

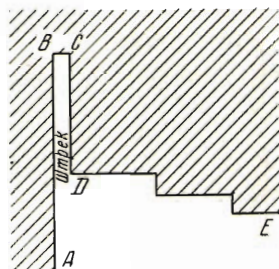
НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

Каменноугольные пласты имеют толщину от нескольких дециметров до нескольких метров, причем обычно можно считать, что они ограничены параллельными плоскостями^[1]. Если породы, в которых заключен уголь, являются не проницаемыми для газа, то фильтрация в такого рода угольном пласте может рассматриваться как плоско-параллельная.

Выемка угля производится таким образом, что образуются области вида, представленного на фиг. 1, где штриховкой показан уголь, еще не вынутый из пласта. Граница вынутого угля $ABCDE$ является линией равного давления (атмосферного). Линии AB и CD являются неподвижными в процессе выработки, линия BC (забой штрека) и линия DE (забой лавы) являются подвижными, перемещающимися параллельно самим себе по мере выработки пласта.



Фиг. 1

В рассматриваемых ниже задачах выемки угля в пласте будем считать ограниченными прямыми линиями, а скважины, которые в нем пробуриваются, проходящими через всю толщину пласта (таким образом, имеются в виду тонкие пласты). При этих условиях в задачах об установившихся движениях газа может быть использован метод конформных отображений. В конце статьи рассматриваются некоторые неустановившиеся движения.

Задачи, решения которых здесь даются, возникли в результате бесед с А. А. Скопянским, а также с А. С. Цырульниковым (Институт горного дела Академии наук УССР), И. М. Яровым и Р. М. Кричевским (Макеевский научно-исследовательский институт).

1. Общие положения. Считая фильтрацию газа установившейся, а состояние газа изотермическим (см., например, ^[2]), получим, что квадрат давления p удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

иначе говоря, p^2 является гармонической функцией координат x, y . Обозначим через U гармоническую функцию, сопряженную с p^2 . Тогда

$$\zeta = U + ip^2 \quad (1.2)$$

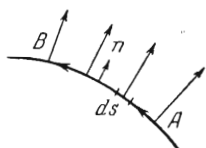
будет функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

Выясним значение U .

Расход, т. е. масса газа, проходящего в единицу времени через дугу AB (фиг. 2), выражается при помощи криволинейного интеграла

$$Q = \int_A^B \rho v_n ds \quad (1.3)$$

Здесь v_n — нормальная к дуге AB составляющая скорости фильтрации газа, ρ — плотность газа, ds — элемент дуги AB . Расход Q рассчитывается на единицу толщины пласта, поэтому для вычисления полного расхода нужно еще умножить Q на толщину (мощность) пласта H .



Фиг. 2

Будем считать закон фильтрации линейным, т. е. удовлетворяющим условию

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad v_n = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости фильтрации, k — проницаемость пласта, μ — вязкость газа.

Для принятого нами изотермического закона можем, пользуясь уравнением Бойля — Мариотта

$$p = \rho RT \quad (1.5)$$

(где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура газа), выразить плотность через давление и переписать (1.3) в виде

$$Q = -\frac{k}{\mu RT} \int_A^B p \frac{\partial p}{\partial n} ds = -\frac{k}{2\mu RT} \int_A^B \frac{\partial p^2}{\partial n} ds \quad (1.6)$$

Но для гармонических сопряженных функций p^2 и U имеем

$$\frac{\partial p^2}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial s}$$

что дает возможность переписать (1.6) так:

$$Q = \frac{k}{2\mu RT} \int_A^B \frac{\partial U}{\partial s} ds = \frac{k}{2\mu RT} (U_B - U_A) \quad (1.7)$$

Видим, что разность значений функций U в двух точках пропорциональна расходу газа через произвольную дугу, проходящую через эти точки.

Замечание. Предположим, что проницаемость газа k не является постоянной, но есть функция давления $k = k(p)$ (к такому заключению приходит В. В. Ходот в результате ряда исследований).

Предположим также, что связь между плотностью и давлением выражается зависимостью $\rho = \rho(p)$, может быть, отличной от (1.5). Тогда уравнение неразрывности

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho(p) k(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho(p) k(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0$$

Введя обозначения $F(p) = \int k(p) \varphi(p) dp$, придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 F(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(p)}{\partial y^2} = 0$$

Если теперь через W обозначим функцию, гармонически сопряженную с $F(p)$, то выражение расхода получится в виде

$$Q = -\frac{1}{\mu} \int_A^B \frac{\partial F(p)}{\partial n} ds = \frac{1}{\mu} (W_B - W_A)$$

Таким образом, и здесь расход пропорционален разности значений функции W . Результаты, которые изложены ниже для изотермического газа при постоянной проницаемости пласта, можно пересчитать на случай более сложных условий.

2. Первая схема фильтрации. Упростим контур области, изображенной на фиг. 1, считая поперечный размер штрека бесконечно малым и заменив линию DE одной прямой.

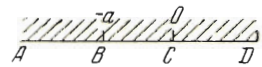
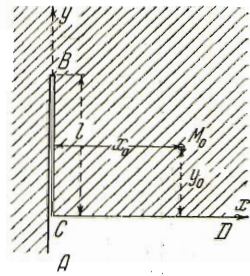
Тогда получим область фиг. 3, ограниченную контуром $ABCD$.

Обозначим давление вдоль контура через p_1 (постоянная) и введем в рассмотрение вместо (1.2) функцию

$$\zeta = \xi + i\eta = U + i(p^2 - p_1^2) \quad (2.1)$$

Отображая конформно область z на верхнюю полуплоскость плоскости ζ (фиг. 3) и учитывая соответствие точек обеих плоскостей, получим

$$Z^2 = \frac{9}{4} \zeta^0 \left(1 + \frac{1}{3} \zeta^0\right)^2, \quad Z = \frac{z}{l}, \quad \zeta^0 = \frac{\zeta}{a} \quad (2.2)$$



Фиг. 3

где l — длина отрезка BC . Величина a есть разность значений U в точках B и C , так что на основании формулы (1.7) расход Q через отрезок BC будет

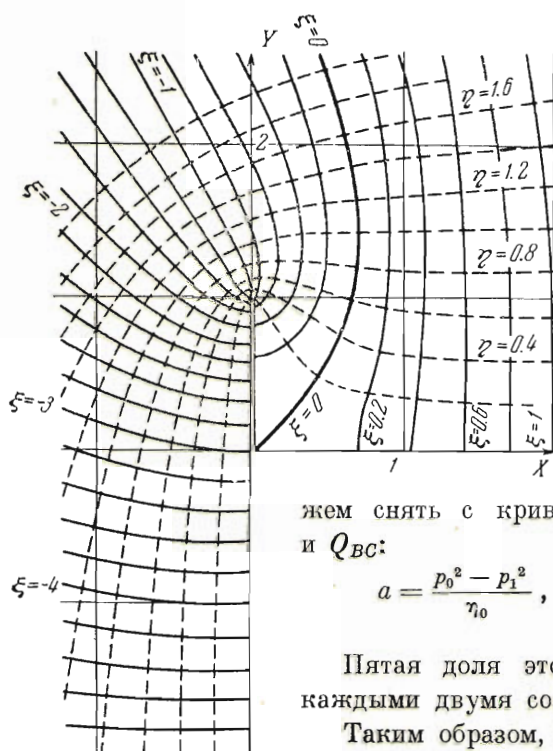
$$Q_{BC} = \frac{ka}{2\mu RT} \quad (2.3)$$

В уравнении (2.2) отделим действительную часть от мнимой. Получим, отбрасывая для простоты значки у безразмерных величин ξ^0 и η^0 , уравнения

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 &= \frac{1}{4} [\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 6(\xi^2 - \eta^2) + 9\xi] \\ 2XY &= \frac{1}{4} [3\xi^2\eta - \eta^3 + 12\xi\eta + 9\eta] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Давая ξ последовательно ряд значений $0, \pm 0.1, \pm 0.2, \dots$, получим из (2.4) X, Y как функции параметра η — это будут линии тока нашего движения. Точно так же, давая η ряд значений, можем построить линии равного давления. Сетка линий тока и изобар построена на фиг. 4, причем длина отрезка l принята за единицу, так что на фиг. 4 имеем координаты X, Y . Линии тока упираются в контур области $ABCD$, образуя на нем отрезки, через каждый из которых проходит $1/5$ доля

расхода через отрезок BC . Для того чтобы найти этот расход, нужно знать величину a . Для ее определения нужно иметь дополнительные сведения о пласте. Достаточно, например, произвести замер давления в



Фиг. 4

некоторой (произвольной) точке пласта M_0 (фиг. 3). Пусть координаты этой точки будут x_0, y_0 , им соответствуют X_0, Y_0 , где

$$X_0 = \frac{x_0}{l}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{l}$$

Давление в точке M_0 пусть будет p_0 , так что в этой точке имеем

$$\eta_0^0 = p_0^2 - p_1^2, \quad \eta_0 = \frac{p_0^2 - p_1^2}{a}$$

Но значение η_0 мы можем снять с кривых фиг. 4 и тогда найдем a и Q_{BC} :

$$a = \frac{p_0^2 - p_1^2}{\eta_0}, \quad Q_{BC} = \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2\mu RT\eta_0} \quad (2.5)$$

Пятая доля этого расхода проходит между каждыми двумя соседними линиями тока фиг. 4.

Таким образом, зная давление в какой-нибудь точке пласта и зная для этого пласта величины k, μ, R, T, p_0, p_1 , входящие в формулу (2.4), можно найти расход через различные участки кон-

тура области движения. Наоборот, если бы мы могли замерять расход на различных участках контура $ABCD$, то мы могли бы определить из формулы (2.6) комбинацию параметров $k/\mu RT$.

Первый частный случай — область в виде прямого угла. Если точка M_0 , в которой производится замер давления, находится вблизи точки C , то можно считать, что движение происходит в области прямого угла, и рассмотреть схему, представленную на фиг. 5. Линия $B CD$ есть линия равного давления $p = p_1$.

Отображение угла на полуплоскость ζ дает зависимость между z и ζ :

$$z^2 = M\zeta \quad (2.6)$$

Чтобы найти значение постоянной M , нужно задать некоторое условие. Будем считать, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ замерено давление p_0 . Подставляя эти значения в (2.6) и разделяя действительную и мнимую части, получим выражения U и p :

$$U = \frac{x^2 - y^2}{2x_0y_0} (p_0^2 - p_1^2), \quad p^2 - p_1^2 = \frac{xy}{x_0y_0} (p_0^2 - p_1^2) \quad (2.7)$$

На фиг. 5 построена сетка линий тока и линий равного потенциала. Между каждой парой соседних линий тока проходит один и тот же расход. Через отрезок длины x , отсчитываемой от точки C , вдоль оси X проходит расход

$$Q = \frac{k}{2\mu RT} \frac{p_0^2 - p_1^2}{2x_0 y_0} x^2$$

через отрезок на оси X между точками K и L имеем расход

$$Q = \frac{k}{2\mu RT} \frac{p_0^2 - p_1^2}{2x_0 y_0} (x_L^2 - x_K^2)$$

Аналогичным образом распределяется расход вдоль оси ординат.

Второй частный случай — плоскость с разрезом. Если предположить, что точка C фиг. 3 уходит вниз на бесконечность, то получим область, представленную на фиг. 6. Она соответствует штрэку, в котором поперечными размерами пренебрежено.

Отображение области движения на полуплоскость ζ дает

$$z = M\zeta^2$$

Если в точке (x_0, y_0) задано давление p_0 , то, полагая

$$\eta_0 = p_0^2 - p_1^2$$

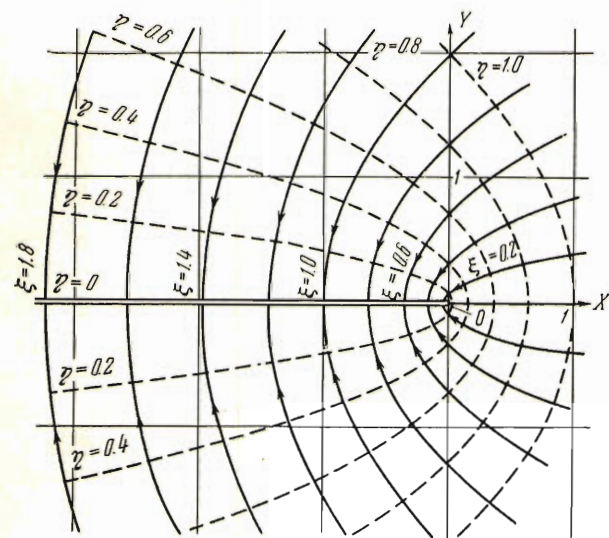
получим

$$x_0 = M(\xi^2 - \eta_0^2)$$

$$y_0 = 2M\xi\eta_0$$

Исключая ξ , найдем отсюда M :

$$M = -\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2\eta_0^2}$$

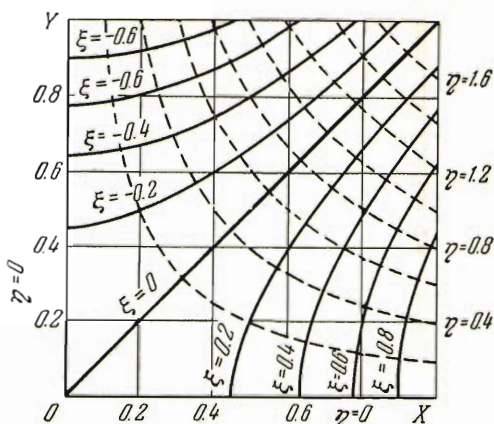


Фиг. 6

Особенно простое выражение для M получим, если возьмем точку M_0 на продолжении линии AB , т. е. примем $y_0 = 0$. Имеем $M = -x_0 / \eta_0^2$. Расход вдоль линии AB дается формулой

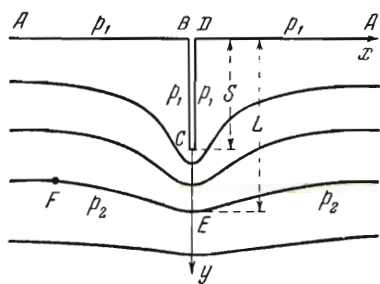
$$Q = \frac{k}{2\mu RT} \eta_0 \sqrt{\frac{x}{x_0}} = \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2\mu RT} \sqrt{\frac{x}{x_0}}$$

Линии тока представляют семейство парабол, линии равного давления — семейство ортогональных к ним, также софокусных парабол.



Фиг. 5

3. Приток к скважине в бесконечной полуплоскости. Скважину будем считать бесконечно тонкой, пренебрегая, таким образом, фильтрацией через дно скважины. Примем, что вдоль всего контура $ABCD$ фиг. 7



Фиг. 7

давление постоянно (равно атмосферному). Отобразим область движения на полуплоскость ζ .

Полуплоскость с надрезом отображается на полуплоскость ζ при помощи соотношения вида:

$$\zeta = M \sqrt{s^2 + z^2} \quad (3.1)$$

где s — длина скважины, M — постоянная, подлежащая определению.

Допустим, что через точку E с координатами $(0, L)$ проходит изобара, для которой $p = p_2$. Тогда получим

$$p_2^2 - p_1^2 = M \sqrt{L^2 - s^2} \quad \text{или} \quad M = \frac{p_2^2 - p_1^2}{\sqrt{L^2 - s^2}} \quad (3.2)$$

Составим выражение расхода через единицу длины отрезка CD :

$$q = - \frac{k}{2\mu RT} \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{k}{2\mu RT} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.3)$$

Интегрируя это выражение по y в пределах от нуля до s , найдем расход через стенку скважины CD . Удвоив это выражение, получим весь расход через скважину BCD :

$$Q = \frac{k}{\mu RT} \frac{(p_2^2 - p_1^2) s}{\sqrt{L^2 - s^2}} \quad (3.4)$$

Отметим, что если L велико по сравнению с s , то давление в пласте по мере увеличения L будет меняться все медленнее, делаясь практически постоянным на больших расстояниях от скважины. Поэтому при больших значениях L вычисление расхода может оказаться неточным. Отсюда следует, что точку E следует выбирать недалеко от конца скважины C ; желательно измерить давление в нескольких точках вдоль линии CE и вычислить расход для каждого из показаний давления.

Если давление p_2 замеряется в точке F , не лежащей на продолжении оси скважины, причем известны координаты этой точки (x_0, y_0) , то расход через скважину BCD можно вычислить по формуле

$$Q = \frac{ks}{\mu RT} N \quad (3.5)$$

причем N определяется из биквадратного уравнения

$$N^4 - \frac{(p_2^2 - p_1^2)^2}{x_0^2 y_0^2} (s^2 + x_0^2 - y_0^2) N^2 - \frac{(p_2^2 - p_1^2)^4}{x_0^2 y_0^2} = 0 \quad (3.6)$$

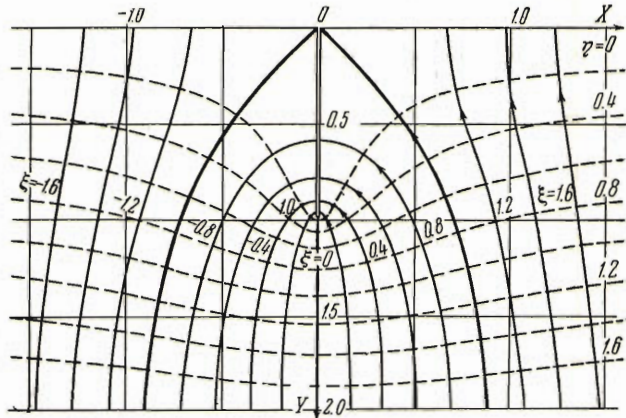
Другими словами,

$$N = \frac{p_2^2 - p_1^2}{|x_0 y_0| \sqrt{2}} \sqrt{|s^2 + x_0^2 - y_0^2| - \sqrt{(s^2 + x_0^2 - y_0^2)^2 + 4x_0^2 y_0^2}} \quad (3.7)$$

Область влияния скважины. Среди линий тока выделим две, проходящие через начало координат (жирные линии фиг. 8). Эти линии ограничивают область влияния или дренирования скважины; в скважину попадает лишь газ из полосы шириной $2s$ на бесконечности, сужающейся к устью скважины. Уравнения линий раздела имеют вид:

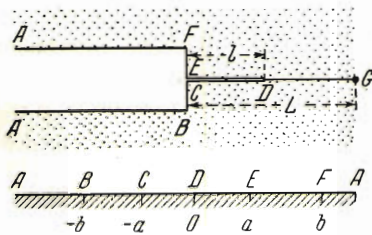
$$\left(\frac{y}{s}\right)^2 = \frac{(x/s)^2}{1 - (x/s)^2} \quad (3.8)$$

Эти кривые имеют асимптоты $x = \pm s$.



Фиг. 8

4. Приток газа к стенкам выработки при наличии скважины. Рассматривается схема движения, область которого изображена на фиг. 9. Имеется выработка ABCFA с забоем BF. Отрезок CDE изображает скважину, фильтрацией через дно которой пренебрегаем.



Фиг. 9

Обозначим давление вдоль контура ABCDEFA через p_1 и рассмотрим опять функцию (2.1).

Отображение области движения на полуплоскость ζ дает

$$z = M \int \zeta \sqrt{\frac{b^2 - \zeta^2}{a^2 - \zeta^2}} d\zeta + N \quad (4.1)$$

Здесь a, b — аффиксы точек E и F на плоскости ζ , M и N — постоянные, подлежащие определению. После интегрирования получаем

$$z = -\frac{1}{2} M \sqrt{(a^2 - \zeta^2)(b^2 - \zeta^2)} + \frac{M(b^2 - a^2)}{4} \ln \frac{1/2(a^2 + b^2) - \zeta^2 - \sqrt{(a^2 - \zeta^2)(b^2 - \zeta^2)}}{1/2(b^2 - a^2)} \quad (4.2)$$

Полагая $\zeta = 0, z = l$, а затем $\zeta = a, z = 0$, найдем

$$l = -\frac{M}{2} \left[ab + \frac{b^2 - a^2}{2} \ln \frac{b + a}{b - a} \right] \quad (4.3)$$

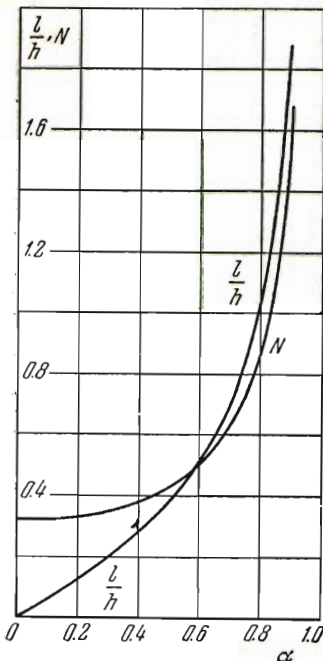
Для промежутка $a < U < b$ перепишем выражение z в виде

$$z = -\frac{Mi}{2} \sqrt{(\zeta^2 - a^2)(b^2 - \zeta^2)} + \frac{Mi}{4} (b^2 - a^2) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1/2(a^2 + b^2) - \zeta^2}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(b^2 - \zeta^2)}} \quad (4.4)$$

при $\zeta = b$ получаем отсюда

$$-M = \frac{2h}{(b^2 - a^2)\pi} \quad (4.5)$$

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \left[ab + \frac{b^2 - a^2}{2} \ln \frac{b + a}{b - a} \right] \quad (4.6)$$



Фиг. 10

На фиг. 10 построены графики зависимости l/h и N от α согласно (4.8). На фиг. 11 приведено семейство кривых $L/h = f(\alpha, \gamma)$, построенных по уравнению (4.11).

Найдем выражение расхода через отрезок BF , длина которого у нас обозначена через h . Для этого применим формулу (1.7) к отрезку EF .

Учитывая, что $a = U_E$ и $b = U_F$ представляют значения U соответственно в точках E и F , для расхода через отрезок EF (такой же расход проходит через отрезок BC) получаем

$$q_{EF} = \frac{k(b-a)}{2\mu RT}$$

а для расхода скважины q_{CDE} будем иметь

$$q_{CDE} = \frac{ka}{\mu RT}$$

Принимая во внимание, что в силу равенств (4.7) и (4.10)

$$\frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$a = \frac{\alpha}{\gamma} (p_2^2 - p_1^2), \quad b = \frac{c}{\gamma} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{\gamma}$$

перепишем последние формулы так:

$$q_{CDE} = \frac{k\alpha (p_2^2 - p_1^2)}{\mu RT}$$

$$q_{EF} = \frac{k(1-\alpha) p_2^2 - p_1^2}{2\mu RT \gamma}$$

$$(4.12)$$

Фиг. 11

Вводя обозначение

$$\frac{a}{b} = \alpha \quad (4.7)$$

перепишем (4.5) и (4.6) так:

$$N = -\frac{M}{2hb^2} = \frac{1}{\pi(1-\alpha^2)}$$

$$\frac{l_2}{h} = \frac{\alpha}{\pi(1-\alpha^2)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (4.8)$$

Предположим теперь, что нам известно давление $p = p_2$ в точке G , для которой $x = L$, $y = 0$. В ней $U = 0$, $\zeta = ci$, причем

$$c = p_2^2 - p_1^2 \quad (4.9)$$

Обозначая через γ отношение

$$\gamma = \frac{p_2^2 - p_1^2}{b} = \frac{c}{b} \quad (4.10)$$

можно написать

$$\frac{L}{h} = \frac{V(\alpha^2 + \gamma^2)(1 + \gamma^2)}{\pi(1 - \alpha^2)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1/2(1 + \alpha^2) + \gamma^2 - V(\alpha^2 + \gamma^2)(1 + \gamma^2)}{1/2(1 - \alpha^2)} \quad (4.11)$$

На фиг. 10 построены графики зависимости l/h и N от α согласно (4.8). На фиг. 11 приведено семейство кривых $L/h = f(\alpha, \gamma)$, построенных по уравнению (4.11).

Найдем выражение расхода через отрезок BF , длина которого у нас обозначена через h . Для этого применим формулу (1.7) к отрезку EF .

Учитывая, что $a = U_E$ и $b = U_F$ представляют значения U соответственно в точках E и F , для расхода через отрезок EF (такой же расход проходит через отрезок BC) получаем

$$q_{EF} = \frac{k(b-a)}{2\mu RT}$$

а для расхода скважины q_{CDE} будем иметь

$$q_{CDE} = \frac{ka}{\mu RT}$$

Принимая во внимание, что в силу равенств (4.7) и (4.10)

$$\frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$a = \frac{\alpha}{\gamma} (p_2^2 - p_1^2), \quad b = \frac{c}{\gamma} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{\gamma}$$

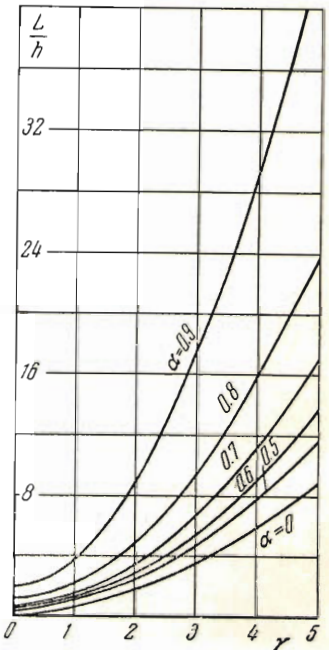
перепишем последние формулы так:

$$q_{CDE} = \frac{k\alpha (p_2^2 - p_1^2)}{\mu RT}$$

$$q_{EF} = \frac{k(1-\alpha) p_2^2 - p_1^2}{2\mu RT \gamma}$$

$$(4.12)$$

Фиг. 11



Отсюда получаем такое правило для определения расхода через отрезки CDE и EF : по заданному отношению l/h из графика фиг. 10 находим α ; затем по заданному L/h и найденному значению α по графику фиг. 11 находим γ ; эти значения α и γ следует подставить в (4.12).

Например, для $l/h = 1$, $L/h = 2$ получаем $\alpha = 0.79$, $\gamma = 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, как распределяется расход вдоль линий AB и AF . Остановимся на линии AF . Для этого вернемся к формуле, выражающей зависимость z от ζ : Имеем (4.13)

$$z = \frac{h}{\pi(b^2 - a^2)} \sqrt{(a^2 - \zeta^2)(b^2 - \zeta^2)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1/2(a^2 + b^2) - \zeta^2 - \sqrt{(a^2 - \zeta^2)(b^2 - \zeta^2)}}{1/2(b^2 - a^2)}$$

Рассматривая действительные значения ζ в промежутке (a, b) , перепишем это равенство так:

$$z = \frac{hi}{\pi(b^2 - a^2)} \sqrt{(\zeta^2 - a^2)(b^2 - \zeta^2)} - \frac{h}{2\pi} \ln \frac{1/2(a^2 + b^2) - \zeta^2 - i\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(b^2 - \zeta^2)}}{1/2(b^2 - a^2)} + \frac{h}{2} i$$

Наконец, переходя к промежутку (b, ∞) , будем иметь

$$z = -\frac{h}{\pi(b^2 - a^2)} \sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)} - \frac{h}{2\pi} \ln \frac{1/2(a^2 + b^2) - \zeta^2 - \sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}}{1/2(b^2 - a^2)} + \frac{h}{2} i$$

Можно переписать это уравнение, перейдя к безразмерным величинам

$$\frac{z}{h} = z^\circ, \quad \frac{\zeta}{b} = \zeta^\circ, \quad \frac{a}{b} = \alpha, \quad \frac{x}{h} = x^\circ \quad (4.14)$$

в следующем виде:

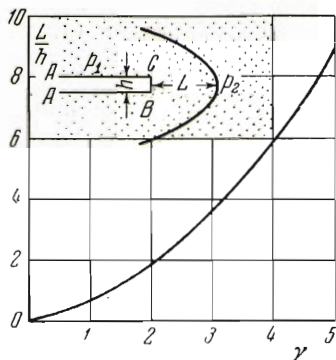
$$z^\circ = -\frac{1}{\pi(1 - \alpha^2)} \sqrt{(\zeta^{\circ 2} - \alpha^2)(\zeta^{\circ 2} - 1)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1/2(1 + \alpha^2) - \zeta^{\circ 2} + \sqrt{(\zeta^{\circ 2} - \alpha^2)(\zeta^{\circ 2} - 1)}}{1/2(1 - \alpha^2)} \quad (4.15)$$

Вдоль линии AF имеем $\zeta = U$, поэтому можно переписать (4.15) еще так (полагая $u^\circ = U/b$):

$$-x^\circ = \frac{\sqrt{(u^{\circ 2} - \alpha^2)(u^{\circ 2} - 1)}}{\pi(1 - \alpha^2)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1/2(1 + \alpha^2) - u^{\circ 2} + \sqrt{(u^{\circ 2} - \alpha^2)(u^{\circ 2} - 1)}}{1/2(1 - \alpha^2)} \quad (4.16)$$

Давая u° ряд значений, больших единицы, получим соответствующие значения абсциссы x° и, таким образом, можем узнать, какому промежутку соответствует тот или иной расход. Так, если мы положим $u^\circ = 1 + \alpha$, то из (4.16) получим тот отрезок линии FA , через который проходит расход, пропорциональный α .

По мере удаления от забоя BF распределение расхода вдоль FA будет все более близким к такому, какое получается для бесконечно узкого разреза (фиг. 6).



Фиг. 12

Для последнего же равноотстоящие значения абсцисс концов линий тока получаются при помощи формулы

$$q = q_0 \sqrt{\frac{x}{x_0}}$$

Другими словами, если через отрезок x_0 , прилегающий к точке O (см. фиг. 6), проходит расход q_0 , то этот же расход q_0 будет проходить через отрезки $3x_0$, $5x_0$, $7x_0$ и т. д.

Отметим частный случай схемы фиг. 9 — случай отсутствия скважины, представленный на фиг. 12.

На этой же фигуре дан график зависимости L/h от γ . Он представляет частный случай графиков фиг. 11, отвечающий значению $\alpha = 0$.

Расход через отрезок CB вычисляется по формуле

$$q = \frac{k}{\mu RT} \frac{p_2^2 - p_1^2}{\gamma} \quad (4.17)$$

Распределение расхода вдоль линии CA определяется по формуле, получаемой из (4.16) при $\alpha = 0$:

$$-x^0 = \frac{u^0}{\pi} \sqrt{u^{02} - 1} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1/2 - u^{02} + u^0 \sqrt{u^{02} - 1}}{1/2} \quad (4.18)$$

Очевидно, что изложенным способом можно решить ряд других задач об установившейся фильтрации газа в угольном пласте малой толщины.

5. О неустановившихся движениях в области прямого угла. Рассмотрение фиг. 4 показывает, что если нас интересует часть области движения вблизи прямого угла, то можно упростить задачу, сведя ее к схеме, представленной на фиг. 5.

В случае плоской задачи уравнение неустановившегося движения газа в угольном пласте при законе сорбции Ленгмюра [3, 4] может быть взято в следующем виде [2]:

$$\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = \left[m + \frac{abRT}{(1 + a\sqrt{P})^2} \right] \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (P = p^2) \quad (5.1)$$

Будем рассматривать такие граничные и начальные условия:

$$P(0, y, t) = p_a^2, \quad P(x, 0, t) = p_a^2, \quad P(x, y, 0) = p_n^2 \quad (5.2)$$

Обычно пластовое давление p_n значительно больше забойного p_a . При этом условии возможна замена переменного давления в множителе при производной по времени постоянным значением, именно значением p_n , — получаемая при этом погрешность в решении уравнения будет невелика (проверка такого рода была проведена В. Н. Разумовой).

Поэтому вместо уравнения (5.2) мы будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a^* \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \quad (5.3)$$

где a^* — постоянная, имеющая значение

$$a^* = \frac{k}{\mu} \frac{P_{II}}{m + abRT / (1 + aP_{II})^2} \quad (5.4)$$

Тогда решение нашей задачи будет иметь вид:

$$\frac{P^2 - P_3^2}{P_{II}^2 - P_3^2} = \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{a^*t}} \right) \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{a^*t}} \right) \quad (5.5)$$

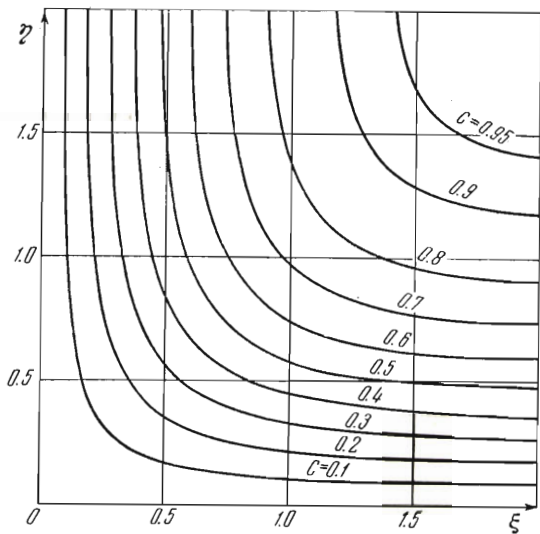
Здесь и в дальнейшем символом $\Phi(\xi)$ обозначен интеграл вероятности:

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

На фиг. 12 Н. Н. Кочной (ею найдено и решение (5.5)) построены линии равного давления в координатах

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{a^*t}}, \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{a^*t}}$$

В момент времени $t = 1 / (4a^*)$ суток имеем $\xi = x$, $\eta = y$, и, следовательно, изобары, представленные на фиг. 13, отвечают изобарам в плоскости xy . В дальнейшие моменты времени изобары будут перемещаться, удаляясь от начала координат.



Фиг. 13

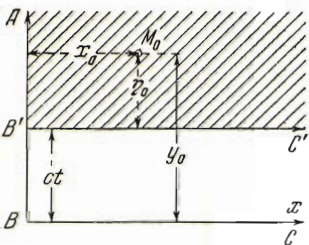
Случай перемещающегося забоя. Предположим теперь, что вдоль линии BC (фиг. 14) пласт угля вырабатывается, и притом таким образом, что эта линия перемещается с постоянной скоростью с параллельно самой себе. Введя новую координату η , связанную с перемещением y зависимостью

$$y = ct + \eta$$

приведем уравнение (5.3) к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a^* \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \right) + c \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (5.6)$$

В уравнении (5.6) величина η является координатой, отсчитываемой от перемещающейся линии BC .



Фиг. 14

Найдем решение уравнения (5.6) при следующих условиях:

$$P(0, \eta, t) = P(x, 0, t) = p_a^2, \quad P(x, \eta, 0) = p_n^2 \quad (5.7)$$

Это решение имеет вид: (5.8)

$$\frac{p^2 - p_a^2}{p_n^2 - p_a^2} = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^*t}}\right) \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{\eta + ct}{2\sqrt{a^*t}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta - ct}{2\sqrt{a^*t}}\right) \right] \exp\left(-\frac{c\eta}{a^*}\right) \right\}$$

где $\Phi(\xi)$ — попрежнему интеграл вероятности.

Случай, когда ABC заменяется полуплоскостью (при удалении линии AB влево на бесконечность), рассмотрен В. Н. Разумовой. Полученное ею решение отличается от нашего решения, даваемого формулой (5.8), лишь отсутствием множителя $\Phi(x/2\sqrt{a^*t})$.

При помощи уравнения (5.8) можно решать такую задачу. Предположим, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ производятся замеры давления в разные моменты времени. При этом линия $B'C'$ (фиг. 14) перемещается с постоянной скоростью c . Тогда, полагая в (5.8) $x = x_0$, $\eta + ct = y_0$, получим зависимость $p(x_0, y_0, t)$.

В заключение отметим, что качественные результаты настоящей статьи распространяются и на трехмерные течения. Так, понятие об области влияния скважины сохраняется: картина, похожая на изображенную на фиг. 8, будет иметь место в движении с осевой симметрией, причем раздельные линии заменятся поверхностью вращения, разделяющей две области.

В расчетах и построении графиков к статье принимала участие М. М. Семчинова.

Поступила 17 XI 1953

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и д и н Г. Д. Газовыделения в угольных шахтах и меры борьбы с ними. Углетехиздат, 1952.
2. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. О неустановившейся фильтрации газа в угольном пласте. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.
3. Х о д о т В. В. Приближенное определение сорбции и метаноемкости каменного угля. ДАН СССР, т. LXXXIV, № 5, 1952.
4. Л е н г м ю р И. Химия поверхности. Успехи физических наук, т. XIV, вып. 2, 1934.