

КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Задача об определении критической нагрузки при кручении круглоцилиндрической оболочки вращения с конечной длиной и постоянной толщиной рассматривалась Х. М. Муштари^[1], Л. Доннелем^[2], Г. Штурмом^[3] и др. Простая форма дифференциальных уравнений задачи позволяла упомянутым выше авторам искать решение в таком виде, который удовлетворяет дифференциальным уравнениям и некоторым (но не всем) краевым условиям. Так, например, Доннель считает^[4], что критическая нагрузка тонкостенной оболочки не зависит от степени свободы деформации контура срединной поверхности, и поэтому Доннель не ставит соответствующего краевого условия.

Здесь показано, что определение критической нагрузки оболочек длинных и средней длины сводится к интегрированию уравнения четвертого порядка, удовлетворяющего двум краевым условиям на каждом из контуров срединной поверхности. Рассматриваются оболочки, у которых краевые закрепления не допускают на контуре нормального перемещения срединной поверхности; отсюда вытекает первое краевое условие; второе краевое условие будет зависеть от того, возможна ли деформация контура срединной поверхности или нет. Вариации в остальных краевых условиях не отражаются на величине критической нагрузки тонкостенных оболочек.

Для определения критической нагрузки длинных оболочек дается график.

1. Основные соотношения. Пусть R будет радиус срединной поверхности, L — длина, t — толщина круглой цилиндрической оболочки. Введем в рассмотрение безразмерные координаты ξ , θ , которые определяют линейный элемент срединной поверхности ds квадратичной формой

$$(ds)^2 = R^2 [(d\xi)^2 + (d\theta)^2] \quad (1.1)$$

Обозначим через T касательное усилие начального безмоментного напряженного состояния от кручения оболочки. В узкой краевой зоне на безмоментное состояние налагается еще смешанное напряженное состояние, так называемый краевой эффект; однако при оболочках длинных и средней длины его влиянием можно пренебречь.

После потери устойчивости начального состояния равновесия возникают нормальные усилия S_ξ , S_θ , изгибающие и крутящий моменты M_ξ , M_θ , H , а касательные усилия изменяются из T в $T + S$. Пусть далее ε_ξ , ε_θ , γ будут относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности при переходе оболочки от начального состояния в выпученное состояние, κ_ξ , κ_θ , τ — параметры изменения кривизны, а Ru , Rv , Rw — физические составляющие перемещения точки срединной поверхности.

Квадратичная форма (1.1) предполагается отнесенной к критическому значению начального напряженного состояния.

В выпученном состоянии, весьма близком (в количественном смысле) к начальному состоянию, условия равновесия и совместности деформации принимают вид:

$$S_{\xi}' + S' + T(2\varepsilon_{\xi}' - \frac{1}{2}\gamma') = 0 \quad (1.2)$$

$$S' + S_{\theta}' - \frac{1}{R}(M_{\theta}' + 2H') - T(2\varepsilon_{\theta}' - \frac{1}{2}\gamma') = 0 \quad (1.3)$$

$$S_{\theta} + \frac{1}{R}(M_{\xi}'' + 2H'' + M_{\theta}'') - 2T(R\tau + \frac{1}{4}\gamma) = 0 \quad (1.4)$$

$$\tau' - \kappa_{\theta}' = 0 \quad (1.5)$$

$$-\kappa_{\xi}' + \tau' - \frac{1}{R}(\varepsilon_{\xi}' - \gamma') = 0 \quad (1.6)$$

$$\kappa_{\xi} - \frac{1}{R}(\varepsilon_{\xi}'' + \varepsilon_{\theta}'' - \gamma'') = 0 \quad (1.7)$$

Здесь штрихом и точкой обозначены частные производные

$$(\dots)' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\dots), \quad (\dots)'' = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\dots)$$

К этим условиям присоединяем приближенные физические соотношения

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{Et}(S_{\xi} - \nu S_{\theta}), \quad M_{\xi} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{\xi} + \nu\kappa_{\theta}), \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{Et}S \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Et}(S_{\theta} - \nu S_{\xi}), \quad M_{\theta} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{\theta} + \nu\kappa_{\xi}), \quad H = \frac{Et^3}{12(1+\nu)}\tau \quad (1.9)$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Наконец, связь между компонентами вектора перемещения и тензоров деформации устанавливается формулами

$$\varepsilon_{\xi} = u', \quad \varepsilon_{\theta} = v' - w, \quad \gamma = u'' + v' \quad (1.10)$$

$$R\kappa_{\xi} = -w'', \quad R\kappa_{\theta} = -w'' - v', \quad R\tau = -w' - v' \quad (1.11)$$

Рассмотрим восемь вариантов краевых условий при $\xi = 0$, $\xi = L/R$:

$$w = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{либо } u = 0 \quad \text{либо } S_{\xi} = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{либо } v = 0 \quad \text{либо } S = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{либо } w' = 0 \quad \text{либо } M_{\xi} = 0 \quad (1.15)$$

2. Качественное исследование состояния равновесия оболочек со слабо выпученной стенкой. Будем исследовать то состояние равновесия, которое существует при наименьшем возможном значении параметра T , допускающем нетривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.2) — (1.7), удовлетворяющее краевым условиям (1.12) — (1.15) при физических соотношениях (1.8) — (1.9).

Как отмечал уже Цолли^[5], при различных видах внешней нагрузки оболочек к наименьшим значениям критической нагрузки приводят те

виды нагрузки, где соответствующая деформация срединной поверхности при выпучивании оболочки будет близка к так называемому изгибанию. Предположим, что кручение цилиндрической оболочки относится к такому виду нагрузки.

При изгибании цилиндрической поверхности $x_\xi = 0$, но так как краевое условие (1.12), очевидно, не допускает изгибания срединной поверхности, то из предыдущего можно вывести лишь предположение

$$x_\xi \ll x_0 \quad (2.1)$$

Далее, при малых удлинениях и сдвиге срединной поверхности из условий совместности деформации (1.5), (1.6) следует, что

$$x_\xi'' \sim x_\theta'' \quad (2.2)$$

а это не противоречит предположению (2.1) лишь тогда, когда описывающие выпученное состояние функции возрастают при дифференцировании по θ больше, чем по ξ .

Введем в рассмотрение малую постоянную $\lambda = t/R\sqrt{12(1-\nu^2)}$. Предположим, что эти функции увеличиваются при дифференцировании по θ в λ^{-p} раз, а по ξ уменьшаются в λ^{-q} раз, где p и q — пока неизвестные постоянные. Так как решение задачи должно быть периодическим относительно координаты θ , то $p \geq 0$.

Оценка (2.2) может быть теперь выражена в виде

$$x_\xi \sim x_\theta \lambda^{2p+2q} \quad (2.3)$$

а вместо (2.1) имеем предположение

$$\lambda^{2q+2p} \ll 1 \quad (2.4)$$

Уравнения (1.2), (1.5) удовлетворяются тождественно, если положим

$$S_\xi - (1 + \nu)QS = Et\varphi', \quad S + 2QS_\xi = -Et\varphi' + 2\nu QS_0 \quad (2.5)$$

$$Rx_0 = \psi', \quad R\tau = \psi' \quad (2.6)$$

причем постоянная Q определяется равенством

$$T = EtQ \quad (2.7)$$

Вводя, кроме (2.4), еще предположение

$$Q \ll \lambda \quad (2.8)$$

систему дифференциальных уравнений (1.2) — (1.7) при соотношениях (1.8), (1.9) можно представить в более удобном для исследования виде:

$$(\varphi'' + \varphi)'' - \psi'' + \nu\lambda^2(\psi'' + \psi)'''' - 2\nu Q(\psi'' + \psi)'' = 0 \quad (2.9)$$

$$\varphi'' + 2(1 + \nu)Q\varphi'' + \lambda^2(\psi'' + \psi)'' - 2Q\psi'' = 0 \quad (2.10)$$

Наименьшее значение для параметра Q в зависимости от неопределенной пока величины q дают те интегралы системы (2.9), (2.10), где $p = 0.25 - 0.5q$, при этом $Q \sim \lambda^{1.25+0.5q}$ и $\varphi \sim \psi\lambda$. Этот результат имеет смысл, разумеется, при тех значениях q , которые удовлетворяют условию $\lambda^{2q+2p} = \lambda^{0.5+q} \ll 1$, потому что при выводе системы (2.9), (2.10) мы

исходили из предположения (2.4). Можно сказать, что уравнения (2.9), (2.10) имеют точность $\lambda^{0.5+q}$ по сравнению с единицей. Но легко убедиться, что эти уравнения сами содержат члены порядка $\lambda^{0.5+q}$ по сравнению с главными членами и поэтому в целях упрощения уравнений они могут быть отброшены. Таким путем приходим к системе

$$(\varphi'' + \varphi)'' - \psi'' = 0 \quad (2.11)$$

$$\varphi'' + \lambda^2(\psi'' + \psi)'' - 2Q\psi'' = 0 \quad (2.12)$$

Далее можем по крайней мере с точностью $\lambda^{0.5+q}$ вместо (2.5) выписать упрощенные соотношения

$$S_\xi = Et\varphi', \quad S = -Et\varphi' \quad (2.13)$$

а из уравнений (1.4), (1.7) найти таковые же для величин S_θ , $R\kappa_\xi$:

$$S_\theta = -Et(\lambda^2\psi''' - 2Q\psi'), \quad R\kappa_\xi = \varphi''' \quad (2.14)$$

Приведенная выше оценка $p = 0.25 - 0.5q$ имеет место только при значениях $q \leq 0.5$, так как p по условию периодичности решения не может быть меньше нуля. Качественный анализ уравнений (2.9), (2.10) показывает, что Q при $p = 0$ принимает свое наименьшее значение: $Q \sim \lambda^{1.5}$ при $q = 0.5$.

Отметим еще, что для обеспечения практически необходимой точности $\lambda^{0.5}$ должно быть $q \geq 0$.

3. Краевые условия к системе (2.11), (2.12). Система дифференциальных уравнений (2.11), (2.12) подстановкой

$$\varphi = \Phi(\xi)e^{is\theta}, \quad \psi = \Psi(\xi)e^{is\theta} \quad (3.1)$$

где s — действительное целое число, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$s^2(s^2 - 1)\Phi - \Psi'' = 0, \quad \Phi'' - 2iQs\Psi' + \lambda^2s^2(s^2 - 1)\Psi = 0 \quad (3.2)$$

которая имеет, однако, только четыре линейно независимых интеграла при каждом зафиксированном значении параметра s . Остальные четыре интеграла определяются уравнениями краевого эффекта. Так как свойства краевого эффекта хорошо известны, приводим только некоторые необходимые в дальнейшем результаты.

Тангенциальные усилия от краевого эффекта можно выразить через функцию напряжения F :

$$S_\xi = EtF'', \quad S_\theta = EtF'', \quad S = -EtF'' \quad (3.3)$$

а параметры изменения кривизны через функцию f :

$$R\kappa_\xi = -f'', \quad R\kappa_\theta = -f'', \quad R\tau = -f'' \quad (3.4)$$

причем f совпадает с функцией нормального перемещения точки срединной поверхности. Функции F и f должны иметь такой же период относительно координаты θ , как и функции φ и ψ , потому что иначе

нельзя удовлетворить краевым условиям. Следовательно, функции F и f при дифференцировании по θ увеличиваются в $\lambda^{-0.25+0.5q}$ раз. Учитывая то, что при достаточно малых значениях s ($s \ll \lambda^{-0.5}$) интегралы краевого эффекта при дифференцировании по ξ увеличиваются в $\lambda^{-0.5}$ раз, они могут быть определены из упрощенной системы

$$F'' + f = 0 \quad F - \lambda^2 f'' = 0 \quad (3.5)$$

с точностью $\lambda^{0.5+q}$, свойственной также и системе (2.11), (2.12).

Приступим к анализу краевых условий. Если в дальнейшем отказаться от рассмотрения случая $s = 1$, когда поперечное сечение оболочки остается круговым, то краевые условия

$$w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w' = 0$$

можно заменить условиями

$$w'' + w = 0, \quad u''' + u' = 0, \quad v'' + v = 0, \quad w''' + w' = 0$$

соответственно. Функции же, стоящие в левых частях этих равенств, в случае деформации, рассмотренной в разделе 2, весьма просто выражаются через функцию ψ . Имеем

$$w'' + w = -\psi', \quad u''' + u' = \psi', \quad v'' + v = -\psi, \quad w''' + w' = -\psi'' \quad (3.6)$$

с точностью $\lambda^{0.5+q}$.

При краевом эффекте получим следующие соотношения:

$$w = f, \quad u' = -\nu \lambda^2 f''', \quad v'' = -(2 + \nu) \lambda^2 f''', \quad w' = f' \quad (3.7)$$

также с точностью по крайней мере $\lambda^{0.5+q}$.

Составление статических краевых условий не представляет труда.

В итоге можем представить краевые условия (1.12) — (1.15), придерживаясь прежнего порядка, в виде

$$-\psi' + (f'' + f) = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{либо } \psi' - \nu \lambda^2 (f'' + f)''' = 0 \quad \text{либо } \varphi' + \lambda^2 f''' = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{либо } \psi + (2 + \nu) \lambda^2 (f'' + f)'' = 0 \quad \text{либо } \varphi' + \lambda^2 f''' = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{либо } \psi'' - (f'' + f)' = 0 \quad \text{либо } \nu \psi' - f'' = 0 \quad (3.11)$$

Полагая

$$F = G(\xi) e^{is\theta}, \quad f = g(\xi) e^{is\theta}, \quad (3.12)$$

определение краевых условий для системы (3.2) сводится к исключению произвольных постоянных интегралов дифференциального уравнения

$$\lambda^2 g'''' + g = 0 \quad (3.13)$$

из краевых условий (3.8) — (3.11) при различных вариантах последних. Пренебрегая в полученных таким путем соотношениях членами порядка $\lambda^{0.5+q}$ по сравнению с главными членами, получим для всех

возможных вариантов, содержащих условия $w = 0$, $u = 0$, краевые условия

$$\Psi = 0, \quad \Psi' = 0 \quad (3.14)$$

при вариантах же, содержащих условия $w = 0$, $S_\xi = 0$, имеем для системы (3.2) краевые условия

$$\Psi = 0, \quad \Phi = 0 \quad (3.15)$$

Отсюда непосредственно следует, что критическая нагрузка тонкостенной оболочки при кручении зависит от того, возможна ли деформация контура срединной поверхности или нет, и не зависит от степени заземления срединной поверхности на контуре.

Отметим еще, что для интегралов краевого эффекта получается оценка $f \lesssim \phi \lambda^{0.75+0.5q}$.

Пусть отношение радиуса срединной поверхности R к длине оболочки L будет величиной порядка λ^r . Из краевых условий (3.14), (3.15) вытекает, что функции Ψ , Φ не могут уменьшаться при дифференцировании больше, чем в λ^{-r} раз, т. е.

$$\Psi' \gtrsim \Psi \lambda^r, \quad \Phi' \gtrsim \Phi \lambda^r \quad (3.16)$$

Вместе с тем при проведении качественного анализа в разделе 2 мы предполагали, что эти функции уменьшаются при дифференцировании в λ^{-q} раз, т. е., $\Psi' \sim \Psi \lambda^q$, $\Phi' \sim \Phi \lambda^q$, и показали, что критическая нагрузка будет (в области $q \leq 0.5$) тем меньше, чем больше значение q ($Q \sim \lambda^{1.25+0.5q}$). Однако легко убедиться на основании оценок (3.16), что $q \leq r$ и поэтому выпущенное состояние при критической нагрузке характеризуется равенством $q = r$. При $q = 0.5$ критическая нагрузка достигает своего наименьшего значения ($Q \sim \lambda^{1.5}$), и поэтому дальнейшее увеличение длины оболочки не изменяет оценку для критической нагрузки.

4. Определение критической нагрузки. Требуется определить наименьшее значение Q , допускающее нетривиальное решение системы (3.2) при краевых условиях (3.14), (3.15) и при целочисленных значениях параметра s .

Исключая из системы (3.2) функцию Φ , получим уравнение

$$\Psi'''' - 2iQs^3(s^2 - 1)\Psi' + \lambda^2s^4(s^2 - 1)^2\Psi = 0 \quad (4.1)$$

причем краевые условия (3.15) можно выписать в виде

$$\Psi = 0, \quad \Psi'' = 0 \quad (4.2)$$

Введем новые переменные

$$\alpha = s \sqrt{\lambda(s^2 - 1)} \xi, \quad Q = \gamma \sqrt{\lambda^3(s^2 - 1)} \quad (4.3)$$

Тогда дифференциальное уравнение (4.1) упрощается:

$$\frac{d^4\Psi}{d\alpha^4} - 2i\gamma \frac{d\Psi}{d\alpha} + \Psi = 0 \quad (4.4)$$

Наименьшее собственное значение η уравнения (4.4) при крайних условиях (3.14) или (4.2) зависит от приведенной длины l оболочки

$$l = s \sqrt{\lambda(s^2 - 1)} \frac{L}{R} = \lambda^{0.5-r} s \sqrt{s^2 - 1} \quad (4.5)$$

где r определяется равенством $R/L = \lambda^r$. Пользуясь результатами качественного анализа для области $0 \leq r \leq 0.5$,

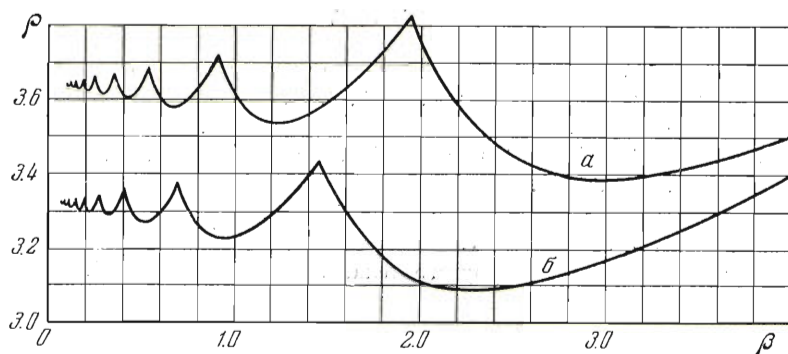
$$s \sim \lambda^{-0.25+0.5r}, \quad Q \sim \lambda^{1.25+0.5r} \quad (4.6)$$

легко установить, что в этой области $l \sim \lambda^0$, $\eta \sim \lambda^0$.

Критическое напряжение τ при кручении оболочки можно задавать в виде

$$\tau = E\lambda^{1.5} \rho \beta^{-0.5} \quad (4.7)$$

где $\beta = \lambda^{0.5-r}$ и ρ — некоторая функция от β . Функция ρ , график кото-



Фиг. 1

рой дан на фиг. 1, вычисляется следующим образом. По формулам (2.7) и (4.3) находим

$$\tau = Tl^{-1} = EQ = E\gamma\lambda^{1.5} \sqrt{s^2 - 1}, \quad l = \beta s \sqrt{s^2 - 1} \quad (4.8)$$

Отсюда путем сравнения с формулой (4.7) следует

$$\rho = \gamma_l \sqrt{l} \left(\frac{s^2 - 1}{s^2} \right)^{1/4} \quad (4.9)$$

Второе из выражений (4.8) и выражение (4.9) определяют функцию $\rho = \rho(\beta)$ в параметрическом виде. Вернее, они определяют семейство кривых (параметром этого семейства является s), но технический интерес представляет при каждом заданном β только та кривая семейства, которая приводит к наименьшему значению ρ .

Кривая a на фиг. 1 относится к крайним условиям (3.14), кривая b — к условиям (4.2). Другими словами, кривая a определяет критическое напряжение при условиях, когда деформация контуров срединной поверхности невозможна, а кривая b — при условиях, когда деформация контуров возможна. Для обеспечения точности порядка $\lambda^{0.5}$ должно быть $\beta \geq \lambda^{0.5}$ ($r \geq 0$).

Дадим еще уравнения огибающих семейств, приводящих к кривым *a* и *b*. Имеем соответственно

$$\rho = 3.639 (1 - 0.0239 \beta + 0.0003 \beta^2) \quad (\lambda^{0.5} \leq \beta \leq 2.8)$$

$$\rho = 3.322 (1 - 0.0313 \beta + 0.0005 \beta^2) \quad (\lambda^{0.5} \leq \beta \leq 2.1)$$

В области оболочек средней длины ($r = 0$) кривые *a* и *b* дают такие же критические напряжения, как и формулы Доннеля для оболочек с защемленными и свободно опертыми концами в упомянутой области. Этого и следовало ожидать, так как краевые условия у Доннеля формально совпадают с условиями (3.14), (4.2); он, однако, на наш взгляд, дал им неверное истолкование.

Поступила 20 XI 1953

Институт строительства и стройматериалов
АН Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. М у ш т а р и Х. М. Об устойчивости круглой цилиндрической оболочки при кручении. Труды Казанск. авиац. ин-та, № 2, 1933.
2. Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М.—Л., 1946.
3. S t u r m R. G. Stability of thin cylindrical shells in torsion. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 73, № 4, 1947.
4. D o n n e l l L. H. Stability of thin cylindrical shells in torsion. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 73, № 10, 1947.
5. Г е к к е л е р, И. Статика упругого тела. ГТТИ, М.—Л., 1934.