при любом значении σ в случае конечной односвязной области. Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что решение Треффтца

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + x\,\mathrm{grad}\,\psi, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{3-4\sigma}\mathrm{div}\,\mathbf{B} \tag{4.10}$$

где $\mathbf{B}$ — гармонический вектор, а гармоническая функция ψ должна быть определена из уравнения (4.10), а также решение Буссинеска и некоторые другие решения, для вывода которых приходится определять гармоническую функцию по значению ее производной, являются общими для конечной односвязной области.

Примечание. Докажем теперь следующее предложение.

Теорема. Для того чтобы решение Нейбера являлось общим для данной области, необходимо и достаточно, чтобы по заданной произвольной гармонической функции φ можно было построить гармоническую функцию ψ так, чтобы во всей области имело место равенство $\partial\psi / \partial z = \varphi$.

Доказательство. В самом деле, так как произвольная система смещений, удовлетворяющая однородным уравнениям упругости, может быть представлена в виде (4.6)

$$\begin{gathered} u = \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi_1, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_2, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z} + \varphi_3 \\ F = -\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_2 + \varphi_0) \end{gathered} \tag{4.11}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, φ_0 — гармонические функции, то, полагая, что та же система смещений представима в данной области D в форме Нейбера (4.7)

$$u = \frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi_1', \qquad v = \frac{\partial F'}{\partial y} + \varphi_2', \qquad w = \frac{\partial F'}{\partial z} \tag{4.12}$$

где φ_1', φ_2' — гармонические функции и, вычитая (4.12) из (4.11), найдем

$$\operatorname{grad}(F - F') = (\varphi_1' - \varphi_1)\,\mathbf{i} + (\varphi_2' - \varphi_2)\,\mathbf{j} + (-\varphi_3)\,\mathbf{k}$$

$$\operatorname{grad}\nabla^2(F - F') = 0 \tag{4.13}$$

Следовательно,

$$\nabla^2(F - F') = c, \qquad F - F' = -\psi_3 + \frac{cx^2}{2} \tag{4.14}$$

где c — постоянная, ψ_3 — гармоническая функция. Подставляя (4.14) в (4.13), найдем

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z} = \varphi_3 \tag{4.15}$$

Так как, с другой стороны, функция φ_3, входящая в (4.11), может быть взята совершенно произвольно, то необходимость условия теоремы доказана. Достаточность условия теоремы доказывается непосредственно при помощи подстановки (4.8) и (4.9).

Сформулированная теорема, которая нам понадобится в дальнейшем, относится также к ряду других решений, например к решениям Буссинеска [11] и Треффтца.

§ 5. Бесконечная область. 1°. Рассмотрим бесконечную область D^∞, внешнюю по отношению к замкнутой поверхности S, ограничивающей область D. Сначала рассмотрим решение Папковича-Гродского (1.7) и выясним, может ли быть опущена функция φ_0.

В случае бесконечной области D^∞ будем иметь вместо (3.1) (при тех же ограничениях, наложенных на φ_0)

$$\varphi_0^* = \sum_{n=0}^{k} r^{-(n+1)} Y_n \tag{5.1}$$

и вместо (3.5)

$$\theta^* = c + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{1 + [(n+1)/4(1-\sigma)]}\, r^{-(n+1)}\, Y_n \tag{5.2}$$

причем начало координат взято внутри области D.

Следовательно, при любом значении $0 < \sigma < 0.5$ знаменатель в (5.2) не равен нулю. Мы приходим к выводу, что решение Папковича-Гродского (3.6) является общим при любом значении σ для бесконечной области D^∞. Рассмотрим теперь решение (2.7) для бесконечной области D^∞ и выясним, нельзя ли опустить $\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0$.

Для бесконечной области D^∞ имеем в этом случае вместо (3.7) (при тех же ограничениях, наложенных на $\operatorname{rot}\psi_0$)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}_0^* = \sum_{n=0}^{k} r^{-(n+1)} \mathbf{Y}_n \tag{5.3}$$

и вместо (3.11)

$$\mathbf{B}^* = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{4(1-\sigma) - (n+1)}\, r^{-(n+1)}\, \mathbf{Y}_n \tag{5.4}$$

причем, как и раньше, начало координат взято внутри области D.

Так как знаменатель в (5.4) равен нулю при

$$\sigma = 0.25, \qquad n = 2, \qquad \operatorname{rot} \psi_0 = r^{-3}\mathbf{Y}_2$$

то решение (3.12) является общим для бесконечной области D^∞ при $\sigma \neq 0.25$, между тем как решение Папковича Гродского является в этом случае общим при любом значении $0 < \sigma < 0.5$.

Примечание 1. Для дальнейшего важно доказать следующее предложение, относящееся к решению Папковича-Гродского и решению (2.7). Если начало координат совпадает с точкой области D^∞, то при произвольной правой части (3.4) не существует гармонической функции θ^*, удовлетворяющей уравнению (3.4).

Аналогичное утверждение относится к уравнению (3.8). Ограничимся случаем, когда область D^∞ есть внешняя область по отношению к поверхности сферы Σ радиуса R и когда функция φ_0 симметрична относительно оси z и, следовательно, эта функция представима рядом (в сферических координатах ρ, θ, φ)

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \tag{5.5}$$

Беря начало координат на оси z на расстоянии $z_0 > R$ от центра сферы, получим вместо уравнения (3.4) следующее уравнение (θ^* обозначаем здесь через ψ):

$$\psi - \frac{1}{4(1-\sigma)}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{z_0}{4(1-\sigma)}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{z_0}{4(1-\sigma)}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\sin\theta}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^{-(n+1)}P_n(\cos\theta) \tag{5.6}$$

Для простоты ограничимся первым членом в (5.5), т. е. предположим, что $a_n = 0$ при $n \neq 0$, $\varphi_0 = a_0\rho^{-1}$.

Если существует гармоническая функция ψ, симметричная относительно оси z, удовлетворяющая уравнению (5.6), то она представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в (5.6) и имея в виду, что ряд (5.7) можно почленно дифференцировать при $\rho > R$, найдем из (5.6)

$$b_n = \frac{a_0(n-1)!}{(5-4\sigma+n)(5-4\sigma+n-1)\ldots(5-4\sigma)}z_0^{\,n} \tag{5.8}$$

Подставляя далее (5.8) в (5.7) и принимая во внимание, что $P_n(1) = 1$, убедимся в том, что ряд (5.7) расходится при $z_0 > R$.

Следовательно, не существует гармонической функции ψ, удовлетворяющей уравнению (5.6). Аналогичный вывод может быть сделан и в случае произвольной области D^∞, внешней по отношению к односвязной области D, ограниченной замкнутой поверхностью S.

Отсюда следует, что функция φ_0 в решении Папковича-Гродского не может быть опущена, если начало координат взято в точке области D^∞.

Аналогичное утверждение относится и к решению (2.7), т. е., если начало координат взято внутри области D^∞, то решение (3.12) не является общим для области D^∞.

2°. Выясним теперь, является ли решение Нейбера, рассмотренное в § 4, общим для бесконечной области D^∞.

На основании теоремы, доказанной в § 4, для решения вопроса об общности этой формы решения необходимо выяснить возможность определения гармонической функции ψ_3 в случае бесконечной области D^∞

так, чтобы $\partial\psi_3 / \partial z = \varphi_3$, где φ_3 — произвольная гармоническая функция в области D^∞.

Пусть, например, область D^∞ является внешней областью по отношению к поверхности сферы Σ.

В силу полноты системы сферических функций имеем

$$\varphi_3 = \sum_{m,\,n,\,l} a_{mnl} \frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5.9}$$

$$\left(\begin{array}{l} m = 0, 1; \ldots \\ n = 0, 1, \ldots \\ l = 0, 1, \ldots \end{array}\right)$$

$$\psi_3 = \sum_{m,\,n,\,l} b_{mnl} \frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5.10}$$

где r — расстояние от начала координат, взятого в области D, до произвольной точки области D^∞.

В силу равномерной сходимости ряда (5.10) его можно, как известно (см., например, [7]), почленно дифференцировать, и в силу единственности разложения гармонической функции φ_3 по шаровым функциям ряд, полученный от дифференцирования (5.10), должен совпадать с рядом (5.9).

Беря производную по z от правой части (5.10), мы убедимся том, что в выражении для $\partial\psi / \partial z$ будут отсутствовать члены вида

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5.11}$$

Аналогичное утверждение имеет место в случае, когда область D^∞ есть внешняя область по отношению к произвольной замкнутой поверхности S, ограничивающей односвязную область D.

Следовательно, если члены вида (5.11) входят в (5.9), то нельзя будет подобрать функцию ψ, однозначную и гармоническую во всей области D^∞, так, чтобы ее производная по z была равна гармонической функции φ.

Таким образом, мы приходим к выводу, что решение Нейбера не является общим для бесконечной области D^∞.

Аналогичный вывод может быть сделан и для других форм решений, если для их вывода существенно необходимо построить гармоническую функцию, производная которой равна заданной гармонической функции.

К таким решениям относятся решения Буссинеска, Треффтца и некоторые другие.

Примечание 2. Если мы откажемся от требования, чтобы функция ψ_3, а также функции φ_1 и φ_2, входящие в (4.12), были непрерывны по всей области D^∞, то можно путем добавления к функции ψ_3 функции

$$\Phi = \sum_{m=0,\,1,\,\ldots} \left(c_m + c_m{}^1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^m}{\partial x^m} \ln(r + z) \tag{5.12}$$

сделать решение (4.12) общим решением для области D^∞.

В самом деле, беря от (5.12) производную по z, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \sum \left(c_m + c_m{}^1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5.13}$$

Поэтому для произвольной гармонической функции φ_3 можно подобрать функции ψ_3 и Φ так, чтобы

$$\frac{\partial(\psi_3+\Phi)}{\partial z}=\psi_3$$

Полагая далее в (4.12)

$$\varphi_1''=\varphi_1'-\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad \varphi_2''=\varphi_2'-\frac{\partial\Phi}{\partial y},\qquad \varphi_0''=\varphi_0'+r\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$
$$F=F'+\Phi$$

найдем

$$u=\frac{\partial F''}{\partial x}+\varphi_1'',\qquad v=\frac{\partial F''}{\partial y}+\varphi_2'',\qquad w=\frac{\partial F''}{\partial z}$$
$$F''=-\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1''+y\varphi_2''+\varphi_0'') \tag{5.14}$$

Решение (5.14) является общим решением однородных уравнений упругости для области D^∞.

Примечание 3. Здесь уместно провести аналогию с плоской задачей теории упругости. Общее решение для случая плоской задачи будет

$$u=\frac{\partial F}{\partial x}+\varphi_1,\qquad v=\frac{\partial F}{\partial y}+\varphi_2,\qquad F=-\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1+y\varphi_2+\varphi_0) \tag{5.15}$$

Вопрос об опускании функции φ_2 сводится к задаче о построении гармонической функции ψ_2 в области D^∞ (внешней по отношению к односвязной области D, ограниченной замкнутым контуром l), чтобы в области D^∞ было $\partial\psi_2/\partial y=\varphi_2$.

Записав φ_2 и ψ_2 в виде

$$\varphi_2=\sum_{m,n}a_{mn}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\ln r \tag{5.16}$$
$$\begin{pmatrix}m=0,1,\ldots\\ n=0,1,\ldots\end{pmatrix}$$
$$\psi_2=\sum_{m,n}b_{mn}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\ln r \tag{5.17}$$

и дифференцируя почленно ряд (5.17), получим ряд, в котором отсутствуют члены

$$a_{00}\ln r,\qquad a_{10}\frac{\partial}{\partial x}\ln r \tag{5.18}$$

Что касается членов вида $(\partial^m/\partial x^m)\ln r$, то при m нечетном ($m>1$) имеем

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\ln r=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\ln r=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\ln r=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x\,\partial y^{m-2}}\ln r$$

а при m четном

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\ln r=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\ln r$$

и, следовательно, дифференцируя ряд (5.17) то y, получим ряд, в котором члены вида $\partial^m\ln r/\partial x^m$ при $m>1$ не будут отсутствовать.

Если теперь прибавить к функции ψ_2 функцию

$$\Phi=a_{00}(y\ln r-y+x\theta)+a_{10}\theta \tag{5.19}$$

производная которой равна сумме членов (5.18)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=a_{00}\ln r+a_{10}\frac{\partial}{\partial x}\ln r$$

и положить, как и выше (см. примечание 2),

$$\varphi_1'' = \varphi_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \varphi_0'' = \varphi_0 + r\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

то получим

$$u = \frac{\partial F''}{\partial x} + \varphi_1'', \qquad v = \frac{\partial F''}{\partial y}, \qquad F'' = -\frac{1}{4(1-\sigma)}(x\varphi_1'' + \varphi_0'') \tag{5.20}$$

Решение (5.20) является общим для области D^∞, однако, так же как и в (5.14), это достигнуто прибавлением функции Ф.

Примечание 4. Простой структурой функции Ф в (5.19) для плоской задачи теории упругости по сравнению с (5.12) объясняется тот факт, что задача о построении общих решений, выраженных через гармонические функции, в плоской задаче решается много проще, чем в пространственной задаче.

§ 6. Конечная двусвязная область. Пусть область упругого тела ограничена двумя замкнутыми поверхностями S_0 и S_1, из которых поверхность S_1 целиком лежит внутри поверхности S_0 и не имеет с ней общих точек.

По формулам Сомильяна [4] компоненты вектора смещения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \iint\limits_{S_0+S_1} [(X_\nu u_\xi + Y_\nu v_\xi + Z_\nu w_\xi) - (X_{\nu\xi} u + Y_{\nu\xi} v + Z_{\nu\xi} w)]\, ds \\
v(x, y, z) &= \iint\limits_{S_0+S_1} [(X_\nu u_\eta + Y_\nu v_\nu + Z_\nu w_\eta) - (X_{\nu\eta} u + Y_{\nu\eta} v + Z_{\nu\eta} w)]\, ds \\
w(x, y, z) &= \iint\limits_{S_0+S_1} [(X_\nu u_\zeta + Y_\nu v_\zeta + Z_\nu w_\zeta) - (X_{\nu\zeta} u + Y_{\nu\zeta} v + Z_{\nu\zeta} w)]\, ds
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь компоненты смещения u_ξ, v_ξ, w_ξ, возникающие под действием единичной силы, приложенной в точке x, y, z в направлении оси x, определяются формулами

$$\begin{aligned}
u_\xi &= \frac{5-6\sigma}{1-\sigma}\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} \\
v_\xi &= \qquad\qquad + \frac{r^2}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{1}{r} \\
w_\xi &= \qquad\qquad + \frac{r^2}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

а поверхностные усилия $X_{\nu\xi}$, $Y_{\nu\xi}$, $Z_{\nu\xi}$, соответствующие смещениям u_ξ, v_ξ, w_ξ, формулами

$$X_{\nu\xi} = \sigma_x^{(\xi)} \cos(x\nu) + \tau_{xy}^{(\xi)} \cos(y\nu) + \tau_{xz}^{(\xi)} \cos(z\nu), \ldots \tag{6.3}$$

Аналогичные выражения имеют место для u_η, v_η, w_η — смещений, возникающих в бесконечном теле под действием единичной силы в направлении оси y, и $X_{\nu\eta}$, $Y_{\nu\eta}$, $Z_{\nu\eta}$ — соответствующих им поверхностных усилий, а также для u_ζ, v_ζ, w_ζ — смещений, возникающих под действием единичной силы в направлении оси z, и $X_{\nu\zeta}$, $Y_{\nu\zeta}$, $Z_{\nu\zeta}$ — соответствующих им поверхностных усилий.

Легко убедиться непосредственной проверкой, что матрица

$$\begin{Vmatrix} u_\xi & v_\xi & w_\xi \\ u_\eta & v_\eta & w_\eta \\ u_\zeta & v_\zeta & w_\zeta \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

симметричная. Следовательно, так как векторы

$$\mathbf{i}\, u_\xi + \mathbf{j}\, v_\xi + \mathbf{k}\, w_\xi, \ldots \tag{6.5}$$

удовлетворяют однородным уравнениям упругости (при $r \neq 0$), то векторы

$$\mathbf{i}\, u_\xi + \mathbf{j}\, u_\eta + \mathbf{k} u_\zeta, \ldots \tag{6.6}$$

также удовлетворяют однородным уравнениям упругости (при $r \neq 0$).

В силу симметричности матрицы (6.4) следует, что если векторы

$$\mathbf{i} X_{\nu\xi} + \mathbf{j} Y_{\nu\eta} + \mathbf{k} Z_{\nu\zeta} \tag{6.7}$$

являющиеся функциями координат x, y, z, рассматривать как векторы смещений, то они удовлетворяют однородным уравнениям упругости при $r \neq 0$. В самом деле, на основании (6.3) имеем

$$\begin{aligned} X_{\nu\xi} &= \sigma_x^{(\xi)} \cos(x\nu) + \cdots = 2G\left[\frac{\partial u_\xi}{\partial x} + \frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial x} + \frac{\partial v_\xi}{\partial y} + \frac{\partial w_\xi}{\partial z}\right)\cos(x\nu) + \cdots\right] \\ X_{\nu\eta} &= \sigma_x^{(\eta)} \cos(x\nu) + \cdots = 2G\left[\frac{\partial u_\eta}{\partial x} + \frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y} + \frac{\partial w_\eta}{\partial z}\right)\cos(x\nu) + \cdots\right] \\ X_{\nu\zeta} &= \sigma_x^{(\zeta)} \cos(x\nu) + \cdots = 2G\left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial x} + \frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u_\zeta}{\partial x} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial y} + \frac{\partial w_\zeta}{\partial z}\right)\cos(x\nu) + \cdots\right] \end{aligned} \tag{6.8}$$

Подставив (6.8) в (6.7) и принимая во внимание, что векторы смещений (6.6), а следовательно, и их производные по x, y, z удовлетворяют уравнениям упругости, легко убедиться в том, что векторы смещения (6.7) тоже удовлетворяют уравнениям упругости по переменным x, y, z.

Таким образом, на основании изложенного очевидно, что (6.1) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \tag{6.9}$$

где

$$\mathbf{u}_0 = \iint\limits_{S_0} \{[X_\nu(\mathbf{i}\, u_\xi + \mathbf{j} u_\eta + \mathbf{k}\, u_\zeta) + \cdots] - [u\,(\mathbf{i}\, X_{\nu\xi} + \mathbf{j}\, X_{\nu\eta} + \mathbf{k}\, X_{\nu\zeta}) + \cdots]\}\, ds \tag{6.10}$$

$$\mathbf{u}_1 = \iint\limits_{S_1} \{[X_\nu(\mathbf{i}\, u_\xi + \mathbf{j}\, u_\eta + \mathbf{k}\, u_\zeta) + \cdots] - [u\,(\mathbf{i}\, X_{\nu\xi} + \mathbf{j}\, X_{\nu\eta} + \mathbf{k}\, X_{\nu\zeta}) + \cdots]\}\, ds \tag{6.11}$$

при этом вектор смещения $\mathbf{u}_0$ будет удовлетворять однородным уравнениям упругости во всей области D_0, ограниченной поверхностью S_0, а вектор смещения $\mathbf{u}_1$ будет удовлетворять однородным уравнениям упругости во всей бесконечной области, внешней по отношению к замкнутой поверхности S_1.

Следовательно, на основании изложенного в § 2—5 решение уравнений упругости для двусвязной области можно записать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \tag{6.12}$$

$$\mathbf{u}_0 = 4(1-\sigma)\mathbf{B}_1 + r\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial r} - \mathbf{r}\cdot \operatorname{div} \mathbf{B}_1 \tag{6.13}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}_0 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_0) \tag{6.14}$$

где $\mathbf{B}_0$ — гармонический вектор в области D_0, ограниченной поверхностью S_0, $\mathbf{B}_1$ — гармонический вектор в бесконечной области D_1^∞, внешней по отношению к поверхности S_1, r — расстояние от произвольной точки до фиксированной точки, лежащей внутри области, ограниченной поверхностью S_1. При $\sigma \neq 0.25$ можно, как это было показано, взять либо (6.13), либо (6.14) как для области D_0, так и для области D_1^∞, т. е. можно положить

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}) \tag{6.15}$$

или

$$\mathbf{u} = 4(1-\sigma)\mathbf{B} + r\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} - \mathbf{r}\cdot \operatorname{div} \mathbf{B} \tag{6.16}$$

где $\mathbf{B}$ — гармонический вектор в области D, ограниченной поверхностями S_0 и S_1. Так как, с другой стороны, (6.13) и (6.14) удовлетворяют уравнениям упругости при произвольных гармонических векторах $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$, то решение (6.12) является общим решением для двусвязной области.

Таким же образом (6.15) или (6.16) являются общими решениями для двусвязной области, если $\sigma \neq 0.25$.

В заключение отметим, что вектор смещения $\mathbf{u}_0$, удовлетворяющий уравнениям упругости в конечной односвязной области D_0, может быть взят в любой из приведенных выше форм решений для конечной односвязной области.

Примечание 1. На основании результатов § 5 решение (6.15) или (6.16) даже при $\sigma \neq 0.25$ не является общим для двусвязной области, если начало координат взято вне области, ограниченной поверхностью S_1.

Примечание 2. На основании доказанной в § 5 теоремы очевидно, что решение Нейбера не является общим для двусвязной области. Чтобы решение Нейбера было общим для двусвязной области, необходимо взять его в виде (5.14), куда включена функция Φ из (5.12), а в случае плоской задачи — в виде (5.20), куда включена функция Φ из (5.19). Аналогичные утверждения относятся к решениям Буссинеска, Треффтца и ряда других.

§ 7. Многосвязная область. Пусть многосвязная область D ограничена замкнутой поверхность S_0 и поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_k$, лежащими внутри области, ограниченной поверхностью S_0.

Обозначим через $D_0, D_1, \ldots, D_k$ односвязные области, ограниченные поверхностями $S_0, S_1, \ldots, S_k$, а бесконечные области, внешние по отношению к поверхностям $S_1, S_2, \ldots, S_k$, обозначим через $D_1^\infty, D_2^\infty, \ldots, D_k^\infty$.

Применяя формулы Сомильяна (6.1) к многосвязной области, получим равенства, аналогичные (6.9) — (6.16).

Вектор смещения $\mathbf{u}$ можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k \tag{7.1}$$

где $\mathbf{u}_0$ — вектор смещения, удовлетворяющий уравнениям упругости внутри конечной области D_0, векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ удовлетворяют уравнениям упругости внутри бесконечных областей $D_1^{\infty}, \ldots, D_k^{\infty}$.

Следовательно, на основании изложенного выше можно положить

$$\mathbf{u}_0 = 4(1-\sigma)\mathbf{B}_0 + r\frac{d\mathbf{B}_0}{dr} - \mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}_0 \tag{7.2}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{B}_i - \frac{1}{4(1-\sigma)}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_i) \tag{7.3}$$

$$r_i^2 = (x - x_i^2) + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

где $\mathbf{B}_0$ — гармонический вектор в области D_0, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k$ — гармонические векторы в бесконечных областях $D_1^{\infty}, \ldots, D_k^{\infty}$ соответственно, x_i, y_i, z_i — координаты фиксированных точек, взятых внутри областей $D_1, \ldots, D_k$.

С другой стороны, так как (7.1) удовлетворяет уравнениям упругости при любых гармонических векторах $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$, то решение (7.1) является общим для многосвязной области.

Если многосвязная область бесконечная, то вектор смещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k,$$

где $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ выражаются по формуле (7.3).

Далее отметим, что вектор смещения $\mathbf{u}_0$, удовлетворяющий уравнениям упругости в конечной односвязной области, может быть взят в любой из приведенных выше форм общих решений для конечной односвязной области.

Необходимо отметить, что в общее решение (7.2)—(7.3) входят лишь три независимые гармонические функции, ибо, как известно, гармонический вектор $\mathbf{B}$ в многосвязной области может быть представлен в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_k$$

где $\mathbf{B}_i$ имеют те же значения, что и в (7.3),

Примечание 1. На основании результатов § 5 и примечания 2 того же параграфа решение Папковича-Гродского, в котором опущена функция φ_0, и решение (2.7), в котором опущен вектор $\mathrm{rot}\,\psi_0$, даже при $\sigma \neq 0.25$ не являются общими решениями для многосвязных областей (исключая двусвязные), ибо если область, например, трехсвязная, то начало координат не может быть выбрано так, чтобы оно находилось одновременно внутри областей D_1 и D_2. Аналогичное замечание относится и к плоской задаче теории упругости.

Примечание 2. На основании выводов § 5 и примечания 3 к § 5, для того чтобы решение Нейбера сделать общим решением, необходимо включить функцию Φ вида (5.12) в случае пространственной задачи и функции вида (5.19) — в случае плоской задачи.

Аналогичные утверждения относятся к другим формам решений, для вывода которых существенно необходимо построить гармоническую функцию, производная которой равна заданной гармонической функции.

§ 8. Решения, выраженные через гармонические функции при помощи ньютоновых потенциалов.

Общее решение, выраженное через гармонические функции при помощи ньютоновых потенциалов, предложено Тер-Мкртичьяном [5].

Пользуясь приемом, изложенным в § 1, можно получить эту форму решения весьма простым путем. А именно, взяв решение уравнения упругости (1.1) в виде суммы решения этого уравнения без правой части и частного решения этого уравнения с правой частью (как и в § 1), а это последнее в виде объемного интеграла от ньютоновых потенциалов, получим

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi(1-2\sigma)} \operatorname{grad} \int\limits_D \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{r}\, d\tau \tag{8.1}$$

где $\mathbf{B}$ — гармонический вектор, являющийся решением уравнения (1.1) без правой части.

Беря от обеих частей (8.1) операцию div, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{div} \mathbf{B} \tag{8.2}$$

Подставляя (8.2) в (8.1), найдем

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \frac{1}{8\pi(1-\sigma)} \int\limits_D \frac{\operatorname{div} \mathbf{B}}{r}\, d\tau \tag{8.3}$$

Так как, с другой стороны, правая часть (8.3) удовлетворяет уравнениям упругости при любом гармоническом векторе $\mathbf{B}$, в чем нетрудно убедиться непосредственно, то решение (8.3), выраженное через гармонический вектор $\mathbf{B}$ при помощи ньютоновых потенциалов, является общим решением уравнений упругости.

Примечание 1. Рассмотрим теперь вопрос о степени определенности гармонических функций, входящих в рассмотренные выше общие решения уравнений упругости в случае заданных смещений.

Односвязная область. Положим, что при заданной системе смещений уравнению (3.12) удовлетворяют гармонические векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$.

Из (3.12) и (3.13) имеем

$$0 = 4(1-\sigma)(\mathbf{B}-\mathbf{B}') + r\frac{\partial(\mathbf{B}-\mathbf{B}')}{\partial r} - \mathbf{r} \operatorname{div}(\mathbf{B}-\mathbf{B}') \tag{8.4}$$

$$0 = 2(1-2\sigma)(\mathbf{B}-\mathbf{B}') - \operatorname{rot}[\mathbf{r}\times(\mathbf{B}-\mathbf{B}')] \tag{8.5}$$

Из (8.5) имеем $\operatorname{div}(\mathbf{B}-\mathbf{B}') = 0$, следовательно, из (8.4) найдем

$$4(1-\sigma)(\mathbf{B}-\mathbf{B}') + r\frac{\partial(\mathbf{B}-\mathbf{B}')}{\partial r} = 0 \tag{8.6}$$

Общим решением уравнения (8.6) является гармонический вектор

$$\mathbf{B}-\mathbf{B}' = r^{\alpha}\mathbf{Y}_{\alpha}, \quad \alpha = -4(1-\sigma), \quad \mathbf{Y}_{\alpha} = \mathbf{i}Y_{\alpha}^{(1)} + \mathbf{j}Y_{\alpha}^{(2)} + \mathbf{k}Y_{\alpha}^{(3)} \tag{8.7}$$

а $Y_{\alpha}^{(1)}$, $Y_{\alpha}^{(2)}$, $Y_{\alpha}^{(3)}$ — обобщенные сферические функции.

Если начало координат взято внутри области тела, то вектор $r^\alpha \mathbf{Y}_\alpha$ не является гармоническим во всей области тела (при $r \to 0$ и $0 < \sigma < 0.5$, $r^\alpha \to \infty$) и потому

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = 0$$

Следовательно, в случае задания смещений вектор $\mathbf{B}$ определяется из (3.2) однозначно.

К тому же выводу мы придем, если вырежем шар, целиком лежащий в области D с центром в начале координат, и положим, как в (3.11).

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \mathbf{Y}_n, \qquad \operatorname{div}(r^n \mathbf{Y}_n) = 0 \tag{8.8}$$

В самом деле, подставляя (8.8) в (8.4) и (8.6), найдем $b_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, т. е.

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = 0$$

Далее, если начало координат не лежит внутри области D, то (8.7) при дополнительном условии $\operatorname{div}(r^\alpha \mathbf{Y}_\alpha) = 0$ является общим решением уравнения (8.4), причем в этом случае вектор $r^\alpha \mathbf{Y}_\alpha$ может оказаться гармоническим во всей области тела D. Следовательно, в этом случае вектор $\mathbf{B}$ не определяется однозначно из (3.12).

Аналогичные выводы могут быть получены для решения (3.6). Пусть гармонические векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ одновременно удовлетворяют уравнению (3.6) при заданных смещениях u, v, w и при $\sigma \neq 0.25$. Из (3.6) найдем

$$0 = (\mathbf{B} - \mathbf{B}') - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}')) \tag{8.9}$$

Отсюда

$$\operatorname{div}(\mathbf{B} - \mathbf{B}') = 0, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{B}') = 0, \qquad \mathbf{B} - \mathbf{B}' = \operatorname{grad} \varphi \tag{8.10}$$

где φ — гармоническая функция. Подставляя (8.10) в (8.9), найдем

$$\operatorname{grad}\left[\varphi - \frac{1}{4(1-\sigma)} r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] = 0 \tag{8.11}$$

Решением уравнения (8.11) является гармоническая функция

$$\varphi = c + r^\alpha Y_\alpha, \qquad \alpha = 4(1-\sigma) \tag{8.12}$$

где c — постоянное. Очевидно, что если $\sigma \neq 0.25$ и начало координат лежит внутри области, то функция $r^\alpha Y_\alpha$ не является гармонической во всей области тела и, следовательно, из (8.12) следует $\varphi = c$, т. е.

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = \operatorname{grad} \varphi = 0$$

Таким образом вектор $\mathbf{B}$ определяется однозначно из (3.6) при $\sigma \neq 0.25$, если начало координат лежит внутри области тела. Если начало координат не лежит внутри области тела, то функция $r^\alpha Y_\alpha$ может оказаться гармонической во всей области тела и, следовательно, гармонический вектор $\mathbf{B}$ в этом случае не определяется однозначно.

Аналогичным образом можно показать, что функции φ_0, φ_1, φ_2, входящие в решение Нейбера не определяются однозначно.

Бесконечная область. Гармонический вектор $r^\alpha \mathbf{Y}_\alpha$, где $\alpha = -4(1-\sigma)$, не будет являться гармоническим во всей бесконечной области D^∞, если $\sigma \neq 0.25$ и начало координат лежит внутри области D (т. е. вне области D^∞), следовательно, вектор $\mathbf{B}$ определяется в этом случае из (3.12) однозначно.

Далее, очевидно, что функция $\varphi = r^\alpha Y_\alpha$, входящая в (8.12), также не является гармонической функцией всюду в области D^∞, если начало координат лежит внутри области D (т. е. вне области D^∞).

Следовательно, вектор **B** определяется в рассматриваемом случае из (3.6) однозначно.

Таким же образом можно показать, что если $\sigma \neq 0.25$, то гармонический вектор **B** определяется из (6.15), а также из (6.16) однозначно, причем начало координат, как это следует из § 4, должно лежать внутри области D_1.

Многосвязная область. Если при заданных смещениях соотношениям (7.1) — (7.3) удовлетворяют две системы гармонических векторов $\mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_k$ и $\mathbf{B}_0', \ldots, \mathbf{B}_k'$, то векторы $\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0', \ldots, \mathbf{B}_k - \mathbf{B}_k'$ удовлетворяют уравнениям

$$0 = \mathbf{u}_0' + \cdots + \mathbf{u}_k'$$

$$0 = \mathbf{u}_0' = 4(1-\sigma)(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0') + r\frac{\partial(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0')}{\partial r} - r \operatorname{div}(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0')$$

$$0 = \mathbf{u}_i' = (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i') - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{r}_i \bullet (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i'))$$

Так как точка (x_i, y_i, z_i) лежит внутри области D_i, то если начало вектора **r** лежит внутри области D_0, мы придем к выводу на основании вышеизложенного что векторы $\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i' = 0$ и, следовательно, гармонические векторы, входящие в (7.2) — (7.3), определяются однозначно, при заданных смещениях u, v, w. Также однозначно определяется вектор **B** из (8.3), ибо если $\mathbf{u} = 0$, то $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и из (8.3) следует $\mathbf{B} = 0$.

Приведенный анализ показывает, что выбор общей формы решения уравнений упругости существенно зависит от того, является ли область упругого тела односвязной или многосвязной, конечной или бесконечной. При этом установлены следующие положения.

1. Общим решением для многосвязной области является решение (7.1) — (7.3).

2. Вектор ψ_0 в решении (2.7) и функция φ_0 в (1.7) могут быть опущены лишь в случае двусвязной области при $\sigma \neq 0.25$. Это замечание относится и к плоской задаче теории упругости.

3. Для бесконечной области, внешней по отношению к замкнутой поверхности S, общим решением оказывается решение Папковича-Гродского (3.6).

4. Для конечной односвязной области общими решениями являются решение (3.12), решение Папковича-Гродского (3.6) при $\sigma \neq 0.25$, решение Нейбера [9] и другие [10].

5. Решения вида Буссинеска и т. д. будут общими для многосвязной области лишь после добавления функции вида (5.12), а в случае плоской задачи — функции вида (5.19).

На некоторые функции, входящие в (1.7) и (2.7), были наложены выше некоторые ограничения в смысле непрерывности их, а в некоторых случаях и их первых производных на поверхностях $S_1, \ldots, S_k$, которые являются гладкими в смысле Ляпунова.

Случай, когда указанные функции или их первые производные не непрерывны на поверхностях $S_1, \ldots, S_k$, требует дополнительного рассмотрения, однако во многих случаях путем выделения особенностей указанных функций на поверхностях $S_1, \ldots, S_k$ можно показать, что изложенные выше результаты остаются справедливыми. Для выделения особенностей указанных функций можно воспользоваться, например, решением уравнений упругости для полупространства, которое, как известно, выражается через три гармонические функции.

Поступила 29 VI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. ДАН СССР, сер. А, 1930.
2. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. Известия АН СССР, сер. матем. и естеств. наук, № 10, 1932.
3. Гродский Г. Д. Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновых потенциалов и гармонических функций. Известия АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 4, 1935.
4. Треффтц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ, 1934.
5. Тер-Мкртичьян Л. Н. Об общем решении задачи теории упругости. Труды Ленинградского политехн. ин-та, № 4, 1947.
6. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. Об устойчивости решений задачи Дирихле. Известия АН СССР, сер. математ., № 4, 1937.
7. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. ГТТИ, 1946.
8. Крутков Ю. А. Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
9. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. ZAMM, т. 14, № 4, 1934.
10. Слободянский М. Г. Функции напряжений для пространственной задачи теории упругости. Ученые записки МГУ, вып. 24 (механика), кн. 2, 1938.
11. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
12. Аржаных И. С. Исследования по механике сплошной среды. Труды Ин-та математ. и механики, вып. 9, 1952. Изд. АН Узб. ССР.
13. Чуриков Ф. С. Об одной форме общего решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.