Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. Соломон

(Бухарест)

В работе изучается одномерная задача для тонкой упругой оболочки, очерченной по поверхности прямого (минимального) геликоида, отнесенного к асимптотическим линиям.

§ 1. В статье Ю. Н. Работнова [1] показано, насколько естественно отнести оболочки отрицательной кривизны к асимптотическим линиям. Если соответствующим образом избрать единицу длины, можно написать уравнения любого прямого геликоида, отнесенного к своим асимптотическим линиям x, y, как уравнения геликоида шага 2π:

$$\bar{x} = \operatorname{sh} x \cos y, \qquad \bar{y} = \operatorname{sh} x \sin y, \qquad \bar{z} = y \tag{1.1}$$

Линии x — прямые образующие, а ортогональные им линии y — винтовые линии.

Нетрудно получить уравнения равновесия, уравнения неразрывности, соотношения между деформациями и перемещениями и соотношения между напряжениями и деформациями для минимальных оболочек, отнесенных к ортогональной системе асимптотических линий (они и есть единственные поверхности, на которых асимптотические линии образуют ортогональную сеть). Сохраняя обычные обозначения, можно отбросить шестое уравнение равновесия и взять

$$S_1 = -S_2 = S, \qquad H_1 = -H_2 = H \tag{1.2}$$

В случае прямого геликоида коэффициенты всех нужных уравнений и соотношений являются функциями одного x. Таким образом, если условия закрепления и внешние силы не зависят от y, для бесконечно простирающегося в обе стороны геликоида решение системы уравнений также не будет зависить от y и задача сведется к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В рассматриваемом случае имеем:

уравнения равновесия

$$T_1' + \operatorname{th} x (T_1 - T_2) = \frac{N_2}{\operatorname{ch} x} - \operatorname{ch} x X \tag{1.3}$$

$$S' + 2 \operatorname{th} x S = \frac{N_1}{\operatorname{ch} x} - \operatorname{ch} x Y \tag{1.4}$$

$$N_1' + \operatorname{th} x N_1 + \frac{2}{\operatorname{ch} x} S = -\operatorname{ch} x Z \tag{1.5}$$

$$H' + 2 \operatorname{th} x H = -\operatorname{ch} x N_2 \tag{1.6}$$

$$G_1' + \operatorname{th} x (G_1 - G_2) = \operatorname{ch} x N_1 \tag{1.7}$$

уравнения неразрывности в усилиях и моментах

$$(T_1 - \sigma T_1)' + \frac{3(1+\sigma)}{h^2}(\mathrm{ch}^2\, xH)' = 0 \qquad (1.8)$$

$$(G_2 - \sigma G_1)' - (1+\sigma)\,\mathrm{th}\, x\,(G_1 - G_2) - \frac{(1+\sigma)\,h^2}{3\,\mathrm{ch}^2 x}(S' + 2\,\mathrm{th}\, x\, S) = 0 \qquad (1.9)$$

$$(T_2 - T_1)'' + 2\,[\mathrm{th}\, x\,(T_2 - T_1)]' - \frac{6(1+\sigma)}{h^2}H = -(1-\sigma)\left(\frac{N_2}{\mathrm{ch}\, x} - \mathrm{ch}\, x\, X\right)' \qquad (1.10)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}u', \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mathrm{th}\, x}{\mathrm{ch}\, x}u$$

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}v' - \frac{\mathrm{th}\, x}{\mathrm{ch}\, x}v - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 x}w$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\left(\frac{2}{\mathrm{ch}\, x}v' - \mathrm{th}\, x\, w' - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}w + w'' - 2\frac{\mathrm{th}\, x}{\mathrm{ch}\, x}v\right) \qquad (1.11)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\left(\mathrm{th}\, x\, w' - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}w\right)$$

$$\tau = -2\frac{\mathrm{th}\, x}{\mathrm{ch}^3 x}u$$

Соотношения между деформациями и напряжениями

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \quad S = B\frac{1-\sigma}{2}\omega \qquad \left(B = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\right)$$

$$G_1 = -D\left[(\chi_1 + \sigma\chi_2) - \frac{1+\sigma}{2\,\mathrm{ch}^2 x}\omega\right] \qquad \left(D = B\frac{h^2}{3}\right)$$

$$G_2 = -D\left[(\chi_2 + \sigma\chi_1) - \frac{1+\sigma}{2\,\mathrm{ch}^2 x}\omega\right] \qquad (1.12)$$

$$H_1 = D\left[(1-\sigma)\tau + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}(\varepsilon_1 - \sigma\varepsilon_2)\right]$$

$$H_2 = -D\left[(1-\sigma)\tau + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}(\varepsilon_2 - \sigma\varepsilon_1)\right]$$

Здесь $2h$ — толщина оболочки, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона.

Уравнения (1.3) — (1.10) составляют систему для определения T_1, T_2, S, G_1, G_2, H, N_1, N_2.

Заметим, что решить такую задачу по безмоментной теории нельзя. На самом деле по этой теории имеем два уравнения для S и лишь одно для T_1 и T_2:

$$T_1' + \mathrm{th}\, x\,(T_1 - T_2) = -\mathrm{ch}\, x\, X$$

$$S_1' + 2\,\mathrm{th}\, x\, S = -\mathrm{ch}\, x\, Y \qquad (1.13)$$

$$\frac{2}{\mathrm{ch}\, x}S = -\mathrm{ch}\, x\, Z$$

Легко заметить, что система (1.3) — (1.10), построенная в рамках общей теории, распадается на подсистемы для отдельных групп неизвестных.

§ 2. Уравнения (1.4) и (1.5) определяют S и N_1. Исключая из них S, получаем

$$\operatorname{ch} x N_1'' + 4 \operatorname{sh} x N_1' + 3 \operatorname{ch} x N_1 = 2 \operatorname{ch} x Y - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} [\operatorname{ch}^4 x Z]' \tag{2.1}$$

а поскольку левую часть можно написать в виде

$$(\operatorname{ch} x N_1)'' + 2 (\operatorname{sh} x N_1)'$$

то следует

$$\operatorname{ch} x N_1' + 3 \operatorname{sh} x N_1 = \int \left[2 \operatorname{ch} x Y - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} (\operatorname{ch}^4 x Z)' \right] dx \tag{2.2}$$

Интегрируя это линейное уравнение (взяв пока $Y = Z = 0$) и воспользуясь потом уравнением (1.5), получаем общее решение:

$$S = 2 f_1 \frac{x \operatorname{th} x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} + f_2 \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad N_1 = 2 f_1 \left(\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} + \frac{x}{\operatorname{ch}^3 x} \right) + f_2 \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x} \tag{2.3}$$

где f_1, f_2 — произвольные постоянные.

§ 3. Уравнения (1.7) и (1.9) образуют подсистему для G_1 и G_2. Введем обозначения

$$G_1 - G_2 = G^\times, \qquad \operatorname{ch} x N_1 = \alpha_1, \qquad \frac{(1+\sigma) h^2}{3 \operatorname{ch}^2 x} (S' + 2 \operatorname{th} x S) = \alpha_2 \tag{3.1}$$

Легко установить, что

$$G^{\times\prime} + 2 \operatorname{th} x G^\times = (1 - \sigma) \alpha_1 - \alpha_2 \tag{3.2}$$

Отсюда $G^\times$ определяется квадратурами. Имеем

$$G^\times = \frac{1-\sigma}{\operatorname{ch}^2 x} \int \operatorname{ch}^2 x \, \alpha_1 \, dx - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \int \operatorname{ch}^2 x \, \alpha_2 \, dx \tag{3.3}$$

Если воспользоваться уравнением (1.4) и пренебречь членом типа h/R (т. е. типа $h/\operatorname{ch}^2 x$) по сравнению с единицей (см. [2]), то можно записать

$$G^\times = \frac{1-\sigma}{\operatorname{ch}^2 x} \int \operatorname{ch}^3 x N_1 dx + \frac{(1+\sigma) h^2}{3 \operatorname{ch}^2 x} \int \operatorname{ch} x Y dx \tag{3.4}$$

Если взять нужные квадратуры (считая опять $Y = 0$) и соответствующим образом выбрать новые произвольные постоянные, то общее решение можно получить в виде (3.5)

$$G_1 = f_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 x + \frac{x^2}{2 \operatorname{ch}^2 x} + x \operatorname{th} x \right) + \frac{f_2}{2} \left(\operatorname{th} x + \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} \right) + \frac{f_3}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + f_4 +$$
$$+ \sigma \left[f_1 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 x - \frac{x^2}{2 \operatorname{ch}^2 x} + x \operatorname{th} x \right) + \frac{f_2}{2} \left(\operatorname{th} x - \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} \right) - \frac{f_3}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + f_4 \right]$$

$$G_2 = f_1 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 x - \frac{x^2}{2 \operatorname{ch}^2 x} + x \operatorname{th} x \right) + \frac{f_2}{2} \left(\operatorname{th} x - \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} \right) - \frac{f_3}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + f_4 +$$
$$+ \sigma \left[f_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 x + \frac{x^2}{2 \operatorname{ch}^2 x} + x \operatorname{th} x \right) + \frac{f_2}{2} \left(\operatorname{th} x + \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} \right) + \frac{f_3}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + f_4 \right]$$

Полученные результаты позволяют упростить формулы (1.12) для G_i. На самом деле, если вставить выражения для G_i и S в эти формулы, оказывается, что член от S имеет порядок члена от G_i, умноженного на $(h / \mathrm{ch}^2 x)^2$. Следовательно, в рассматриваемой задаче можно принять

$$G_1 = -D(\chi_1 + \sigma\chi_2), \qquad G_2 = -D(\chi_2 + \sigma\chi_1) \tag{3.6}$$

Для общего случая минимальных поверхностей можно доказать, что вариант (1.12) соотношений между деформациями и напряжениями не обеспечивает соблюдения теоремы Кирхгофа.

Но если G_i дается формулами (3.6), теорема Кирхгофа соблюдена и, следовательно, единственность решения обеспечена [3].

§ 4. Введем обозначения

$$T_1 - T_2 = T^\times, \qquad \frac{N_2}{\mathrm{ch}\, x} = N_2^\times, \qquad \mathrm{ch}^2 x H = H^\times \tag{4.1}$$

Тогда уравнения (1.3), (1.6), (1.8) и (1.10) можно представить в виде

$$\begin{gathered} T_1' + \mathrm{th}\, x T^\times = N_2^\times - \mathrm{ch}\, x X \\ H^{\times\prime} = -\mathrm{ch}^4 x N_2^\times \\ [T^\times - (1-\sigma) T_1]' = \frac{3(1+\sigma)}{h^2} H^{\times\prime} \\ T^{\times\prime\prime} + 2(\mathrm{th}\, x T^\times)' + \frac{6(1+\sigma)}{h^2} \frac{H^\times}{\mathrm{ch}^2 x} = (1-\sigma) N_2^{\times\prime} - (1-\sigma)(\mathrm{ch}\, x X)' \end{gathered} \tag{4.2}$$

Отсюда

$$T_1' + \mathrm{th}\, x T^\times + \mathrm{ch}\, x X = N_2^\times = -\frac{1}{\mathrm{ch}^4 x} H^{\times\prime} = -\frac{1}{\mathrm{ch}^4 x} \frac{h^2}{3(1+\sigma)} [T^\times - (1-\sigma) T_1]' \tag{4.3}$$

Если взять первый и последний члены этого равенства, ясно, что в последнем надо пренебречь T_1'. Отсюда

$$N_2 = -\frac{1}{3(1+\sigma)} \frac{h^2}{\mathrm{ch}^3 x} T^{\times\prime} \tag{4.4}$$

$$H = \frac{h^2}{3(1+\sigma)} \frac{T^\times}{\mathrm{ch}^2 x} - \frac{c_3}{\mathrm{ch}^2 x} \tag{4.5}$$

$$T_1' = -\mathrm{th}\, x T^\times - \frac{1}{3(1+\sigma)} \frac{h^2}{\mathrm{ch}^4 x} T^{\times\prime} - \mathrm{ch}\, x X \tag{4.6}$$

где c_3 — произвольная постоянная.

Исключая сейчас $H^\times$ и $N_2^\times$ из четвертого уравнения (4.2) и пренебрегая по той же причине, что и в § 3, на этот раз членом в $N_2^{\times\prime}$, получим

$$\mathrm{ch}^2 x T^{\times\prime\prime} + \mathrm{sh}\, 2x T^{\times\prime} + 4T^\times = \frac{6(1+\sigma)}{h^2} c_3 - (1-\sigma)(\mathrm{ch}\, x X)' \tag{4.7}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$\mathrm{ch}^2 x T^{\times\prime\prime} + \mathrm{sh}\, 2x T^{\times\prime} + 4T^\times = 0 \tag{4.8}$$

Заметим, что частное решение, соответствующее члену с c_3 в правой части (4.7), есть

$$T^{\times(3)} = 3\,\frac{1+\sigma}{2h^2}\,c_3 \tag{4.9}$$

а частное решение, соответствующее второму члену в правой части (4.7), если $X \neq 0$, можно найти методом вариации произвольных постоянных из общего решения.

Рассмотрим сначала следующие два предельных случая:

1) когда x очень мало, так что можно принимать

$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{th} x \approx x, \qquad \operatorname{ch} x \approx 1$$

2) когда x достаточно велико, так что можно принимать

$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\,e^x, \qquad \operatorname{th} x \approx 1$$

Будем обозначать величины, относящиеся к первому случаю, индексом $\circ$, а те, которые относятся ко второму, индексом ∞.

§ 5. В случае малых x уравнение (4.8) запишется в виде

$$T_\circ^{\times\prime\prime} + 2xT_\circ^{\times\prime} + 4T_\circ^{\times} = 0 \tag{5.1}$$

Подстановка $\xi = 2x$, $\eta(\xi) = T_\circ^\times(x)$ дает уравнение

$$\eta'' + \xi\eta' + 2\eta = 0 \tag{5.2}$$

(штрихом обозначено сейчас дифференцирование по ξ), для которого известны квадратуры (см. [4], стр. 545); таким образом, получим, добавляя $T^{\times(3)}$ согласно (4.9)

$$T_\circ^\times(x) = xe^{-x^2}\left[c_1 + c_2\int e^{x^2}\,dx\right] - \frac{c_2}{2} + \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 \tag{5.3}$$

Очевидно, последовательность требует пренебречь систематически x^2 по сравнению с единицей, и тогда

$$T_\circ^\times = c_1 x - \frac{c_2}{2} + \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 \tag{5.4}$$

Приближение оказывается достаточно хорошим для $x < 0.3$. Отсюда

$$\begin{aligned} T_{\circ 1} &= \frac{c_2}{4}\,x^2 - \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 x^2 + c_4 \\ T_{\circ 2} &= -\,c_1 x + \frac{c_2}{2} - \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 + c_4 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} H_\circ &= \frac{h^2}{3(1+\sigma)}\left(c_1 x - \frac{c_2}{2}\right) - \frac{c_3}{2} \\ N_{\circ 2} &= -\,\frac{h^2}{3(1+\sigma)}\,(c_1 + 2c_2 x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

где c_1, c_2, c_4 — произвольные постоянные.

Легко заметить, что в $H_\circ$ члены в c_1 и c_2 пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими членами в $T_{\circ 2}$, и что $N_{\circ 2}$ пренебрежимо мало по сравнению с $T_{\circ 2}$. Что касается $T_{\circ 1}$ и $T_{\circ 2}$, то они не сравнимы между собой (см. § 6).

§ 6. В случае больших x уравнение (4.8) запишется

$$T_\infty^{\times\prime\prime} + 2T_\infty^{\times\prime} + 16e^{-2x} T_\infty^\times = 0 \tag{6.1}$$

Подстановка $\xi = e^{-2x}$, $\eta(\xi) = T_\infty^\times(x)$ дает

$$\xi\eta'' + 4\eta = 0 \tag{6.2}$$

Далее, преобразование $\xi = {}^1/_{16}\, t^2$, $\eta(\xi) = t\,\theta(t)$ приводит к уравнению

$$t^2\theta'' + t\theta' + (t^2 - 1)\,\theta = 0 \tag{6.3}$$

т. е. задача решается через функции Бесселя первого индекса.

Добавляя $T^{\times(3)}$ согласно (4.9), имеем

$$T_\infty^\times(x) = 4e^{-x}\left[c_1 J_1(4e^{-x}) + c_2 N_1(4e^{-x})\right] + \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 \tag{6.4}$$

где $N_1(4e^{-x})$ — функция Неймана.

Это решение годится для $x > 4$ с достаточно хорошим приближением. Если писать явные выражения для $T_{\infty 1}$, $T_{\infty 2}$, H_∞, $N_{\infty 2}$, то появятся еще функции $J_0(4e^{-x})$ и $N_0(4e^{-x})$.

Так как они все являются функциями от $4e^{-x}$, а для $4 < x < \infty$ имеем $0.072 > 4e^{-x} > 0$, то в этом интервале изменений x можно с незначительной погрешностью взять

$$\begin{aligned} J_0(4e^{-x}) &= 1, & N_0(4e^{-x}) &= -\frac{2}{\pi}(x - 1.27)\\ J_1(4e^{-x}) &= 2e^{-x}, & N_1(4e^{-x}) &= -\frac{e^x}{2\pi} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Тогда получаем

$$T_\infty^\times = -\frac{2}{\pi}\,c_2 + \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 \tag{6.6}$$

$$T_{\infty 1} = -c_1 + \frac{2}{\pi}\,c_2(x - 1.27) - \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3 x + c_4 \tag{6.7}$$

$$T_{\infty 2} = -c_1 + \frac{2}{\pi}\,c_2(x - 0.27) - \frac{3(1+\sigma)}{2h^2}\,c_3(1 + x) + c_4 \tag{6.8}$$

$$H_\infty = \frac{16h^2}{3(1+\sigma)}\,e^{-3x}\left[2c_1 e^{-x} - \frac{c_2}{2\pi}\,e^x\right] - 2e^{-2x}c_3 \tag{6.9}$$

$$N_{\infty 2} = \frac{128h^2}{3(1+\sigma)}\,e^{-5x}\left[c_1 - \frac{2}{\pi}\,c_2(x - 1.27)\right] \tag{6.10}$$

Легко заметить, что H_∞ и $N_{\infty 2}$ пренебрежимо малы, а $T_{\infty 1}$ и $T_{\infty 2}$ примерно равны, чего и следовало ожидать, если сравнить с близким случаем круглой пластинки (см. § 5).

Если предположить x достаточно большим, чтобы можно было пренебрегать единицей по сравнению с ним, и упростить все выражения для усилий, моментов и перерезывающих сил, как это было сделано выше, то, полагая

$$f_1 = -2Da_1, \qquad f_3 = 2Da_3, \qquad f_4 + \frac{f_2}{2} = 2D\,(a_1 \ln 2 - a_2) \tag{6.11}$$

получим общее решение задачи о круглой пластинке в симметричных условиях, соответствующее решению

$$w = a_1 r^2 \ln r + a_2 r^2 + a_3 \ln r + a_4 \tag{6.12}$$

уравнения изгиба тонких пластинок.

§ 7. Рассмотрим теперь уравнение (4.8) в общем случае. Преобразование

$$u = \tfrac{1}{2}(\operatorname{th} x + 1), \qquad V(u) = T^{\times}(x) \tag{7.1}$$

которое преобразует особые точки уравнения (4.8) в точки $(0,\ 1,\ \infty)$, приводит к уравнению

$$u(u-1)V'' - 4V = 0 \tag{7.2}$$

т. е. к особому случаю ($\gamma = 0$) гипергеометрического уравнения. Первое независимое решение (7.2) будет

$$V_1 = \sum_0^\infty a_k u^{k+1} \tag{7.3}$$

где

$$a_k = -\frac{4}{k(k+1)} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \quad \text{или} \quad a_k = \frac{(k-1)k-4}{k(k+1)} a_{k-1} \tag{7.4}$$

Из последней формулы непосредственно вытекает, что ряд (7.3) сходится абсолютно и равномерно при $|u| < 1$, т. е. для всех конечных x.

Между прочим, это первое решение можно получить и при помощи гипергеометрического ряда, если сделать замену функции $V = uW$.

Если известно одно независимое решение, то легко получить второе (см. [5], т. II, § 24). Оно имеет вид:

$$V_2^* = 4 \ln u\, V_1 + \sum_1^\infty b_k^* u^k \tag{7.5}$$

где ряд $b_0^* + b_1^* u + b_2^* u^2 + \cdots$ сходится для $|u| < 1$.

Вводя (7.5) в уравнение (7.2), имеем

$$b_0^* = -a_0, \qquad b_2^* = -2b_1^* + 14a_0$$

и вообще

$$b_{k+1}^* = \frac{k^2-k-4}{k(k+1)} b_k^* + 8\,\frac{k^2+4k+2}{k^2-k-4}\,\frac{a_k}{k(k+1)} \tag{7.6}$$

Можно заключить, что члены в b_1^* повторяют решение V_1 и, следовательно, в качестве второго решения следует взять

$$V_2 = V_2^* - b_1^* V_1 \tag{7.7}$$

Очевидно, сходимость полученных рядов с точки зрения расчетов ухудшается по мере удаления от $u = 0$. Поскольку это решение понадобится лишь в интервале $0.3 < x < 4$, т. е. для $0.65 < u < 1$, следует найти решение уравнения (7.2) вблизи особой точки $u = 1$.

Это можно сделать, например, путем применения очевидного преобразования $1 - u' = u$. Можно проверить, что при этом коэффициенты уравнения не меняются.

Таким образом, можно записать

$$V_3 = \sum_0^\infty a_k (1-u)^{k+1}$$
$$V_4 = 4\ln(1-u)\sum_0^\infty a_k (1-u)^{k+1} + \sum_0^\infty b_k^* (1-u)^k - b_1^* V_3 \tag{7.8}$$

где a_k и b_k^* даются формулами (7.4) и (7.6), и пользоваться этим решением в нужном нам интервале. Чтобы перейти от решений уравнения (7.2) к нужным нам выражениям для T_1, T_2, H, N_2, сделаем в формулах (4.4), (4.5) и (4.6) преобразование (7.1). Получим

$$H(u) = \frac{4h^2}{3(1+\sigma)} u(1-u)V - 4u(1-u)c_3 \tag{7.9}$$

$$N_2(u) = -\frac{16h^2}{3(1+\sigma)} u(1-u)\sqrt{u(1-u)}\frac{dV}{du} \tag{7.10}$$

Кроме того, если предположить [6], что

$$\frac{dT^\times}{dx} \sim h_0^{-r}\, T^\times \qquad \left(h_0 = \frac{Rh}{a_{11}}\,,\ r \leqslant \tfrac{1}{2}\right) \tag{7.11}$$

(что дает максимальное значение возрастания функции в дифференцировании), то

$$\frac{dT^\times}{dx} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}\, T^\times \tag{7.12}$$

Тогда очевидно, что в правой части (4.6) для $X = 0$ можно оставить лишь член в $T^\times$, т. е. записать

$$T_1' = -\operatorname{th} x T^\times \tag{7.13}$$

(случай малых x уже разобран). Отсюда

$$T_1(u) = \frac{1}{2}\int \frac{1-2u}{u(1-u)} V(u)\,du \tag{7.14}$$

Введем обозначения

$$U_0 = V, \qquad U_{n+1} = \frac{d}{du}U_n, \qquad U_{-n-1} = \int U_{-n}du \tag{7.15}$$

Легко видеть, что

$$u(u-1)U_{n+2} + n(2u-1)U_{n+1} + (n^2 - n - 4)U_n = 0 \tag{7.16}$$

т. е. существует линейное соотношение, связывающее между собой три последовательных производных или интегралов от V. Например,

$$\int V\,du = \frac{1}{2}u(u-1)\frac{dV}{du} + \left(\frac{1}{2} - u\right)V \tag{7.17}$$

Следовательно, можно получить все функции U_n при помощи двух из них или прямо, замечая, что (7.16) есть не что иное, как гипергеометрическое уравнение для U_n, получить их по известным формулам [7].

Очевидно, вопрос для N_2, так же, как и для H, исчерпан. Что касается T_1, то (7.14) и (7.17) дают

$$T_1(u) = \frac{1}{2}V + \int \frac{U_{-1}}{u(1-u)}\,du \tag{7.18}$$

или

$$T_1(u) = \frac{1}{2}V + \int \frac{U_{-1}}{u}\,du + \sum_{n=0}^{\infty} \int u^n U_{-1} du \tag{7.19}$$

Если предположить, что

$$\int u^n U_m du = \sum_{i=0}^{n} a_i u^{n-i} U_{m-i-1} \tag{7.20}$$

то, определив коэффициенты a_i, получим

$$\begin{aligned} T_1(u) &= \frac{1}{2}V + \int \frac{U_{-1}}{u}\,du + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i i!}{(1-u)^{i+1}} U_{-i-2} \\ T_2(u) &= -\frac{1}{2}V + \int \frac{U_{-1}}{u}\,du + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i i!}{(1-u)^{i+1}} U_{-i-2} \end{aligned} \tag{7.21}$$

Заметим, что ряд в (7.21) можно оборвать где угодно (т. е. взять частную сумму абсолютно и равномерно сходящегося двойного ряда); интеграл в этой формуле нужно разложить в ряд и интегрировать по членно.

§ 8. Соотношения (1.11) позволяют вывести выражения для перемещений u, v, w, поскольку усилия и моменты, следовательно, и деформации известны.

Второе, пятое и третье соотношения (1.11) соответственно дают

$$u = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{th} x}\varepsilon_2 \tag{8.1}$$

$$w = \operatorname{th} x \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{th}^2 x}\chi_2\,dx - \frac{f_6}{D}\operatorname{th} x \qquad (f_6 = \mathrm{const}) \tag{8.2}$$

$$v = 2\operatorname{ch} x \int \frac{w}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx + \operatorname{ch} x \int \omega\,dx - \frac{f_5}{D}\operatorname{ch} x \qquad (f_5 = \mathrm{const}) \tag{8.3}$$

Поворот края оболочки γ_1 (см. [8]) будет

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}v - \frac{1}{\operatorname{ch} x}w' \tag{8.4}$$

Очевидно, v, w и γ_1 можно найти точно, в квадратурах; что касается u, вид решения зависит от интервала, в котором лежит x (если интервал включает точку $x = 0$, нужно дополнительное исследование). Таким образом, получим

$$\begin{aligned} w = -\frac{1}{D}\{&\tfrac{1}{12}f_1[9(1 - x\operatorname{th} x) - 6\operatorname{ch}^2 x + 3x\operatorname{sh} 2x + 6x^2 - 2x^3\operatorname{th} x] + \\ &+ \tfrac{1}{8}f_2(4x + \operatorname{sh} 2x - 2x^2\operatorname{th} x) + \tfrac{1}{2}f_3(1 - x\operatorname{th} x) + \\ &+ \tfrac{1}{2}f_4(\operatorname{ch}^2 x + 3x\operatorname{th} x - 3) + f_6\operatorname{th} x\} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Выражения для v и w будут

$$v = -\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{12} f_1\left(-12x\operatorname{ch}x + 9\operatorname{sh}x + 6x^2\operatorname{sh}x + 9\frac{x}{\operatorname{ch}x} + 2\frac{x^3}{\operatorname{ch}x}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{4} f_2\left(2x\operatorname{sh}x + \frac{x^2}{\operatorname{ch}x}\right) + \frac{1}{2} f_3\left(\operatorname{sh}x + \frac{x}{\operatorname{ch}x}\right) + f_4\left(x\operatorname{ch}x - \frac{3}{2}\operatorname{sh}x - \frac{3}{2}\frac{x}{\operatorname{ch}x}\right) +$$
$$\left. + f_5\operatorname{ch}x - \frac{f_6}{\operatorname{ch}x}\right\} - \frac{1+\sigma}{2Eh}\left[2f_1\left(\operatorname{sh}x + \frac{x}{\operatorname{ch}x}\right) + \frac{f_2}{\operatorname{ch}x}\right] \tag{8.6}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{2} f_1\left(2x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x - \frac{x}{\operatorname{ch}x}\right) + \frac{1}{4} f_2\left(2\operatorname{ch}x + \frac{1}{\operatorname{ch}x}\right) + \right.$$
$$\left. + f_4\left(\operatorname{sh}x + \frac{x}{\operatorname{ch}x}\right) + f_5\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right\} + \frac{1+\sigma}{2Eh}\left[2f_1\left(\frac{\operatorname{th}x}{\operatorname{ch}x} + \frac{x}{\operatorname{ch}^3x}\right) + f_2\frac{1}{\operatorname{ch}^3x}\right] \tag{8.7}$$

Чтобы установить граничные условия в усилиях и моментах вдоль винтовых линий, нужно (см. [9], § 332) заменить пять функций T_1, S, N_1, H, G_1 четырьмя выражениями $T_1 + H\operatorname{sch}^2 x$, S, N_1, G_1 (соответствующий угол $\varphi = 45°$; $R_1 = -R_2 = +\operatorname{ch}^2 x$ и R' вдоль асимптотической линии равен ∞).

Для нахождения десяти произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 мы располагаем лишь восемью условиями по четыре на каждом краю. Поэтому надо ввести некоторое упрощающее предположение. Пусть ненулевая перерезывающая сила N_2 действует на двух смежных элементах оболочки, вырезанных вдоль прямолинейных образующих и удаленных друг от друга. Ожидаемый поворот двух полос сделает невозможным их соединение после деформации с соблюдением граничных условий. Следовательно, нужно взять $N_2 \equiv 0$, т. е. $c_1 = c_2 = 0$ [см. (5.6), (6.10) и (7.10)].

Отсюда видно, что усилия, моменты и перемещения распадаются на две группы: с одной стороны, T_1, T_2, H, u, зависящие от c_3 и c_4, а с другой стороны, S, N_1, G_1, G_2, v, w, γ_1, зависящие от f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. Каждый механически возможный вариант граничных условий дает именно нужное количество соотношений, чтобы определить отдельно нужные постоянные. Задача решается как бы отдельно для каждой из указанных двух групп.

Очевидно, для решения конкретных задач следует найти частные решения для случая ненулевых внешних сил; это делается очень легко для первых двух подсистем; что касается третьей подсистемы, то нужно пользоваться методом вариации произвольных постоянных.

§ 9. В диссертации Ю. Н. Работнова 1941 г. и в статье В. З. Власова [10] даются два уравнения так называемого типа Работнова-Власова, решением которых исчерпывается вопрос о поведении оболочек в тех зонах, где напряжения от усилий T того же порядка величины, что и напряжения от моментов M. В статье [6] предполагается, что напряженное состояние, в том числе для оболочек отрицательной кривизны, можно разложить на три составляющих:

$$T \sim \frac{M}{h_0^2}, \qquad T \sim \frac{M}{h_0}, \qquad T \sim M \tag{9.1}$$

Можно показать, что второе из них требует выполнения соотношения типа

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \sim h_o^{-r} f \qquad (r > 0) \tag{9.2}$$

На основании такого предположения там же предлагаются упрощенные уравнения, в том числе и для краевого эффекта вдоль асимптотических линий для оболочек отрицательной кривизны.

Исследуя общий случай оболочек, очерченных по минимальным поверхностям, можно прийти к выводу, что метод разложения напряженного состояния сомнителен для них, что уравнения Работнова-Власова не обоснованы хотя бы для краевого эффекта вдоль асимптотических линий для достаточно больших значений q в (9.4) (см. ниже). Это соответствует тому, что для оболочек отрицательной кривизны система уравнений безмоментной теории есть система гиперболического типа и для нее нельзя ставить задачу Дирихле.

Пример геликоидальной оболочки подтверждает эту точку зрения На самом деле, мы уже видели, что по мере увеличения x величины

$$S_\infty \to 0, \ H_\infty \to 0, \ N_{\infty 1} \to 0, \ N_{\infty 2} \to 0$$

а это не укладывается в рамки метода, требующего пренебрегать, например, H по сравнению с T и в то же время G по сравнению с S [см. условия первое и третье (9.1)].

Далее, например, мы имеем из (6.7) и (6.8)

$$T_{\infty 1}' = T_{\infty 2}' = \frac{2}{\pi} c_2 - \frac{3(1+\sigma)}{2h^2} c_3 \tag{9.3}$$

Согласно [6] следовало бы пренебречь $T_{\infty 1}$ и $T_{\infty 2}$ по сравнению с этими производными, что явно не соответствует действительности. Связь между T и T' указывает на невыполнение соотношения (9.2) и, следовательно, и второго соотношения (9.1).

Надо заметить, что изученный нами случай соответствует дополнению гипотезы (9.2) гипотезой типа

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \sim h_o^{q} f \qquad (q \to +\infty) \tag{9.4}$$

а статья [6] этого варианта не касается (см. еще [11]). Следовательно, пример геликоидальной оболочки заставляет отказаться от попыток прямого распространения теории разложения напряженного состояния для оболочек отрицательной кривизны, отнесенных к асимптотическим линиям, по крайней мере, если взять $q > 0$ достаточно большим в (9.4) и оставлять для r в (9.2) положительные значения.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. Н. Работнова, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Поступила 3 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Некоторые решения безмоментной теории оболочек. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946.
2. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. ПММ, т. VII, вып. 5, 1943.
3. Гольденвейзер А. Л. О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам. ПММ, т. VIII, вып. 1, 1944.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. иностр. лит., 1951.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГТТИ, 1951.
6. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
7. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, 1951.
8. Гольденвейзер А. Л. Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Лява. Сборник «Пластинки и оболочки». Госстройиздат, 1939.
9. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
10. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек. ПММ, т. VIII, вып. 2, 1944.
11. Гольденвейзер А. Л. Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.