Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

М. Д. Хаскинд

(Николаев)

В первом разделе строится решение пространственной задачи о волновом движении тяжелой жидкости, возникающем при колебаниях тел или при пульсациях особенностей. Потенциал скоростей волнового движения выражается через некоторую функциональную комбинацию. Последняя легко определяется в случае пульсирующих особенностей; для горизонтально и вертикально плавающих пластин она может быть определена при помощи математических приемов, разработанных для бесконечной жидкости.

Во втором разделе рассматриваются плоско-параллельные волны, излучаемые пульсирующими и движущимися особенностями в тяжелой жидкости. Для изучения плоских задач теории волн М. В. Келдыш[1] ввел в рассмотрение функциональную комбинацию, при помощи которой легко определяются волновые потоки, возмущаемые подводными особенностями. При помощи этой комбинации волновые потоки, образующиеся при пульсированиях неподвижных подводных особенностей, рассмотрены в работах[2,3]. При этом в рассмотрение вводились либо две функции, либо одна функция и две мнимые единицы $i = \sqrt{-1}$ и $j = \sqrt{-1}$, не взаимодействующие между собой. Здесь этот способ видоизменен и определение волновых потоков проводится при помощи одной функции, содержащей одну мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$.

I

1. Пространственная задача о колебаниях плавающих тел на поверхности бесконечно глубокой взволнованной тяжелой жидкости сводится к отысканию гармонической функции[4]

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\, e^{i\sigma t} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{1.1}$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - k\varphi = 0, \qquad k = \frac{\sigma^2}{g} \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n \qquad \text{на } S \tag{1.3}$$

и при $R = (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$ — асимптотическому условию

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{R}} e^{kz - ikR} + \varphi^* \qquad \left(\varphi^* = i\,\frac{g}{\sigma}\, r_0 e^{kz - ik(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)}\right) \tag{1.4}$$

где σ — частота колебаний, k — волновое число, g — ускорение силы тяжести, $v_n e^{i\sigma t}$ — нормальная составляющая скорости какой-либо точки поверхности S, n — внешняя нормаль к этой поверхности, $\Phi^* = \varphi^* e^{i\sigma t}$ — потенциал скоростей набегающей системы регулярных волн, $2r_0$ — их высота, ε — угол между фазовой скоростью и осью x, c — комплексная амплитуда излучаемых волн, причем в выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{i\sigma t}$, следует рассматривать только действительную часть.

Для построения решения задачи введем в рассмотрение гармоническую функцию $f(x, y, z)$, связанную с функцией $\varphi(x, y, z)$ соотношением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - k\varphi = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.5}$$

На основании (1.2) для функции f имеем условие

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.6}$$

Условие (1.6) позволяет продолжить функцию f в верхнее полупространство четным образом; в результате получаем функцию, гармоническую и однозначную во всем пространстве вне поверхности $S + \bar{S}$, где $\bar{S}$ — зеркальное отражение поверхности S в верхнем полупространстве. Из условия продолжения (1.6) также следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки функция f имеет порядок малости $(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

Покажем, что если функция f найдена, то из соотношения (1.5) можно единственным способом определить гармоническую функцию φ, удовлетворяющую условиям (1.2) и (1.4). Для этого заметим, что гармоническая функция φ^* удовлетворяет условию (1.2) при всех z. Поэтому достаточно определить гармоническую φ_0 из соотношения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - k\varphi_0 = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.7}$$

и асимптотического условия

$$\varphi_0 = \frac{c}{\sqrt{R}} e^{kz - ikR} \qquad \text{при } R \to \infty \tag{1.8}$$

Общее решение, удовлетворяющее условию (1.4), представится в виде суммы

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi^*$$

Для определения функции φ_0 продифференцируем соотношение (1.7):

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - k\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Используя соотношение (1.7) и гармоничность функций φ_0 и f, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 (\varphi_0 - f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varphi_0 - f)}{\partial y^2} + k^2 (\varphi_0 - f) = -k\left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf\right) \tag{1.9}$$

Рассмотрим круг S_z бесконечно большого радиуса с центром в точке $P(x, y, z)$, расположенный параллельно невозмущенной свободной поверхности Oxy. Вырежем в области S_z круг d бесконечно малого радиуса с центром в той же точке P.

Тогда, применяя в области $S_z - d$ формулу Грина к функциям $\varphi_0 - f$ и $H_0^{(2)}(kr)$, будем иметь

$$\int\limits_{C_1+C_2}\left[(\varphi_0 - f)\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial n} - H_0^{(2)}\frac{\partial(\varphi_0 - f)}{\partial n}\right]dl =$$

$$= \iint\limits_{S_z - d} [(\varphi_0 - f)\triangle H_0^{(2)} - H_0^{(2)}\triangle(\varphi_0 - f)]\, dS$$

Здесь C_1 и C_2 — окружности большого и малого радиусов, $H_0^{(2)}(kr)$ — функция Ганкеля второго рода и $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ — расстояние между точкой P и точкой $Q(\xi, \eta, z)$ области $S_z - d$. Устремляя радиусы окружностей C_1 и C_2 соответственно к бесконечности и к нулю и учитывая (1.8) и (1.9), а также вид функции $H_0^{(2)}(kr)$ при малых и больших r, получаем следующее решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (1.4):

$$\varphi = f + \frac{k}{4i}\iint\limits_{S_z}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf\right) H_0^{(2)}(kr)\, dS + \varphi^* \tag{1.10}$$

Формулу (1.10) можно преобразовать к другому виду, полезному при рассмотрении конкретных задач. Для этого проведем вертикальный цилиндр Σ, опирающийся на круг d, и применим в области, ограниченной поверхностью $S_z - d + \Sigma + S + \overline{S}$, формулу Грина к гармоническим функциям f и $\chi = e^{-kz}H_0^{(2)}(kr)$. Имеем

$$\iint\limits_{S_z - d + \Sigma + S + \overline{S}}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\chi - f\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)dS = 0$$

Используя формулу (1.10) и стягивая вертикальный цилиндр к его оси, находим

$$\varphi = f + ke^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z} f(x, y, z)\, e^{-kz}dz + \frac{k}{4}ie^{kz}\iint\limits_{S+\overline{S}}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\chi - f\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)dS + \varphi^* \tag{1.11}$$

Из формулы (1.11) видно, что определенная таким образом функция φ является гармонической. Действительно, последние два слагаемых в (1.11) представляют собой гармонические функции. Поэтому достаточно показать, что функция

$$\psi = f + ke^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z} fe^{-kz}dz = e^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z}\frac{\partial f}{\partial z}e^{-kz}dz \tag{1.12}$$

является гармонической. Ясно, что

$$(\partial / \partial z - k)\triangle\psi = 0$$

а значит,

$$\triangle\psi = A(x, y)\, e^{kz}$$

Но из (1.12) следует, что при $z \to \infty$ функция ψ вместе с ее производными исчезает, следовательно, $A = 0$.

Принимая во внимание асимптотический вид функции $H_0^{(2)}(kr)$, из формулы (1.11) получаем

$$\varphi = iM(k, \theta)\sqrt{\frac{k}{8\pi R}}\, e^{kz - i(kR - {}^1\!/_4\pi)} + \varphi^* \quad \text{при } R \to \infty \tag{1.13}$$

где

$$M(k, \theta) = \iint\limits_{S+\bar S} e^{-kz + ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} \left\{\frac{\partial f}{\partial n} - kf\,[i\cos\theta\cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + i\sin\theta\cos(n, y) - \cos(n, z)]\right\} dS \tag{1.14}$$

Полученные здесь выражения для функции φ позволяют указать решения задач об определении волновых потоков в ряде случаев.

2. Если в точке $Q(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ имеем пульсирующий источник, то при помощи формулы (1.11) простым путем можно найти потенциал скоростей.

В самом деле, представим функцию φ для этого случая в виде

$$\varphi = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \varphi_0$$

$$\left(r_1 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z+\zeta_0)^2}\right)$$

причем функция φ_0 является гармонической во всем нижнем полупространстве и на основании (1.2) при $z = 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - k\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_2}$$

которое, очевидно, выполняется во всем нижнем полупространстве.

В данной задаче набегающая система волн отсутствует, и поэтому, полагая в формуле (1.11) $f = 2/r_2$, получаем

$$\varphi = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} + 2ke^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z}\frac{e^{-kz}}{r_2}\,dz + \frac{k}{2}\,ie^{kz}\iint\limits_{S+\bar S}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_2}\right)\chi - \frac{1}{r_2}\frac{\partial\chi}{\partial n}\right]dS$$

Стягивая поверхность $S + \bar S$ в точку $Q'_0(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)$, окончательно находим

$$\varphi = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + 2ke^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z}\frac{e^{-kz}}{r_2}\,dz - 2\pi ike^{k(z+\zeta_0)}H^{(2)}{}_0(kr_0)$$

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} \tag{2.1}$$

Обычно функция источника в рассматриваемой граничной задаче получается иным путем при помощи метода Фурье и имеет несколько иной вид, к которому (2.1) легко приводится.

3. Подобным путем решается задача об определении волнового потока, возбуждаемого пульсирующими давлениями. В этом случае гармоническая функция $\varphi(x, y, z)$ при $z = 0$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - k\varphi = q(x, y) \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} - k\varphi = 0 \quad \text{вне } S \tag{3.1}$$

Легко видеть, что условия (3.1) можно заменить соотношением, справедливым при всех z:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - k\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{q(\xi_0, \eta_0)\,d\xi_0 d\eta_0}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0^2) + z^2}}$$

Полагая в формуле (1.11)

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{q(\xi_0, \eta_0)\,d\xi_0 d\eta_0}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + z^2}}$$

мы и для этого случая получаем решение задачи в следующем виде:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{q(\xi_0, \eta_0)\,d\xi_0 d\eta_0}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + z^2}} + \frac{k}{2\pi}e^{kz}\iint\limits_S q(\xi_0, \eta_0) \times$$

$$\times \int\limits_{+\infty}^{z} \frac{e^{-kz}dz\,d\xi_0 d\eta}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + z^2}} - \frac{k}{2}\,ie^{kz}\iint\limits_S q(\xi_0, \eta_0)\,H^{(2)}{}_0(kr_0)\,d\xi_0 d\eta_0 + \varphi^* \tag{3.2}$$

Если имеем горизонтально плавающую пластину, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_n(x, y) \qquad \text{при } z = 0 \text{ на } S \tag{3.3}$$

то при помощи фоумулы (3.2) задача сводится к интегральному уравнению.

В самом деле, из (3.1) — (3.3) получаем уравнение

$$q(x, y) + \frac{k}{2\pi}\iint\limits_S q(\xi_0, \eta_0)\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2}} +$$

$$+ k\int\limits_{\infty}^{0} \frac{e^{-kz}dz}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + z^2}} - k\pi i H^{(2)}{}_0(kr_0)\Bigg]d\xi_0 d\eta_0 =$$

$$= v_n(x, y) - i\sigma r_0 e^{-ik(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)} \tag{3.4}$$

которое разрешается приближенными методами, как это выполнено в работе [5]. Эта же задача подобно плоско-параллельному случаю [6] сводится к смешанной краевой задаче для функции f, и если поверхность S есть эллипс или круг, то определение функции f может быть произведено при помощи разложения в ряд соответственно по произведениям функций Ляме или присоединенных функций Лежандра.

4. Рассмотрим другой частный случай. Пусть имеем вертикально плавающую пластину. Тогда условие (1.3) имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_n(x, z) \qquad \text{при } y = 0 \text{ на } S \tag{4.1}$$

Продифференцируем соотношение (1.5):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - k\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

В силу условия (4.1) имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial v_n(x, z)}{\partial z} - k v_n(x, z) \qquad \text{при } y = 0 \text{ на } S$$

Следовательно, при $y = 0$ на S

$$\frac{\partial f}{\partial y} = v_n(x, z) - k \int_0^z v_n(x, z)\, dz + U(x) = W(x, z) \tag{4.2}$$

где $U(x)$ — произвольная функция от x.

На основании соотношений (1.6) условие (4.2) следует продолжить четным образом в верхнее полупространство, в точки области $\overline{S}$, представляющей зеркальное отражение пластины S.

Таким образом, в данном случае определение функции f сводится к решению задачи Неймана. Если функция f определена, то легко вычислить давление в каждой точке жидкости:

$$p - p_0 = -\rho i \sigma e^{i\sigma t} \varphi(x, y, z) - \rho g z$$

где p_0 — атмосферное давление и ρ — плотность жидкости.

Разность давлений, действующих на пластину, определяется формулой

$$p_- - p_+ = \rho i \sigma e^{i\sigma t} (\varphi_+ - \varphi_-) \tag{4.3}$$

Здесь $p_\pm$ и $\varphi_\pm$ — соответственно давление и значение функции φ при $y = \pm 0$.

Из условия (4.2) можно вывести, что $f(x, y, z)$ есть нечетная функция относительно y, а из непрерывности давления следует, что

$$f(x, 0, z) = 0 \text{ вне } \overline{S} + S$$

Поэтому, стягивая в (1.11) поверхность интегрирования к пластине $S_0 = S + \overline{S}$, найдем

$$\varphi = f + k e^{kz} \int_{+\infty}^{z} f(x, y, z)\, e^{-kz} dz + \frac{k}{2} i e^{kz} \iint_{S_0} e^{-kz} f_+(\xi, 0, z) \times$$
$$\times \frac{\partial H^{(2)}_0 \left[k\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}\right]}{a y} d\xi dz + i \frac{g}{\sigma} r_0 e^{kz - ik(x\cos\varepsilon + y \sin\varepsilon)} \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к пределу при $y \to \pm 0$, получаем формулу для разности давлений:

$$p_- - p_+ = 2\rho i \sigma e^{kz + i\sigma t} \int_{-z_0}^{z} \frac{\partial f_+(x, 0, z)}{dz} e^{-kz} dz \tag{4.5}$$

где $z_0(x)$ — ординаты точек верхнего края пластины S_0.

Гармоническая функция $f(x, y, z)$, определяемая на основании условия (4.2), содержит произвольную функцию $U(x)$. Для ее определения следует потребовать выполнение условия (4.1).

Дифференцируя (4.4) и принимая во внимание (4.1) и (4.2), получим соотношение, определяющее функцию $U(x)$:

$$U(x) = k\int_{0}^{z_0} v_n(x, z)\,dz - \sigma r_0 \sin\varepsilon\, e^{kz_0 - ikx\cos\varepsilon} - ke^{kz_0}\int_{+\infty}^{z_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0} e^{-kz}\,dz +$$

$$+\frac{k}{2} ie^{kz_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\iint_{S_0} e^{-kz} f_+(\xi, 0, z)\, H_0^{(2)}(k\,|x-\xi|)\,d\xi\,dz \tag{4.6}$$

Как известно, задача Неймана по определению функции f для частных форм пластины S_0 решается при помощи разложений в ряды по специальным функциям и лишь для круговой пластины Кочин [7] при помощи разветвленных функций получил решение в замкнутом виде

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{S_0} K(x, y, z, \xi_0, \zeta_0)\, W(\xi_0, \zeta_0)\, d\xi_0 d\zeta_0 \tag{4.7}$$

Здесь K является нечетной функцией относительно y и при $y > 0$ определяется выражением (a — радиус круга)

$$K = \frac{2}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi_0^2-\zeta_0^2}\,\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2+R}}{a\sqrt{2r}} \tag{4.8}$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi_0)^2+(z-\zeta_0)^2+y^2},\ R = \sqrt{(a^2-x^2-y^2-z^2)+4a^2y^2}\right)$$

Вычислив по формулам (4.7) и (4.8) значение $f_+(x, 0, z)$ и $(\partial f/\partial y)_{y=0}$ и подставив их в (4.6), получаем уравнение для функции $U(x)$, при помощи которого можно приближенными методами определить эту функцию.

II

5. При пульсировании неподвижных особенностей под поверхностью тяжелой жидкости неограниченной глубины плоско-параллельный поток при $z \to -\infty$ постепенно затухает и характеризуется потенциалом скоростей

$$\Phi(y, z, t) = \varphi(y, z)\, e^{i\sigma t} \tag{5.1}$$

где σ — частота пульсирования; в равенстве (5.1), а также в дальнейших выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{i\sigma t}$, следует рассматривать только действительную часть.

Гармоническая функция φ удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = 0 \qquad \text{при } z = 0 \quad \left(\nu = \frac{\sigma^2}{g}\right) \tag{5.2}$$

и принципу излучения

$$\varphi = B_+ e^{\nu z - i\nu y} \quad \text{при } y \to +\infty, \qquad \varphi = B_- e^{\nu z + i\nu y} \quad \text{при } y \to -\infty \tag{5.3}$$

Пусть выделена особенность в функции φ и для гармонической при $z \leqslant 0$ функции $F(y, z)$ имеем условие

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \nu F = \chi(y, z) \tag{5.4}$$

Перейдем к комплексным координатам $x = y + iz$ и $\bar{x} = y - iz$. Тогда соотношение (5.4) примет вид:

$$i\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\right) - \nu F = \chi(x, \bar{x}) \tag{5.5}$$

Функции $F(x, \bar{x})$ и $\chi(x, \bar{x})$ удовлетворяют уравнение Лапласа. Поэтому

$$F(x, \bar{x}) = F_1(x) + F_2(\bar{x}), \qquad \chi(x, \bar{x}) = \chi_1(x) + \chi_2(\bar{x}) \tag{5.6}$$

На основании (5.5) и (5.6) получаем два независимых уравнения для определения функций $F_1(x)$ и $F_2(\bar{x})$:

$$\frac{dF_1}{dx} + i\nu F_1 = -i\chi_1(x), \qquad \frac{dF_2}{d\bar{x}} - i\nu F_2 = i\chi_2(\bar{x}) \tag{5.7}$$

Решая эти уравнения и удовлетворяя условия (5.3), получим

$$F_1(x) = -ie^{-i\nu x}\int\limits_{-\infty}^{x}\chi_1(x)\,e^{i\nu x}dx, \qquad F_2(\bar{x}) = ie^{i\nu\bar{x}}\int\limits_{+\infty}^{\bar{x}}\chi_2(\bar{x})\,e^{-i\nu\bar{x}}d\bar{x} \tag{5.8}$$

Из формулы (5.8) находим следующие выражения для комплексных амплитуд излучаемых волн:

$$B_+ = -i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi_2(x)\,e^{i\nu x}dx, \qquad B_- = i\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\chi_2(\bar{x})\,e^{-i\nu\bar{x}}d\bar{x} \tag{5.9}$$

Покажем, как этим видоизмененным методом определить волновой поток в известном случае пульсирующего источника. Обозначим через G функцию, отвечающую указанному случаю.

Очевидно, что

$$G = \ln\frac{1}{r'} - \ln\frac{1}{r'} + F \tag{5.10}$$

$$\left(r = \sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r' = \sqrt{(y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}\right)$$

где F — гармоническая во всей нижней полуплоскости функция, и на основании (5.2), удовлетворящая при $z \leqslant 0$ условию

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \nu F = 2\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{1}{r'} = \frac{-i}{x - \bar{\xi}} + \frac{i}{\bar{x} - \xi} \qquad (\xi = \eta + i\zeta)$$

Отсюда следует, что для функции $F(x, \bar{x}) = F_1(x) + F_2(\bar{x})$ получаем

$$F_1(x) = -e^{-i\nu x}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e}{x - \bar{\xi}}dx, \qquad F_2(\bar{x}) = -e^{i\nu\bar{x}}\int\limits_{+\infty}^{\bar{x}}\frac{e^{-i\nu\bar{x}}}{\bar{x} - \xi}d\bar{x} \tag{5.11}$$

Из формул (5.11) при помощи теоремы о вычетах легко находим асимптотический вид функции G:

$$G = -2\pi i e^{-i\nu(x - \bar{\xi})} \quad \text{при } y \to +\infty, \qquad G = -2\pi i e^{i\nu(\bar{x} - \xi)} \quad \text{при } y \to -\infty \tag{5.12}$$

6. Рассмотрим этим методом более сложную задачу. Пусть под поверхностью тяжелой жидкости неограниченной глубины движется прямолинейно-горизонтально по направлению оси y источник с постоянной скоростью u, который одновременно пульсирует по гармоническому закону. В этом случае потенциал скоростей Φ

$$\Phi(y, z, t) = \varphi(y, z) e^{i\sigma t}$$

в подвижной системе координат удовлетворяет условию [4]

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2i\tau(1 - i\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu(1 - 2i\beta)\varphi = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{6.1}$$

где

$$\nu = \frac{\sigma^2}{g}, \qquad \tau = \frac{u\sigma}{g} \qquad \beta = \frac{\mu_1}{2\sigma}$$

причем $\mu_1 > 0$ есть коэффициент диссипативных сил, который при окончательном решении задачи следует устремить к нулю.

Как и в предыдущем случае, положим

$$\varphi = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{r'} + F \tag{6.2}$$

где F — гармоническая во всей нижней полуплоскости функция, которая на основании (6.1) при $z \leqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2i\tau(1 - i\beta)\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \nu(1 - 2i\beta)F = -\frac{i}{x - \xi} + \frac{i}{\bar{x} - \bar{\xi}}$$

Полагая

$$F(x, \bar{x}) = F_1(x) + F_2(\bar{x}),$$

получаем два независимых уравнения для определения F_1 и F_2:

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{d^2F_1}{dx^2} - i\,[2\tau(1 - i\beta) - 1]\frac{dF_1}{dx} - \nu(1 - 2i\beta)F_1 = -\frac{i}{x - \xi} \tag{6.3}$$

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{d^2F_2}{d\bar{x}_2} - i\,[2\tau(1 - i\beta) + 1]\frac{dF_2}{d\bar{x}} - \nu(1 - 2i\beta)F_2 = \frac{i}{\bar{x} - \bar{\xi}} \tag{6.4}$$

Прежде чем решить эти уравнения, проведем анализ корней соответствующих характеристических уравнений. При $\beta = 0$ корни характеристического уравнения (6.3) суть $-i\nu_1$ и $-i\nu_2$, а уравнения (6.4) соответственно $i\nu_3$ и $i\nu_4$

$$\nu_{12} = \nu\,\frac{1 - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau}}{2\tau^2}, \qquad \nu_{34} = \nu\,\frac{1 + 2\tau \pm \sqrt{1 + 4\tau}}{2\tau^2} \tag{6.5}$$

При $\beta \neq 0$ корни характеристических уравнений следующие: $-i\nu_1'$, $-i\nu_2'$ и $i\nu_3'$, $i\nu_4'$, причем числа ν_s' с точностью до членов, содержащих β^2, определяются выражениями

$$\nu_{12}' = \nu_{12} + i\beta\frac{\nu}{\tau}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - 4\tau}}\right), \qquad \nu_{34}' = \nu_{34} - i\beta\frac{\nu}{\tau}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 4\tau}}\right) \tag{6.6}$$

Если $\tau < \frac{1}{4}$, то $\operatorname{Im}\nu_1' > 0$, а $\operatorname{Im}\nu_2' < 0$. Это означает, что для получения ограниченного решения уравнения (6.3) при $z \leqslant 0$ следует нижние пределы интегрирования соответственно положить $+\infty$ и $-\infty$. При $\tau > \frac{1}{4}$ числа ν_1 и ν_2 являются комплексными и для определения F_1 можно сразу положить $\beta = 0$ и ограниченное решение имеет место при тех же нижних пределах.

Из выражений (6.6) видно, что $\operatorname{Im}\nu_{34}' < 0$ при любых τ. Поэтому для получения ограниченного решения уравнения (6.4) при $z \leqslant 0$ необходимо нижние пределы интегрирования соответственно положить $+\infty$ и $+\infty$.

Принимая во внимание эти замечания, можем решения уравнений (6.3) и (6.4) при $\beta = 0$ представить в форме

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4\tau}}\left[e^{-i\nu_1 x}\int\limits_{+\infty}^{x}\frac{e^{i\nu_1 x}}{x-\overline{\xi}}\,dx - e^{-i\nu_1 x}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^{i\nu_2 x}}{x-\overline{\xi}}\,dx\right] \tag{6.7}$$

$$F_2(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+4\tau}}\left[e^{i\nu_3\overline{x}}\int\limits_{+\infty}^{\overline{x}}\frac{e^{-i\nu_3\overline{x}}}{\overline{x}-\xi}\,d\overline{x} - e^{i\nu_4\overline{x}}\int\limits_{+\infty}^{\overline{x}}\frac{e^{-i\nu_4\overline{x}}}{\overline{x}-\xi}\,d\overline{x}\right] \tag{6.8}$$

Полагая в (6.7) и (6.8) пределы интегрирования равными $\pm\infty$ и пользуясь теоремой о вычетах, получаем асимптотические выражения:

$$\begin{gathered}\varphi = -\frac{2\pi i}{\sqrt{1-4\tau}}\,e^{-i\nu_2(x-\overline{\xi})} \qquad \text{при } y \to +\infty \\ \varphi = -\frac{2\pi i}{\sqrt{1-4\tau}}\,e^{-i\nu_1(x-\overline{\xi})} + \frac{2\pi i}{\sqrt{1+4\tau}}\left[e^{i\nu_3(\overline{x}-\xi)} - e^{i\nu_4(\overline{x}-\xi)}\right] \quad \text{при } y \to -\infty\end{gathered} \tag{6.9}$$

Отсюда видно, что движущийся и пульсирующий источник излучает четыре системы волн с различными волновыми числами ν_1, ν_2, ν_3 и ν_4, при этом вперед отходит система регулярных волн с волновым числом ν_2, а назад отходят две системы регулярных волн с волновыми числами ν_3 и ν_4 и одна система волн с волновым числом ν_1 как бы увлекается движением источника.

Для более детального анализа характера излучения рассмотрим частные случаи. Прежде всего при $u = 0$, т. е. в случае неподвижного пульсирующего источника, $\nu_1 = \infty$, $\nu_2 = \nu$, $\nu_3 = \infty$, $\nu_4 = \nu$ и формулы (6.9) переходят в (5.12). Поэтому при малых скоростях движения источника пульсирующий источник в основном излучает расходящиеся по обе стороны от него волны с волновыми числами, близкими к ν, и на это основное излучение позади источника накладываются две системы коротких волн; одна из них отходит назад, а другая вперед.

Пусть теперь $\sigma = 0$ $(\tau = 0)$, тогда $\nu_1 = \mu$, $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = \mu$ и $\nu_4 = 0$ $(\mu = g/u^2)$ и из формул (6.9) получаем

$$\varphi = 0 \text{ при } y \to +\infty, \qquad \varphi = -4\pi e^{\mu(z+\zeta)}\sin\mu(y-\eta) \quad \text{при } y \to -\infty \tag{6.10}$$

Как и следовало ожидать, позади движущегося источника постоянной интенсивности образуется установившаяся система волн, которая для неподвижного наблюдателя распространяется со скоростью u по направлению движения источника. Из рассмотрения предельных случаев видно, что при любых u и σ пульсирующий источник излучает расходящиеся по обе стороны от него системы волн с волновыми числами ν_2 и ν_4, и на это излучение позади источника накладываются две системы волн с волновыми числами ν_1 и ν_3, обусловленные главным образом поступательным движением источника, и которые при малом σ близки к установившейся системе волн.

Заметим, что источник излучает все четыре системы волн, если $\tau < \frac{1}{4}$. Если же $\tau > \frac{1}{4}$, то числа ν_1 и ν_2 комплексны и, как видно из (6.9), волны, соответствующие этим числам, имеют экспоненциально затухающую амплитуду.

Поэтому при $\tau > \frac{1}{4}$ асимптотический вид функции φ следующий:

$$\varphi = 0 \quad \text{при } y \to +\infty$$

$$\varphi = \frac{2\pi i}{\sqrt{1+4\tau}}\left[e^{i\nu_3(x-\xi)} - e^{i\nu_4(\bar{x}-\xi)}\right] \quad \text{при } y \to -\infty \tag{6.11}$$

т. е. при $\tau > \frac{1}{4}$ позади источника образуются две системы отходящих назад волн. При $\tau \to \infty$ все волновые числа стремятся к нулю и, следовательно, волновой процесс исчезает. Объясняется это тем, что при $\tau = u\sigma / g = \infty$ величина g по сравнению с $u\sigma$ практически равна нулю и жидкость становится как бы невесомой.

Изложенным здесь методом легко указать решение в случае заданной системы перемещающихся и пульсирующих давлений на свободной поверхности. В самом деле, вместо условия (6.1) ($\beta = 0$) имеем

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = Q(y) \qquad \text{при } z = 0 \ |y| < a$$

где $Q(y)$ определяется через заданное распределение давлений на отрезке $(-a, +a)$.

Построим функцию $\chi(x, \bar{x})$, которая при $z = 0$ и $|y| > a$ обращается в нуль, а при $z = 0$ и $|y| < a$ функция $\chi = Q(y)$.

Легко убедиться, что эта функция имеет вид:

$$\chi(x, \bar{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{Q(\eta)}{x-\eta}\,d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{Q(\eta)}{\bar{x}-\eta}\,d\eta$$

Поэтому для функции $\varphi(x, \bar{x}) = \varphi_1(x) + \varphi_2(\bar{x})$ получаем следующие два уравнения:

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - i(2\tau-1)\frac{d\varphi_1}{dx} - \nu\varphi_1 = -\frac{i}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{Q(\eta)}{x-\eta}\,d\eta$$

$$\frac{\tau^2}{\nu}\frac{d^2\varphi_2}{d\bar{x}^2} - i(2\tau+1)\frac{d\varphi_2}{d\bar{x}} - \nu\varphi_2 = \frac{i}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{Q(\eta)}{\bar{x}-\eta}\,d\eta$$

которые разрешаются указанным выше способом.

Анологичным путем можно построить решение в случае перемещающегося и пульсирующего вихря.

В заключение заметим, что образование четырех типов бегущих волн в рассмотренных здесь случаях можно объяснить на основании следующих физических соображений. Из предыдущего видно, что в движущейся системе координат потенциалы скоростей этих волн пропорциональны выражениям

$$e^{\nu_{12}z+i(\sigma t-\nu_{12}y)}, \qquad e^{\nu_{34}z+i(\sigma t+\nu_{34}y)}$$

В неподвижной же системе координат частоты этих волн различны. Имеем $\sigma_{12}=\sigma+\nu_{12}u$ и $\sigma_{34}=\sigma-\nu_{34}u$, причем частоты σ_k связаны с волновыми числами ν_k известным соотношением $\sigma_k^2/g=\nu_k$, т. е.

$$\frac{(\sigma+\nu_{12}u)^2}{g}=\nu_{12}, \qquad \frac{(\sigma-\nu_{34}u)^2}{g}=\nu_{34}$$

При заданной частоте σ и скорости поступательного движения u эти соотношения являются квадратными уравнениями относительно ν_k, из которых определяются четыре волновых числа ν_1, ν_2, ν_3 и ν_4. Таким образом, возможность образования четырех типов бегущих волн тесно связана с дисперсными свойствами волн на поверхности тяжелой жидкости.

Поступила 6 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. Технические заметки ЦАГИ, № 52, 1935.
2. Кочин Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1939.
3. Хаскинд М. Д. Плоская задача об установившихся колебаниях крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Известия АН СССР, ОТН, № 11—12, 1942.
4. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля на волнении. ПММ, т. X, вып. 1, 1946.
5. Хаскинд М. Д. Колебания системы пластинок на поверхности тяжелой жидкости. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
6. Хаскинд М. Д. Колебания плавающего контура на поверхности тяжелой жидкости. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.
7. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. ПММ, т. IV, вып. 1, 1940.