**Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

**Н. Г. Четаев**

(Москва)

Пусть $A$, $B$, $C$ обозначают моменты инерции тела относительно главных осей $X$, $Y$, $Z$ эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки тела, $x$, $y$, $z$ — координаты центра тяжести тела.

Случай Лагранжа в движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой характеризуется соотношениями

$$A = B, \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z > 0$$

Пусть $m$ — масса тела, $g$ — ускорение силы тяжести, $p$, $q$, $r$ — проекции мгновенной угловой скорости твердого тела на оси $X$, $Y$, $Z$ соответственно, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ — направляющие косинусы вертикали с осями $X$, $Y$, $Z$.

Среди движений твердого тяжелого тела в случае Лагранжа практический интерес представляет частное решение

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = r_0, \qquad \gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = 1 \tag{1}$$

Устойчивость этого решения изучалась приближенно многими авторами; строго исследованы достаточные условия устойчивости угла нутации (между осью $Z$ волчка и вертикалью) и условная устойчивость. Можно рассмотреть вопрос о безусловной устойчивости этого движения (1) по отношению к функциям $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$.

Согласно прямому методу Ляпунова[1] устойчивость рассматриваемого частного решения (1) голономной консервативной системы может иметь место лишь при существовании знакоопределенного интеграла для вариаций переменных задачи[2].

В случае Лагранжа известны следующие первые интегралы:

$$\begin{gathered}
A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2mgz\gamma'' = h \\
A(p\gamma + q\gamma') + Cr\gamma'' = k \\
\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \\
r = r_0
\end{gathered} \tag{2}$$

Для возмущенного движения примем следующие обозначения для вариаций переменных:

$$\begin{aligned}
p &= \xi, & q &= \eta, & r &= r_0 + \zeta \\
r &= \alpha, & \gamma' &= \beta, & \gamma'' &= 1 + \delta
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения согласно (1) будут иметь следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
V_1 &= A(\xi^2 + \eta^2) + C(\zeta^2 + 2r_0\zeta) + 2mgz\,\delta \\
V_2 &= A(\xi\alpha + \eta\beta) + C(\zeta\delta + \zeta + r_0\delta) \\
V_3 &= \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta \\
V_4 &= \zeta
\end{aligned} \tag{3}$$

Функцию Ляпунова будем искать в квадратичной связке интегралов ($\lambda$ — параметр)

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - (mgz + Cr_0\lambda) V_3 + \frac{C(C-A)}{A} V_4^2 - 2(r_0+\lambda) CV_4 =$$
$$= A\xi^2 + 2\lambda A\xi\alpha - (mgz + Cr_0\lambda)\alpha^2 +$$
$$+ A\eta^2 + 2\lambda A\eta\beta - (mgz + Cr_0\lambda)\beta^2 +$$
$$+ \frac{C}{A}\zeta^2 + 2\lambda C\zeta\delta - (mgz + Cr_0\lambda)\delta^2$$

Чтобы первые две однотипные формы были положительными, необходимо и достаточно $\lambda$ выбрать так, чтобы был положительным дискриминант

$$\begin{vmatrix} A & A\lambda \\ A\lambda & -mgz - Cr_0\lambda \end{vmatrix} > 0$$

или

$$A\lambda^2 + Cr_0\lambda + mgz < 0 \tag{4}$$

что возможно при условии существования вещественных различных корней у стоящего в левой части квадратичного многочлена

$$C^2r_0^2 - 4Amgz > 0 \tag{5}$$

Последняя форма в выражении $V$ будет положительной, если положителен ее дискриминант

$$\begin{vmatrix} C^2/A & C\lambda \\ C\lambda & -mgz - Cr_0\lambda \end{vmatrix} > 0$$

т. е. если имеет место неравенство (4).

Следовательно, если удовлетворено одно условие (5), параметр $\lambda$ можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство (4). При таком выборе $\lambda$ три формы, входящие в $V$, будут положительными каждая относительно своих переменных, а интеграл $V$ будет определенно положительным относительно всех вариаций $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\alpha$, $\beta$, $\delta$. Согласно известной теореме Ляпунова об устойчивости[1] мы должны отсюда заключить об устойчивости частного решения (1) по отношению ко всем переменным $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, если

$$C^2r_0^2 - 4Amgz > 0$$

Поступила 23 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости. Харьков, 1892.
2. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.