

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
 УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Бау т и н

(Горький)

При качественном исследовании системы

$$\frac{dx}{dt} = x(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y) = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = y(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y) = Q(x, y) \quad (1)$$

встречающейся в ряде вопросов нелинейной теории колебаний [1-3], существенную трудность представляет выяснение вопроса о существовании предельных циклов.

Можно доказать отсутствие предельных циклов для траекторий системы (1), воспользовавшись замечанием Дюлака [4], гласящим, что если  $B(x, y)$  — произвольная однозначная и дифференцируемая функция, то замкнутый контур, составленный из траекторий, всегда пересекает кривую

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x} [B(x, y) P(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [B(x, y) Q(x, y)] = 0 \quad (2)$$

Задача будет решена, если удастся подобрать  $B(x, y)$  таким образом, чтобы кривая (2) не имела действительных ветвей в тех областях плоскости  $xy$ , в которых можно ожидать наличия предельных циклов. Для разыскания функции  $B(x, y)$  не существует, однако, регулярных приемов.

Легко проверить, что в рассматриваемом случае такой функцией будет

$$B(x, y) = x^{k-1} y^{h-1}$$

где

$$k = \frac{b_{01}(b_{10} - a_{10})}{\Delta}, \quad h = \frac{a_{10}(a_{01} - b_{01})}{\Delta} \quad \left( \Delta = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

В самом деле, тогда

$$D \equiv \frac{b_{00} a_{10} (a_{01} - b_{01}) + a_{00} b_{01} (b_{10} - a_{10})}{\Delta} B(x, y)$$

и, следовательно,  $D$  может обратиться в нуль только вдоль интегральных кривых  $x = 0$  и  $y = 0$ . При

$$\sigma \equiv b_{00} a_{10} (a_{01} - b_{01}) + a_{00} b_{01} (b_{10} - a_{10}) \neq 0$$

не существует поэтому в конечной части плоскости замкнутых контуров, составленных из траекторий системы (1). Заметим, что если  $\sigma = 0$ , то имеется целая область плоскости  $xy$ , целиком заполненная замкнутыми траекториями. Система (1) допускает в этом случае интеграл

$$xy [a_{00} a_{01}^2 y + (a_{00} a_{10} - a_{00} b_{10} + a_{10} b_{00}) (a_{01} x + a_{00})] B(x, y) = \text{const}$$

Поступила 23 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. М а у е р А. On the Theory of Coupled Vibrations of Two Self Excited Generators. Technical Physics of the USSR, vol. II, № 5, 1935.
2. М а у е р А. A Contribution to the Theory of Forced Oscillations in a Generator with Two Degrees of Freedom. Technical Physics of the USSR, vol. III, № 12, 1936.
3. Б у т е н и н Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. ПММ, т. VI, вып. 5, 1942.
4. D u l a c Н. Recherche des cycles limites. Comptes Rendus, 204, № 23, 1937.