

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

В. И. Феодосьев

(Москва)

Задача об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления, давно привлекает внимание исследователей. Эта задача относится к числу немногих, где критическая нагрузка, подсчитанная по классической теории устойчивости упругих систем, находится в резком количественном противоречии с нагрузками, полученными из эксперимента.

Известно, что различные исследователи, ставившие опыты по определению критического давления для сферической оболочки, неизменно получали критические значения  $\sigma_*$ , лежащие в пределах от  $0.09 Eh/R$  до  $0.16 Eh/R$ , где  $h$  — толщина оболочки,  $R$  ее радиус:

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

В то же время формула Цолли-Лейбензона<sup>[1, 2]</sup> дает значение

$$\sigma_{*1} = 0.6 \frac{Eh}{R} \quad (1)$$

В настоящее время можно считать установленным, что причиной столь большого несоответствия является для сферической оболочки наличие форм равновесия соседних с начальной формой и существующих при напряжениях, меньших, чем (1). Для перехода в эту соседнюю форму оболочек необходимо некоторое малое, но конечное отклонение, в то время как при выводе формулы (1) предполагалось, что это отклонение может быть сделано сколь угодно малым.

Короче говоря, сферическая оболочка при  $\sigma < \sigma_{*1}$  устойчива в малом, но неустойчива в большом. Вопрос о том, где находится нижняя граница устойчивости, т. е. какова величина того напряжения  $\sigma_{*2}$ , после которого оболочка может потерять устойчивость в большом, рассматривался в ряде работ.

Впервые эта задача была поставлена Карманом и Хсусе-Шен-Тзяном<sup>[3]</sup>. При решении авторами, однако, были допущены очевидные ошибки, отмеченные в работе Фридрихса<sup>[4]</sup>, который по исправлению этих ошибок получил значение

$$\sigma_{*2} = 0.136 \frac{Eh}{R}$$

Однако в этой работе имеются неувязки в граничных условиях для зоны местного вмятия, на что было указано Х. М. Муштари и Р. Г. Суркиным [5].

Х. М. Муштари и Р. Г. Суркин определяли критическое напряжение энергетическим методом, задаваясь несколькими функциями для формы местного вмятия при потере устойчивости. Ими установлено, что из рассматривавшихся ими функций наименьшее значение для критического напряжения  $\sigma_{*2}$  дает функция

$$w = Ce^{-n\rho}(1 - 0.7n\rho)$$

где  $w$  — местный прогиб,  $\rho$  — безразмерный радиус, измеряемый от центра вмятины,  $n$  и  $C$  — произвольные параметры.

Значение  $\sigma_{*2}$  оказалось при этом равным

$$\sigma_{*2} = 0.17 \frac{Eh}{R}$$

Несколько позже нами [6] была сделана попытка определить  $\sigma_{*2}$  методом Галеркина в предположении

$$w = Ce^{-n\rho}(1 - \rho^2)\rho$$

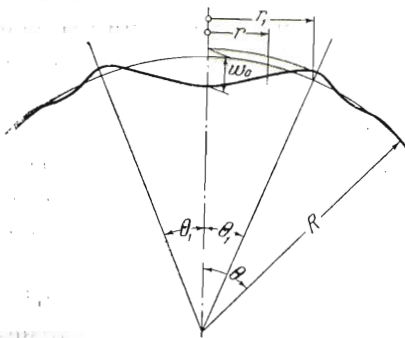
Эта попытка оказалась, однако, неудачной. Критическое напряжение, полученное в этом предположении, оказалось больше полученных ранее:

$$\sigma_{*2} = 0.457 \frac{Eh}{R}$$

В одной из личных бесед Л. И. Балабух впервые высказал весьма правдоподобное предположение, что  $\sigma_{*2}$  должно быть отрицательным и что, таким образом, формы равновесия сферической оболочки с местной упругой вмятиной существуют и при давлении, равном нулю.

Если стать на эту точку зрения, то погоня за отысканием наименьшего значения  $\sigma_{*2}$  становится иллюзорной, а сопоставление полученного  $\sigma_{*2}$  с тем напряжением, при котором происходит хлопок при эксперименте, как это делается в работах [3, 5], оказывается беспредметным.

В настоящей работе мы намерены показать, что это именно так и что во всех предыдущих работах  $\sigma_{*2}$  оказывалось больше нуля только потому, что функция перемещений в зоне местного вмятия выбиралась недостаточно удачно. Решать задачу будем методом Галеркина, рассматривая местную вмятину как пологую оболочку, имеющую упругое контурное защемление (фиг. 1).



Фиг. 1

Через  $r_1$  обозначим радиус, на котором угол поворота дуги меридиана  $\vartheta$  обращается первый раз после центра в нуль.

Будем считать, что за пределами круга радиуса  $r_1$  изгиб сферической оболочки полностью подчиняется законам краевого эффекта.

Таким образом, вся нелинейность задачи, по нашему предположению, укладывается в особенности поведения оболочки в пределах круга радиуса  $r_1$ , пока нам не известно.

Положим, что угол  $\theta_1$  мал настолько, чтобы было допустимым принять величину  $\theta_1^2$  пренебрежимой по сравнению с единицей. Тогда в пределах угла  $\theta_1$  к оболочке можно применить следующие уравнения [7]:

$$\rho \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} = \vartheta \left( \theta_1 \rho + \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho} = -\lambda\psi(\theta_1\rho + \vartheta) + \nu\rho^2 \quad (3)$$

где

$$\rho = \frac{r}{r_1}, \quad \psi = -\frac{T\rho}{Eh}, \quad \lambda = 12(1-\mu^2)\frac{r_1^2}{h^2}, \quad \nu = \lambda\frac{pr_1}{2Eh}$$

Здесь  $T_1$  — радиальное растягивающее усилие,  $\vartheta$  — угол поворота дуги меридиана. Примем

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho) \quad (4)$$

Подставляя  $\vartheta$  в уравнение (2), после двукратного интегрирования получим

$$\psi = \frac{C^2}{96}(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3) + \frac{C\theta_1}{24}(\rho^5 - 3\rho^3) + B\rho + B_1\frac{1}{\rho} \quad (5)$$

Из условия ограниченности  $T_1$  в центре вмятины следует, что  $B_1 = 0$ . Постоянную  $B$  определим несколько позже.

Согласно (4) и (5) определим на контуре (при  $\rho = 1$ ) следующие параметры:

радиальный изгибающий момент

$$(M_1)_{\rho=1} = -\frac{D}{r_1} \left( \frac{d\vartheta}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta}{\rho} \right)_{\rho=1} = -\frac{2D}{r_1} C$$

радиальное усилие

$$(T_1)_{\rho=1} = -Eh \left( \frac{\psi}{\rho} \right)_{\rho=1} = -Eh\psi_1 \quad (\psi_1 = \psi_{\rho=1})$$

перерезывающую силу

$$Q_{\rho=1} = -\frac{Pr_1}{2} - T_1(\theta_1\rho + \vartheta)_{\rho=1} = -\frac{Pr_1}{2} + Eh\psi_1\theta_1$$

окружное удлинение

$$(\varepsilon_2)_{\rho=1} = -\frac{d\psi}{d\rho} + \mu \frac{\psi}{\rho} \Big|_{\rho=1} = -\frac{d\psi_1}{d\rho} + \mu\psi_1$$

Теперь рассмотрим краевой эффект оболочки, расположенной вне круга радиуса  $r_1$ . Здесь, как известно,

$$\vartheta = Ae^{-k(\theta-\theta_1)} \sin k(\theta-\theta_1) \quad \left( k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)VR/h} \right)$$

Функция  $\vartheta$  обращается в нуль при  $\theta = \theta_1$ ; при этом имеем для изгибающего момента

$$M_1 = -\frac{D}{R} \frac{d\vartheta}{d\theta} = \frac{Dk}{R} A e^{-k(\theta - \theta_1)} [\sin k(\theta - \theta_1) - \cos k(\theta - \theta_1)]$$

$$(M_1)_{\theta = \theta_1} = -\frac{Dk}{R} A$$

перерезывающей силы

$$Q = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} = \frac{D}{R^2} 2k^2 A e^{-k(\theta - \theta_1)} \cos k(\theta - \theta_1),$$

$$Q_{\theta = \theta_1} = \frac{D2k^2}{R^2} A$$

радиального растягивающего усилия

$$T_1 = -Q \operatorname{ctg} \theta - \frac{pR}{2}, \quad (T_1)_{\theta = \theta_1} = -\frac{D2k^2}{R^2 \theta_1} A - \frac{pR}{2}$$

окружного удлинения

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) = \frac{1}{Eh} \left[ -\frac{dQ}{d\theta} - \frac{pR}{2} - \mu T_1 \right]$$

$$(\varepsilon_2)_{\theta = \theta_1} = \frac{1}{Eh} \left[ \frac{D}{R^2} 2k^3 A + \mu \frac{D2k^2}{R^2 \theta_1} A - \frac{pR}{2} (1 - \mu) \right]$$

Теперь используем условия сопряжения. Последовательно получаем следующие уравнения:

$$(M_1 = M_1)$$

$$A = C \frac{2}{k} \frac{R}{r_1} \quad (6)$$

$$(T_1 = T_1)$$

$$-Eh \left[ \frac{3}{96} C^2 - \frac{2}{24} C\theta_1 + B \right] = -\frac{D2k^2}{R^2 \theta_1} A - \frac{pR}{2} \quad (7)$$

$$(Q = Q)$$

$$-\frac{pr_1}{2} + Eh\theta_1 \left[ \frac{3}{96} C^2 - \frac{2}{24} C\theta_1 + B \right] = \frac{D2k^2}{R^2} A \quad (8)$$

$$(\varepsilon_2 = \varepsilon_2)$$

$$-\left[ \frac{5}{96} C^2 - \frac{4}{24} C\theta_1 + B \right] + \mu \left[ \frac{3}{96} C^2 - \frac{2}{24} C\theta_1 + B \right] =$$

$$= \frac{1}{Eh} \left[ \frac{D}{R^2} 2k^3 A + \mu \frac{D2k^2}{R^2 \theta_1} A - \frac{pR}{2} (1 - \mu) \right] \quad (9)$$

Как легко заметить, уравнение (8) совпадает с уравнением (7), что является очевидным следствием уравнений равновесия осесимметричных оболочек. Таким образом, уравнение (8) из рассмотрения исключается.

В остальных трех уравнениях неизвестные  $A$ ,  $B$  и  $\theta_1$  должны быть выражены через  $C$ . Получаем

$$B = C \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \frac{pR}{2Eh} - \frac{3}{96} C^2 + \frac{2}{24} C\theta_1 \quad (10)$$

$$C - 4\theta_1 + \frac{16kh^2}{R^2 \theta_1 (1 - \mu^2)} \left( k + \frac{1}{\theta_1} \right) = 0 \quad (11)$$

Подставляем  $B$  согласно (10) в выражение (5),

$$\psi = \frac{C^2}{96} (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) + \frac{C\theta_1}{24} (\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho) + \left( C \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \frac{pR}{2Eh} \right) \rho \quad (12)$$

Подставляем выражения (4) и (12) для  $\vartheta$  и  $\psi$  в уравнение (3)

$$\frac{8C}{\lambda} \rho^2 + \left[ \frac{C^2}{96} (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) + \frac{C\theta_1}{24} (\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho) + \left( C \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \frac{pR}{2Eh} \right) \rho \right] [\theta_1 \rho + C (\rho^3 - \rho)] - \frac{pR\theta_1}{2Eh} \rho^2 = 0$$

и умножая это выражение на  $(\rho^3 - \rho)$ , интегрируем в пределах от нуля до единицы:

$$\begin{aligned} & \frac{C^3}{96} \int_0^1 (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) (\rho^3 - \rho)^2 d\rho + \\ & + C^2 \theta_1 \int_0^1 \left[ \frac{1}{96} (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) (\rho^3 - \rho) \rho + \frac{1}{24} (\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho) (\rho^3 - \rho)^2 \right] d\rho + \\ & + \frac{C\theta_1^2}{24} \int_0^1 (\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho) (\rho^3 - \rho) \rho d\rho + \frac{8C}{\lambda} \int_0^1 (\rho^3 - \rho) \rho^2 d\rho + \\ & + C\theta_1 \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} \int_0^1 (\rho^3 - \rho) \rho^2 d\rho + C \left( C \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \frac{pR}{2Eh} \right) \int_0^1 (\rho^3 - \rho)^2 \rho d\rho = 0 \end{aligned}$$

После интегрирования

$$\begin{aligned} C \left[ -\frac{C^2}{56 \times 32} + \frac{C\theta_1}{4 \times 96} - \frac{\theta_1^2}{15 \times 24} - \frac{2}{3\lambda} - \frac{\theta_1}{12} \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \right. \\ \left. + \frac{C}{24} \frac{4kD}{R^2 \theta_1^2 Eh} + \frac{pR}{2Eh} \frac{1}{24} \right] = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $C = 0$  и

$$\begin{aligned} \frac{pR}{Eh} = \frac{3}{112} C^2 - \frac{C\theta_1}{8} - C \frac{8h^2k}{12(1-\mu^2)R^2\theta_1^2} + \\ + \frac{2\theta_1^2}{15} + \frac{32h^2}{12(1-\mu^2)R^2\theta_1^2} + \frac{16kh^2}{12(1-\mu^2)R^2\theta_1} \quad (13) \end{aligned}$$

Величина  $\theta_1$  связана с  $C$  уравнением (11).

Можно построить кривые, представляющие зависимость величины

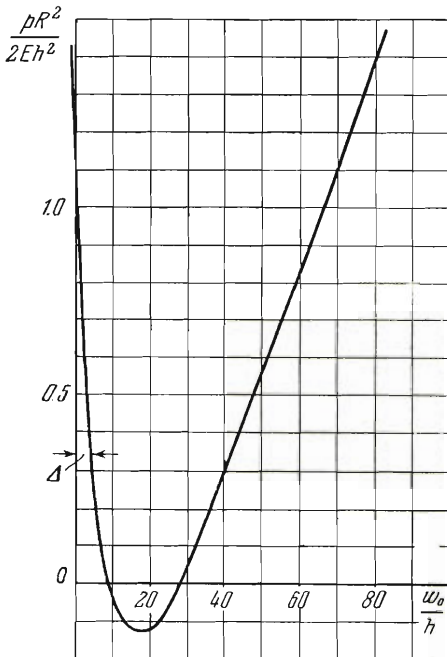
$$\frac{pR^2}{2Eh^2} = \sigma \frac{R}{Eh} \quad (14)$$

от величины

$$\frac{w_0}{h} = \frac{C}{4} \frac{R\theta_1}{h} \quad (15)$$

Порядок построения будет следующим.

Для некоторого отношения  $R_1/h$  зададимся  $\theta_1$ . Из уравнения (11) находим  $C$ , из (15) —  $w_0/h$ , а из (13) и (14) —  $pR^2/2Eh^2$ , что дает нам точку зависимости



$$\frac{pR^2}{2Eh^2} = f\left(\frac{w_0}{h}\right)$$

Эта зависимость практически оказывается неизменной при всех значениях  $R/h$  (именно в связи с этим и была выбрана указанная система координат).

От  $R/h$  зависит только величина  $\theta_1$ .

На фиг. 2 показан вид построенных таким образом графиков зависимостей:

$$\frac{pR^2}{2Eh^2} = f\left(\frac{w_0}{h}\right), \quad \theta_1 = f\left(\frac{R}{h}, \frac{w_0}{h}\right)$$

При построении мы должны, очевидно, учитывать условия применимости исходных уравнений.

Так, квадрат угла  $\theta_1$  должен оставаться пренебрежимо малым по сравнению с единицей, иначе нарушается основное условие справедливости уравнений (2) и (3).

Как видно из нижних кривых фиг. 2, это условие не позволяет рассмотреть оболочки с отношением  $R/h$ , меньшим 100.

Уже при  $R/h = 100$  угол  $\theta_1$  оказывается достаточно большим.

Далее, угол поворота дуги меридиана  $\vartheta$  за пределами вмятины должен быть пренебрежимо малым по сравнению с текущим углом  $\theta$ . Иначе нам придется учитывать нелинейность перемещений за пределами центральной вмятины.

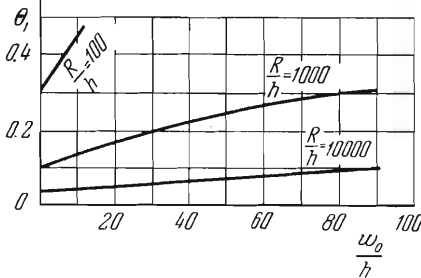
Максимум угла  $\vartheta$  будет

$$\vartheta_{\max} = \max(Ae^{-k(\theta-\theta_1)} \sin k(\theta-\theta_1)) = 0.332 A$$

или согласно (6)

$$\vartheta_{\max} = \frac{0.644}{k\theta_1} C = \frac{2.58}{k\theta_1^2} \frac{h}{R} \frac{w_0}{h}$$

Непосредственной числовой проверкой можно убедиться, что эта величина остается малой по сравнению с  $\theta_1$ , особенно для оболочек с большим отношением  $R/h$ .



Фиг. 2

Как видно из первой кривой (фиг. 2), нижнее критическое давление оказалось отрицательным:

$$\sigma_{*2} = \frac{pR}{2h} = -0.13 \frac{Eh}{R}$$

Это значит, что форма сферической оболочки со вмятиной существует не только при внешнем, но и при некотором внутреннем давлении, что, кстати говоря, можно наблюдать и на опыте. Например, существование упругой вмятины при нулевом и даже небольшом внутреннем давлении хорошо наблюдается на примере равновесия оболочки недостаточно надутого детского резинового мяча.

Для каждого фиксированного давления  $p$ , большего, чем  $-0.13h^2/R^2$ , оболочка, кроме начальной, имеет еще две формы равновесия: одну неустойчивую и вторую устойчивую. Так, при  $p = 0$  при неустойчивой форме прогиб будет  $w_0/h \approx 8.5$ , а при устойчивой  $w_0/h \approx 28$ . Угол  $\theta_1$  (половина центрального угла вмятины) зависит при этом от  $R/h$ . Чем толще оболочка, тем больше угол, тем относительно шире вмятина.

Для того чтобы оболочка приобрела вмятину, ей надо сообщить некоторое конечное (малое, но конечное) отклонение от исходного положения идеальной сферы. Причем, чем выше внешнее давление, тем меньше будет это необходимое отклонение  $\Delta$  (фиг. 2).

В реальных условиях оболочка не может быть изготовлена идеально; это обстоятельство для потери устойчивости является решающим.

Уже с самого начала нагружения оболочка имеет вмятину, которая развивается с ростом нагрузки. При некотором давлении происходит хлопок, позже или раньше, в зависимости от того, сколь велики были погрешности в исходной форме.

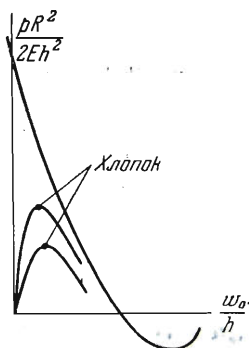
На фиг. 3 показан вид предполагаемых кривых  $pR^2/2Eh^2 = f(w_0/h)$ , которые получались бы для оболочек, имеющих начальное отклонение от сферической формы. Эти кривые вписываются в область, расположенную ниже получаемой расчетной кривой. Максимум этих кривых соответствует хлопку.

При современном уровне изготовления сферических оболочек и при той тщательности постановки эксперимента, которой можно достичь в лабораторных условиях, потеря устойчивости (хлопок) происходит, как уже говорилось, при

$$\sigma_* \approx 0.16 \frac{Eh}{R}$$

В производственных и эксплуатационных условиях эта величина оказывается ниже

$$\sigma_* \approx 0.1 \frac{Eh}{R}$$



Фиг. 3

До тех пор пока не будет создана теория хлопка сферической оболочки со статистическим учетом начальных погрешностей формы, конструктор должен, очевидно, в практических расчетах ориентироваться на эту чисто экспериментально установленную величину критического напряжения и от нее и назначать запас устойчивости.

Поступила 16 XI 1953

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zoelly R. Dissertation. Zürich, 1915.
2. Лейбензон Л. С. О приложении метода гармонических функций Томсона к вопросу устойчивости сжатых сферической и цилиндрической упругих оболочек. Юрьев, 1917.
3. Karman and Hsue-Shen-Tsien. The Buckling Spherical Shells by External Pressure. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 7, 1939.
4. Friedrich K. O. On the Minimum Buckling Load for Spherical Shells. Appl. Mech., 1941.
5. Муштарь Х. М., Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.
6. Пономарев С. Д. и др. Современные методы расчета на прочность в машиностроении, т. II, Машгиз, 1952.
7. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, т. IX, вып. 5, 1945.