Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

П. А. Кузьмин

(Казань)

В настоящей работе предложены две теоремы, относящиеся ко второй методе А. М. Ляпунова [1] в проблемах устойчивости движения. В отличие от теорем, где при построении функций Ляпунова привлекается вся окрестность невозмущенного движения, здесь могут быть использованы сколь угодно «узкие» части указанной окрестности. Идея этого приема заключена в известной теореме Н. Г. Четаева [2], являющейся наиболее общей при выявлении неустойчивых движений.

1°. Рассмотрим линейную систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с переменными (непрерывными, ограниченными) коэффициентами $p_{sj}(t)$.

Сохраняя смысл и обозначения функций Ляпунова, формулируем предложение.

Теорема 1. Если уравнения возмущенного движения таковы, что для некоторой определенно положительной функции V существует область $V' \leqslant 0$, в которой можно выделить n-мерную область $W \geqslant 0$, не пустую при численно сколь угодно малых x_s и при всех $t \geqslant t_0$ и такую, что на ее границе $W = 0$ будет всюду $W' \geqslant 0$, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. При $t = t_0$ в окрестности точки $\mathbf{A}(a_1, \ldots, a_n)$, взятой внутри $W > 0$, возьмем n точек $\xi^s(\xi_1^s, \ldots, \xi_n^s)$ $(s = 1, \ldots, n)$, определяющих n линейно независимых векторов

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{A} + \xi^s$$

и примем составляющие a_j^s этих векторов за начальные данные $x_{j0}^s = a_j^s$ фундаментальной системы решений $x_j^s = x_j^s(t)$ уравнений (1).

Докажем сначала, что если выбрать

$$(a_1^s)^2 + \cdots + (a_n^s)^2 < \varepsilon \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где ε — достаточно малое положительное число (по условию теоремы это возможно), то любое из движений $x_1^s, \ldots, x_n^s$ будет при $t > t_0$ удовлетворять условию

$$(x_1^s)^2 + \cdots + (x_n^s)^2 < \lambda \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

где λ — любое больше нуля наперед заданное число.

Прежде всего заметим, что это движение не может выйти за область $W > 0$ через границу $W = 0$, по крайней мере пока не нарушено условие

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant H$$

при котором определены все функции Ляпунова и условия теоремы.

Пусть далее

$$V \geqslant V_1$$

где $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ — определенно положительная функция, и пусть l есть наименьшее значение V_1 на сфере $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \lambda$. Выбором ε сделаем

$$V_0 = V(t_0, a_1^s, \ldots, a_n^s) < l$$

Движение $x_1^s, \ldots, x_n^s$ с такими начальными условиями не нарушит затем условие (2), так как пока удовлетворяются неравенства

$$W \geqslant 0, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant H$$

функция V не может возрастать, а достижение границы

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \lambda$$

требует, чтобы в этот момент стало $V_1 \geqslant l$, т. е. $V \geqslant l$.

Наконец, из формулы общего решения

$$x_j = C_1 x_j^1 + \cdots + C_n x_j^n \tag{3}$$

в силу доказанной ограниченности x_j^s следует, что любое движение $x_1, \ldots, x_n$ будет удовлетворять основным требованиям

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < \lambda \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

если модули всех постоянных C_s достаточно малы, т. е. если достаточно мала постоянная $\alpha > 0$, определяющая область начальных данных общего решения

$$x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2 < \alpha$$

Теорема 2. Если сверх условий теоремы 1 функция V допускает бесконечно малый высший предел, а функция V' в области $W \geqslant 0$ всюду, кроме начала координат, отрицательна и если для любого постоянного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется постоянное $l_1 > 0$ такое, что для области изменения переменных x_s и t

$$\varepsilon \leqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant H, \qquad W \geqslant 0, \qquad t \geqslant t_0 \tag{4}$$

будет иметь место условие $V' \leqslant -l_1$, то устойчивость будет асимптотической.

Доказательство. Здесь приводится, как и выше, аналитическое доказательство, хотя обе теоремы при геометрической интерпретации второй методы Ляпунова [3] почти очевидны.

Заметим сначала, что как бы ни было мало ε, любое из движений $x_1^s, \ldots, x_n^s$, соответствующих той же фундаментальной системе решений, в некоторый момент нарушит неравенства (4) (войдет внутрь сферы $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant \varepsilon$).

Действительно, допустив противное, из оценки

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V'\, dt \leqslant -l_1 (t - t_0)$$

найдем, что V может стать отрицательной, что невозможно.

Пусть теперь нам дана произвольно малая постоянная $\alpha > 0$ и пусть l есть наименьшее значение функции V_1 на сфере

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha$$

Выберем по заданному α такое $\varepsilon < \alpha$, чтобы при

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant \varepsilon$$

было $V \leqslant l$, что по свойствам функции V возможно.

Так как по доказанному переменные x_j^s войдут при некотором t^* внутрь сферы $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant \varepsilon$, то с этого момента V как убывающая функция останется меньше l, следовательно, после момента t^* переменные x_j^s не нарушат неравенства $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < \alpha$, так как достижение равенства $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha$ требует, чтобы стало $V_1 \geqslant l$, т. е. $V \geqslant l$, что невозможно.

Отсюда и из формулы (3) следует

$$\lim x_j = 0$$

Для тех задач, когда асимптотическая устойчивость первого приближения (для линейных уравнений) является достаточным условием устойчивости в точной задаче (для нелинейных уравнений), теорема 2 будет давать критерий устойчивости по первому приближению. Так будет, например, для уравнений возмущенного движения, линейной частью которых служат системы уравнений с постоянными коэффициентами или приводимые системы.

Приведенное доказательство обеих теорем легко переносится на нелинейные системы, если, конечно, подчинить начальные возмущения условиям невыхода из области $W > 0$, построенной для $t = t_0$, т. е. в случае некоторой условной устойчивости.

2°. Обе теоремы допускают обращение для приводимых систем. Нетрудно показать, что всякую приводимую систему линейным ляпуновским преобразованием, не изменяющим постановки задачи об устойчивости, можно привести к системе уравнений, состоящей из следующих типов групп:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1, & \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_2 y_1, & \ldots, & \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_s z_1 \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = \gamma x_1 + \lambda_1 x_2, & \dfrac{dy_2}{dt} = \gamma y_1 + \lambda_2 y_2, & \ldots, & \dfrac{dz_2}{dt} = \gamma z_1 + \lambda_s z_2 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{dx_{k_1}}{dt} = \gamma x_{k_1-1} + \lambda_1 x_{k_1}, & \dfrac{dy_{k_2}}{dt} = \gamma y_{k_2-1} + \lambda_2 y_{k_2}, & \ldots, & \dfrac{dz_{k_s}}{dt} = \gamma z_{k_s-1} + \lambda_s z_{k_s}
\end{array}$$

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n)$$

где γ — положительная постоянная, которая может предполагаться сколь угодно малой, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — корни характеристического уравнения приведенной системы, среди которых могут быть равные и которые могут предполагаться вещественными. (Если бы приведенная система оказалась с комплексными корнями, то в ее обычной канонической форме можно избавиться от членов, содержащих мнимые части корней, простым вращением осей.)

По смыслу обращения теоремы 1 при наличии нулевого, вообще кратного, корня, соответствующие этому корню группы уравнений будут содержать лишь по одному уравнению (отсутствие вековых членов), все же остальные корни отрицательны. Для теоремы 2 все корни отрицательны по предположению.

Далее для доказательства обращения обеих теорем достаточно в качестве функции V принять, например, сумму квадратов всех переменных $x, y, \ldots, z$, а в качестве области $W > 0$ — внутренность первого координатного угла $x_j > 0$, $y_j > 0, \ldots$ $\ldots, z > 0$. Используемые в теоремах свойства функций V и W сохраняют свое значение при указанных преобразованиях Ляпунова.

Поступила 10 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Ученые записки Казанского университета, т. 98, кн. 9, 1938.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1946.