Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОКОНТУРНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс регулирования в одноконтурной системе, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами, которая имеет следующую «цепочную» структуру:

$$d_\nu^{(1)}(p)\,x_\nu = d_\nu^{(2)}(p)\,x_{\nu-1} \qquad \left(\nu = 1, \ldots, m;\ \ x_0 = -x_m;\ \ p = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.1}$$

где все $d_\nu(p)$ — операторы вида $ap^2 + bp + c$.

Ограничимся случаем, когда в каждом из $d_\nu(p)$ коэффициенты a, b, c одновременно все не равны нулю, причем будем предполагать, поскольку это обычно имеет место в системах регулирования, что первый отличный от нуля (т. е. «старший») коэффициент в $d_\nu^{(1)}(p)$ и свободный член в $d_\nu^{(2)}(p)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ положительны.

Для каждого оператора $d_\nu(p)$ будем считать известным, какие из его коэффициентов a, b, c отличны от нуля. Знаки этих отличных от нуля коэффициентов будем считать заданными, а их абсолютные величины будем рассматривать как параметры, принимающие произвольные положительные значения[1]. Определение условий, при которых пространство этих параметров содержит область устойчивости, и составляет цель настоящей работы.

Характеристическое уравнение системы (1.1), как легко видеть, имеет вид[2]:

$$D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) = 0 \tag{1.2}$$

где

$$D^{(1)}(p) = d_1^{(1)}(p) \ldots d_m^{(1)}(p), \qquad D^{(2)}(p) = d_1^{(2)}(p) \ldots d_m^{(2)}(p)$$

Совокупность значений параметров, при которой все корни уравнения (1.2) имеют отрицательные действительные части, определяет в пространстве параметров точку, принадлежащую области устойчивости.

Нахождение области устойчивости в тех случаях, когда степень уравнения (1.2) сравнительно высока, а число параметров больше двух, связано с

---

[1] В системах автоматического регулирования знаки отличных от нуля коэффициентов определяются схемой системы, а абсолютные значения этих коэффициентов зависят от количественных характеристик элементов системы и связей между ними и могут поэтому изменяться в широких пределах без изменения схемы.

[2] Здесь и в дальнейшем в характеристическом уравнении буква p обозначает не оператор дифференцирования, а скалярную переменную.

очень громоздкими вычислениями. Между тем эти вычисления оказываются беспредметными в тех часто встречающихся случаях, когда пространство параметров рассматриваемой системы не содержит области устойчивости.

В связи с этим возникает задача об отыскании критериев, позволяющих по виду уравнения (1.1), т. е. по виду операторов $d_\nu^{(1)}(p)$, $d_\nu^{(2)}(p)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, определить, содержит ли пространство параметров данной системы область устойчивости.

С частными случаями этой задачи теория регулирования сталкивалась, начиная с И. А. Вышнеградского[1] и А. Стодола[2]. Попытка рассмотреть эту задачу для общего случая линейных систем была предпринята И. И. Гальпериным[1].

§ 2. Формулировка основных теорем. Для полинома $D^{(1)}(p)$ введем следующие обозначения: n_1 — степень этого полинома, σ — число нулевых, а τ — минимально возможное число[2] положительных действительных корней $D^{(1)}(p)$, λ_1 — число всех корней полинома $D^{(1)}(p)$, расположенных слева от мнимой оси. Аналогичные обозначения n_2, τ_2, λ_2 приняты для полинома $D^{(2)}(p)$. Сумма степеней полиномов $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ обозначается через n, т. е. $n_1 + n_2 = n$. В системах регулирования всегда $n_1 \geqslant n_2$. Это условие всюду в настоящей работе предполагается выполненым. Кроме того, определяем числа μ_1 и μ_2 из равенств

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2 = n_1$$

и полагаем $\rho_1 = [{}^1/_2\,\mu_1]$, где прямые скобки, как обычно, обозначают целую часть от указанного в них числа.

Условимся системы, не содержащие операторов $d_\nu^{(1)}(p)$, у которых одновременно $b \leqslant 0$, $c < 0$, и операторов $d_\nu^{(2)}(p)$, у которых одновременно $a < 0$, $b \leqslant 0$, называть *системами нормального типа*[3].

Предварительно сформулируем в введенных обозначениях и терминах уже опубликованную теорему[3] о существовании области устойчивости у одноконтурных систем, у которых $D^{(2)}(p) = \mathrm{const}$.

Теорема 1. Для того чтобы система с характеристическим уравнением (1.2) при $D^{(2)}(p) = \mathrm{const}$ имела область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы она была системой нормального типа и чтобы, кроме того, выполнялись следующие два неравенства:

$$\sigma + \tau_1 < 2, \qquad n_1 > 4\rho_1 \tag{2.1}$$

Переходя к общему случаю $D^{(2)}(p) \neq \mathrm{const}$, рассмотрим сначала системы нормального типа, у которых все $d_\nu^{(2)}(p)$ — полиномы с положи-

---

[1] Литературу по этому вопросу см.[3].

[2] То есть τ_1 — число множителей $d_\nu^{(1)}(p)$ с $c < 0$. Множители $d_\nu^{(1)}(p)$, у которых $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ также имеют положительные действительные корни, если $b^2 \geqslant ac$. Однако при невыполнении этого неравенства корни комплексные. Поэтому в число τ_1 корни множителей $d_\nu^{(1)}(p)$ с $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ не включаются.

[3] Весьма многие системы регулирования удовлетворяют этому условию.

тельными коэффициентами без пропуска членов (т. е. $ap^2 + bp + c$, $bp + c$ или c при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). В этом случае $D^{(2)}(p)$ — гурвицев полином, т. е. все его корни имеют отрицательные действительные части при произвольных положительных значениях всех параметров a, b, c.

Теорема 2. Для того чтобы у системы нормального типа с характеристическим уравнением $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) = 0$, где $D^{(2)}(p)$ — гурвицев полином, существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$n_2 \geqslant \sigma + \tau_1 - 1 \tag{2.2}$$

и одно из неравенств

	$n_2 = 0$	$n_2 > 0$ и четно	n_2 нечетно
μ_1 четно	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 1$	$n > 4\rho_1 - 2$
μ_1 нечетно	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 + 1$

(2.3)

выбираемое в зависимости от значений μ_1 и n_2.

Приложение этой теоремы для конкретных задач дается в § 5. Здесь для примера приведем четыре характеристических уравнения:

$$p(b_1p - c_1)(a_2p^2 + b_2p + c_2)(b_3p - c_3) + b_4p + c_4 = 0 \tag{2.4}$$

$$p(b_1p - c_1)\prod_{\nu=2}^{5}(a_\nu p^2 + b_\nu p + c_\nu)\prod_{\nu=6}^{9}(a_\nu p^2 + c_\nu) + (b_{10}p + c_{10})(b_{11}p + c_{11}) = 0 \tag{2.5}$$

$$p\prod_{\nu=1}^{3}(b_\nu p - c_\nu) + (a_4p^2 + b_4p + c_4)(b_5p + c_5) = 0 \tag{2.6}$$

$$p(a_1p^2 - b_1p + c_1)(b_2p + c_2) + b_3p + c_3 = 0 \tag{2.7}$$

В этих уравнениях все a, b, c предполагаются положительными параметрами.

Из теоремы 2 следует, что системы с характеристическими уравнениями (2.5) и (2.6) имеют область устойчивости, а системы с характеристическими уравнениями (2.4) и (2.7) не имеют этой области. В случае (2.4) не выполняется неравенство (2.2), а в случае (2.7) — соответствующее неравенство (2.3).

В теореме 2 предполагалось, что $D^{(2)}(p)$ — гурвицев полином. Откажемся теперь от этого предположения и рассмотрим некоторые классы систем, у которых полином $D^{(2)}(p)$ не является гурвицевым.

Теорема 3. Для того чтобы у системы нормального типа с характеристическим уравнением вида

$$D_0(p)p^\sigma + D^{(2)}(p) = 0 \tag{2.8}$$

где $D_0(p)$ — гурвицев полином, существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$n_2 \geqslant \sigma + \tau_2 - 1 \tag{2.9}$$

и одно из неравенств

	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 > 0$ и четно	λ_1 нечетно
μ_2 четно	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$
μ_2 нечетно	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$

(2.10)

выбираемое в зависимости от значений λ_1 и μ_2.

Для примера приведем характеристические уравнения

$$p^2 (b_1 p + c_1) + (-b_2 p + c_2)(b_3 p + c_3) = 0 \tag{2.11}$$

$$p^2(a_1 p^2 + b_1 p + c_1) + (-b_2 p + c_2)(-b_3 p + c_3)(b_4 p + c_4) = 0 \tag{2.12}$$

$$p^3 (a_1 p^2 + b_1 p + c_1) + (-b_2 p + c_2)(-b_3 p + c_3)(b_4 p + c_4) = 0 \tag{2.13}$$

где все a, b, c положительны.

Из теоремы 3 следует, что системы с характеристическими уравнениями (2.11) и (2.12) имеют область устойчивости, а система с характеристическим уравнением (2.13) не имеет такой области.

Теорема 4. Для того чтобы у системы нормального типа с характеристическим уравнением вида $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) = 0$ при выполнении условия

$$\sigma + \tau_1 < 2 \tag{2.14}$$

существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из неравенств

	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$ и четно		λ_2 нечетно	
		(А$_2$)	(Б$_2$)	(А$_2$)	(Б$_2$)
$\sigma + \tau_1 = 0$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 2$	$n > 4\rho_1 - 2$
$\sigma + \tau_1 = 1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 + 1$	$n > 4\rho_1 + 2$

(2.15)

выбираемое в зависимости от значений $\sigma + \tau_1$ и λ_2 и от наличия нормального (А$_2$) или особого (Б$_2$) случая.

Здесь нормальный случай (А$_2$) имеет место, когда хотя бы один из множителей в $D^{(2)}(p)$ является гурвицевым и особый случай (Б$_2$) — когда ни один из множителей в $D^{(2)}(p)$ не является таковым.

Например, согласно этой теореме из двух систем с характеристическими уравнениями

$$p(a_1 p^2 - b_1 p + c_1)(b_2 p + c_2) - a_3 p^2 + b_3 p + c_3 = 0 \tag{2.16}$$

$$p(a_1 p^2 - b_1 p + c_1)(b_2 p + c_2) + (-a_3 p^2 + b_3 p + c_3)(-b_4 p + c_4) = 0 \tag{2.17}$$

где все a, b, c положительны, только вторая система имеет область устойчивости.

Теорема 5. Для того чтобы у систем нормального типа с характеристическим уравнением вида $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) = 0$ при выполнении условия

$$n_1 - n_2 + \tau_2 < 2 \tag{2.18}$$

существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из неравенств

(2.19)

	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 > 0$ и четно		λ_1 нечетно	
		($А_1$)	($Б_1$)	($А_1$)	($Б_1$)
μ_2 четно	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$
μ_2 нечетно	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma$

выбираемое в зависимости от значений λ_1 и μ_2 и наличия нормального ($А_1$) или особого ($Б_1$) случая.

Здесь имеет место нормальный случай ($А_1$), когда хотя бы один из множителей в $D^{(1)}(p)$ является гурвицевым, и особый случай ($Б_1$) — когда это не имеет места.

Так, условия теоремы выполняются для характеристического уравнения

$$p^3(a_1p^2 - b_1p + c_1) + (a_2p^2 + c_2)(b_3p + c_3)(b_4p + c_4) = 0 \qquad (2.20)$$

где все a, b, c положительны. Поэтому система с таким характеристическим уравнением имеет область устойчивости.

Теорема 6. Для того чтобы для системы с характеристическим уравнением

$$D^{(1)}(p) + Ap^2 + Bp + C = 0 \qquad (2.21)$$

где $C > 0$, а полином $D^{(1)}(p)$ не содержит множителей вида $ap^2 + bp + c$, у которых одновременно

$$a > 0, \qquad b \leqslant 0, \qquad c < 0$$

существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из неравенств

(2.22)

	$\sigma + \tau_1$	$B > 0$	$B = 0$	$B < 0$
$A > 0$	0	$n_1 > 4\rho_1 - 3$	$n_1 > 4\rho_1 - 2$	$n_1 > 4\rho_1 - 2$
	1	$n_1 > 4\rho_1 - 2$	$n_1 > 4\rho_1 - 2$	$n_1 > 4\rho_1 - 2$
	2	$n_1 > 4\rho_1 - 3$	—	—
	3	$n_1 > 4\rho_1 - 2$	—	—
$A = 0$	0	$n_1 > 4\rho_1 - 3$	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1 - 1$
	1	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1 - 1$
	2	$n_1 > 4\rho_1 - 3$	—	—
$A < 0$	0	$n_1 > 4\rho_1 - 4$	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1 - 1$
	1	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1$	$n_1 > 4\rho_1 - 1$
	2	$n_1 > 4\rho_1 - 4$	—	—

и чтобы сумма $\sigma + \tau_1$ имела лишь те значения, для которых в (2.22) указаны неравенства.

Рассмотрим в качестве примера на применение этой теоремы следующие четыре характеристических уравнения:

$$(b_1 p + c_1)(a_2 p^2 - b_2 p + c_2)(a_3 p^2 + c_3) + a_4 p^2 + b_4 p + c_4 = 0 \tag{2.23}$$

$$(b_1 p + c_1)(a_2 p^2 - b_2 p + c_2)(a_3 p^2 + c_3) - a_4 p^2 + b_4 p + c_4 = 0 \tag{2.24}$$

$$p^2 (a_1 p^2 + c_1)(b_2 p + c_2) + b_3 p + c_3 = 0 \tag{2.25}$$

$$p^2 (b_1 p + c_1)(b_2 p + c_2)(b_3 p - c_3)(a_4 p^2 - b_4 p + c_4) + a_5 p^2 + b_5 p + c_5 = 0 \tag{2.26}$$

Уравнения (2.24) и (2.26) удовлетворяют условиям теоремы, и соответствующие системы имеют область устойчивости. Системы с характеристическими уравнениями (2.23) и (2.25) не имеют области устойчивости. В этих примерах обращает на себя внимание следующее обстоятельство. Уравнения (2.23) и (2.24) имеют одинаковое $D^{(1)}(p)$ и отличаются только тем, что в (2.23) воздействие по второй производной включено положительно, а в (2.24) оно включено отрицательно. В этом случае переход от положительного воздействия по производной к отрицательному превращает систему без области устойчивости в систему, имеющую эту область.

Следующая теорема дает условия, необходимые (но недостаточные) для существования области устойчивости у произвольной (не обязательно нормального типа) одноконтурной системы.

Теорема 7. Для того чтобы одноконтурная система с характеристическим уравнением (1.2) имела область устойчивости, необходимо (но недостаточно!), чтобы одновременно выполнялись следующие четыре неравенства:

(1). Неравенство

$$n_2 \geqslant \sigma + \tau_1 - 1 \tag{2.27}$$

в котором знак равенства может иметь место только при τ_2 четном.

(2). Неравенство

$$n_2 \geqslant \sigma + \tau_2 - 1 \tag{2.28}$$

в котором знак равенства может иметь место только при τ_1 четном.

(3). Одно из неравенств (2.29)

$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$ четно		λ_2 нечетно			
	$(а_2)$	$[(б_2), (в_2)]$	$(а_2)$	$(б_2)$	$(в_2)$	$(б_2)$ и $(в_2)$
$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 2$	$n > 4\rho_1 - 2$	$n > 4\rho_1 + 1$	$n > 4\rho_1 + 2$
$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 + 1$	$n > 4\rho_1 + 2$	$n > 4\rho_1 + 1$	$n > 4\rho_1 + 2$

выбираемое из первой строки для μ_1 четного и из второй строки для μ_1 нечетного и из соответствующей графы в зависимости от значений λ_2 и наличия при $\lambda_2 > 0$ нормального $(а_2)$ или особых $(б_2)$ и $(в_2)$ случаев; при этом к графе, обозначенной $[(б_2), (в_2)]$, относятся либо один из этих случаев, либо оба вместе.

Здесь имеет место нормальный случай $(а_2)$, когда хотя бы в одном из множителей в $D^{(2)}(p)$ произведение двух старших коэффициентов больше нуля и хотя бы в одном из этих множителей коэффициент при p положителен, особый случай $(б_2)$, — когда в каждом множителе в $D^{(2)}(p)$ произведение двух старших коэффициентов меньше или равно нулю, и, наконец, особый случай ($в_2$) — когда в каждом множителе полинома $D^{(2)}(p)$ коэффициент при p меньше или равен нулю[1].

(4). Одно из неравенств (2.30)

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 > 0$ четно		λ_1 нечетно			
	($а_1$)	[($б_1$), ($в_1$)]	($а_1$)	($б_1$)	($в_1$)	($б_1$) и ($в_1$)
$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2}$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2}$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2} - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma + 1)$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2} + 1$
$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2} - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}\sigma - 1$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2} - 1$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2}$	$\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma - 1)$	$\lambda_2 > \frac{\sigma}{2}$

выбираемое из первой строки для μ_2 четного и из второй строки для μ_2 нечетного и из соответствующей графы в зависимости от значения числа λ_1 и от наличия нормального ($а_1$) или особых ($б_1$), ($в_1$) случаев; при этом к графе, обозначенной [($б_1$), ($в_1$)], относятся либо один из этих случаев, либо оба вместе.

Здесь имеет место нормальный случай ($а_1$), когда хотя бы в одном из множителей полинома $D^{(1)}(p)$ произведение двух младших коэффициентов (свободного члена и коэффициента при p) больше нуля и хотя бы в одном из этих множителей коэффициент при p положителен; особый случай ($б_1$), когда в каждом множителе полинома $D^{(1)}(p)$ произведение двух младших коэффициентов меньше или равно нулю, и особый случай ($в_1$), когда в каждом множителе полинома $D^{(1)}(p)$ коэффициент при p меньше или равен нулю.

Примечание 1. Для систем ненормального типа неравенства (2.27) и (2.28) можно усилить, заменяя в них τ_1 и τ_2 соответственно на $\tau_1 + \varkappa_1$ и $\tau_2 + \varkappa_2$, где $\varkappa_1$ — число множителей полинома $D^{(1)}(p)$ вида $ap^2 + bp + c$, где

$$a > 0, \quad b \leqslant 0, \quad c < 0$$

а $\varkappa_2$ — число всех множителей в $D^{(2)}(p)$ вида $ap^2 + bp + c$, где

$$a < 0, \quad b \leqslant 0, \quad c > 0$$

Примечание 2. Для систем нормального типа при $\lambda_2 > 0$ случаи ($в_1$) и ($в_2$) невозможны.

Условия, сформулированные в теореме 7, не являются достаточными даже для произвольной системы нормального типа. Так, условиям теоремы 7 удовлетворяет система нормального типа с характеристическим уравнением

$$(a_1p^2 + b_1p + c_1)(a_2p^2 + c_2)p^4 + (a_3p^2 + b_3p + c_3)(a_4p^2 + c_4) = 0$$

где все a, b, c положительны и в то же время эта система не имеет области устойчивости.

В следующем параграфе будут рассмотрены некоторые вспомогательные понятия и предложения, необходимые для доказательства сформулированных теорем.

[1] При определении случаев ($а_2$), ($б_2$), ($в_2$) каждый двучлен $d_\nu^{(2)}(p)$ вида $ap^2 + c$ заменяется трехчленом $ap^2 + bp + c$, где $b = 0$.

§ 3. Некоторые вспомогательные предложения. 1°. Пусть в характеристическом уравнении (1.2) замкнутой одноконтурной системы

$$D^{(1)}(p) = D^{*}(p)\, p^{\sigma} \qquad [D^{*}(0) \neq 0]$$

Заменив p на p^{-1} и умножив обе части уравнения (1.2) на p^{n_1}, получим новое уравнение

$$\overline{D}^{(1)}(p) + \overline{D}^{(2)}(p) = 0 \tag{3.1}$$

где

$$\overline{D}^{(1)}(p) = D^{(2)}(p^{-1})\, p^{n_1} = \overline{D}^{*}(p)\, p^{n_1-n_2}, \qquad \overline{D}^{(2)}(p) = D^{*}(p^{-1})\, p^{n_1-\sigma} \tag{3.2}$$

Замкнутую одноконтурную систему, имеющую уравнение (3.1) своим характеристическим уравнением, будем называть *взаимной* для исходной системы. Так как подстановка $p' = p^{-1}$ переводит левую полуплоскость комплексного переменного p в самое себя, то полиномы $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ и $\overline{D}^{(1)}(p) + \overline{D}^{(2)}(p)$ могут лишь одновременно быть полиномами Гурвица, т. е. взаимные системы либо одновременно имеют область устойчивости, либо одновременно не имеют ее.

2°. Для систем с характеристическим уравнением (1.2) составим так называемую амплитудно-фазовую характеристику, т. е. годограф

$$z = F(i\omega) = \frac{D^{(1)}(i\omega)}{D^{(2)}(i\omega)} \qquad (0 \leqslant \omega < +\infty) \tag{3.3}$$

Рассмотрим в комплексной z-плоскости точки пересечения амплитудно фазовой характеристики с действительной осью. Будем говорить, что в какой-либо из этих точек имеет место подъем или спуск в зависимости от того, проходит ли годограф $z = F(i\omega)$ в этой точке при возрастании ω из нижней z-полуплоскости в верхнюю или наоборот. Число подъемов и спусков, при $\omega > 0$, расположенных на отрезке $-1 < z \leqslant 0$, обозначим соответственно через P и Q. Кроме того, введем в рассмотрение число ε, равное $+1$ или -1, если на этом отрезке имеется подъем или соответственно спуск при $\omega = 0$. Если точка годографа $z_0 = F(0)$ не лежит на отрезке $-1 < z \leqslant 0$, то положим $\varepsilon = 0$.

Тогда согласно известному критерию (см., например, [3], стр. 237) при $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$ для замкнутой одноконтурной системы существует область устойчивости в том и только в том случае, когда можно указать такие значения параметров, входящих в $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$, при которых амплитудно-фазовая характеристика проходит так, что точка $z = -1$ не лежит на характеристике и

$$\mu_1 = 2(P - Q) + \varepsilon \tag{3.4}$$

где μ_1 — общее число корней полинома $D^{(1)}(p)$, расположенных на мнимой оси и справа от нее.

3°. Для доказательства основных теорем нам понадобятся следующие леммы, сводящие вопрос о существовании области устойчивости для одной системы к такому же вопросу для другой.

Лемма 1. Если в характеристическом полиноме некоторой системы $\Phi(p)$ можно, не снижая его степени, обратить в нуль некоторые параметры так, чтобы упрощенный полином $\Phi^{\times}(p)$ был характеристическим для системы, имеющей область устойчивости, то и система с характеристическим полиномом $\Phi(p)$ также имеет область устойчивости.

Доказательство. Если при некоторых значениях параметров $\Phi^{\times}(p)$ — полином Гурвица, то при тех же значениях этих параметров и при малых значениях «аннулированных» параметров в силу соображений непрерывности и исходный полином $\Phi(p)$ будет полиномом Гурвица. Лемма доказана.

Лемма 2. Если в характеристическом полиноме

$$\Phi(p) \equiv D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) = a_m + a_{m-1}p + \cdots \tag{3.5}$$

при нулевых значениях некоторых основных параметров и каких-либо положительных значениях остальных параметров свободный член $a_m^{\circ} = 0$, а $a_{m-1}^{\circ} > 0$ и соответствующий полином $p^{-1}\Phi^{\circ}(p)$ является полиномом Гурвица, а при малых положительных значениях аннулированных параметров и при тех же значениях остальных $a_m a_{m-1} > 0$, то и исходный полином при некоторых положительных значениях всех основных параметров будет гурвицевым.

Доказательство. Значения параметров, при которых $a_m^{\circ} = 0$, можно рассматривать как предельные. При этих значениях параметров один из корней характеристического уравнения $\Phi^{\circ}(p) = 0$ обращается в нуль, а остальные корни этого уравнения имеют по условию отрицательные действительные части. Поэтому из соображений непрерывности при допредельных малых положительных значениях параметров уравнение $\Phi(p) = 0$ имеет $m - 1$ корней в левой полуплоскости и один «малый» по модулю корень. Поскольку главная часть этого малого корня определяется из уравнения $a_m + a_{m-1}p = 0$, то и этот малый корень при допредельных значениях параметров будет находиться в левой полуплоскости. Лемма доказана.

§ 4. Доказательства основных теорем. Начнем с последней теоремы 7, поскольку из нее вытекает необходимость условий во всех предыдущих теоремах.

1° **Доказательство теоремы 7.** Доказательство будет проведено, если мы покажем, что для произвольной, имеющей область устойчивости одноконтурной системы с характеристическим уравнением (1.2) всегда имеют место условия (1) и (3) теоремы, так как условия (2) и (4) выражают собой условия (1) и (3) для взаимной системы с характеристическим уравнением (3.1). Действительно, из неравенства

$$\bar{n}_2 \geqslant \bar{\sigma} + \bar{\tau}_1 - 1$$

в котором знак равенства может иметь место лишь при $\bar{\tau}_2$ четном, получим после подстановки

$$\bar{n}_2 = n_1 - \sigma, \qquad \bar{\sigma} = n_2 - n_1, \qquad \bar{\tau}_1 = \tau_2, \qquad \bar{\tau}_2 = \tau_1$$

неравенство (2.28), выражающее условие (2) теоремы.

Точно так же для взаимной системы из условия (3) теоремы

$$\overline{n} > 4\overline{\rho}_1 + \eta$$

где η имеет значения $\pm 1,0$, ± 2 в соответствии с (1.29), находим

$$2n_1 - \sigma > 4\,[{}^1\!/_2\,\mu_2] + \eta$$

Отсюда, поскольку $\mu_2 = n_1 - \lambda_2$, легко получаем $\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma + \eta)$ для μ_2 четного, $\lambda_2 > \frac{1}{2}(\sigma + \eta) - 1$ для μ_2 нечетного.

Давая здесь η значения в соответствии с (2.29), получим неравенства (2.30).

Переходим к выводу условия (1) теоремы 7. Не нарушая общности доказательства, можно на основании леммы 1 в $D^{(1)}(p)$ заменить p^σ на

$$\prod_{\nu=1}^{\sigma}(b_\nu p + c_\nu) \qquad (c_\nu < 0;\quad \nu = 1, \ldots, \sigma)$$

и каждый множитель в $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ вида $ap^2 + c$ на $ap^2 + bp + c$, где $b < 0$. Пусть теперь $G(p) = D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ будет при некоторых значениях параметров гурвицевым полиномом. Поскольку после сделанной замены полином $D^{(1)}(p)$ имеет $\sigma + \tau_1$ положительных корней, то по теореме Ролля его производная порядка $\sigma + \tau_1 - 1$, т. е. $\{D^{(1)}(p)\}^{(\sigma+\tau_1-1)}$, при некотором $p_0 > 0$ обращается в нуль. Поскольку у полинома $G(p)$ все коэффициенты положительны, а $n_1 \geqslant \sigma + \tau_1$, то

$$\{D^{(2)}(p)\}^{(\sigma+\tau_1-1)}_{p=p_0} = G^{(\sigma+\tau_1-1)}(p_0) - \{D^{(1)}(p)\}^{(\sigma+\tau_1-1)}_{p=p_0} > 0$$

Отсюда получаем в качестве необходимого условия $n_2 \geqslant \sigma + \tau_1 - 1$. Кроме того, при $n_2 = \sigma + \tau_1 - 1$ старший коэффициент в $D^{(2)}(p)$ должен быть положителен, т. е. τ_2 — четное число. Таким образом, условие (1) теоремы 7 имеет место.

Переходим к условию (3). Вместо амплитудно-фазовой характеристики (3.3) рассмотрим «сдвинутый» годограф

$$H(i\omega) = F(i\omega) + 1 = \frac{G(i\omega)}{D^{(2)}(i\omega)} = \frac{G(i\omega)\,D^{(2)}(-i\omega)}{|D^{(2)}(i\omega)|^2} = \frac{\Psi(i\omega)}{|D^{(2)}(i\omega)|^2} \tag{4.1}$$

где согласно условию $G(p) = D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ есть гурвицев полином, а $\Psi(p) = G(p)\,D^{(2)}(-p)$ — некоторый полином степени $n = n_1 + n_2$.

При определении точек пересечения годографа с действительной осью можно $F(i\omega)$ заменить на $\Psi(i\omega)$. Если $\Psi(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$, то эти пересечения определяются действительными корнями уравнения $V(\omega) = 0$.

Число пересечений амплитудно-фазовой характеристики с действительной осью при $\omega > 0$ обозначим через N, а число подъемов среди этих точек пересечения через M. Поскольку степень полинома $\Psi(p)$ равна n, а степень $V(\omega)$ совпадает с тем из чисел n и $n-1$, которое является нечетным, и $V(\omega) = \omega V_0(\omega^2)$, то

$$N \leqslant [{}^1\!/_2\,(n-1)] \tag{4.2}$$

Если в начале годографа $F(i\omega)$ при $\omega = 0$ имеется подъем или спуск, то M соответственно равно

$$M = [{}^1/_2 N] \quad \text{или} \quad M = [{}^1/_2 (N + 1)] \tag{4.3}$$

Так как

$$\rho_1 = [{}^1/_2 \mu_1]$$

то в силу амплитудно-фазового критерия (3.4), учитывая, что $P \leqslant M$, $Q \geqslant 0$, имеем

$$\rho_1 \leqslant M \tag{4.4}$$

Кроме того, при μ_1 четном необходимо $\varepsilon = 0$, а при μ_1 нечетном $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$. Если $\varepsilon = -1$, то неравенство (4.4) заменяется неравенством

$$\rho_1 + 1 \leqslant M \tag{4.5}$$

Замечание 1. В начале годографа (при $\omega = 0$) будет подъем, если коэффициент при первой степени p в $\Psi(p)$ положительный, и спуск, если он отрицательный.

Поэтому, если $\lambda_2 = 0$, то в начале годографа всегда будет подъем. Кроме того, при выводе условия (3) теоремы 7 будем при μ_1 нечетном разбирать лишь случай начального подъема и исходить из (4.4), поскольку это неравенство имеет место и при начальном спуске ($\varepsilon = -1$), так как неравенство (4.4) следует из неравенства (4.5).

Замечание 2. Пусть $\theta = \arg H(i\omega) = \arg \Psi(i\omega)$. Здесь $\theta = 0$ при $\omega = 0$, так как из (4.1) имеем $H(0) = G(0) / D^{(2)}(0)$, где $G(0) > 0$ и $D^{(2)}(0) > 0$.

Приращение $\Delta\theta$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ определяется формулой

$$\Delta\theta = (n - 2\lambda_2) \frac{1}{2} \pi$$

Пусть n — нечетное число. В этом случае конец годографа $H(i\omega)$ (а значит, и $F(i\omega)$) будет находиться над или под действительной осью в зависимости от того, будет ли $n - 2\lambda_2 = 4s + 1$ или $n - 2\lambda_2 = 4s + 3$, где s — целое число. Поэтому в первом случае N при начальном подъеме должно быть четным, а при начальном спуске нечетным числом, и наоборот во втором случае (при $n - 2\lambda_2 = 4s + 3$).

Пусть теперь n — четное число. Условимся говорить, что годограф $H(i\omega)$ имеет *прямой* (*обратный*) *хвост*, если, начиная с некоторого достаточно большого значения ω, аргумент θ все время монотонно возрастает (соответственно убывает). При этом прямой хвост будет в том случае, когда в $\Psi(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots$ два старших коэффициента a_0 и a_1 имеют одинаковые знаки, и обратный — когда эти коэффициенты имеют разные знаки.

При $n - 2\lambda_2 = 4s$ (s — целое число) направление радиуса-вектора годографа $z = H(i\omega)$ при $\omega \to \infty$ стремится совпасть с направлением положительной, а при $n - 2\lambda_2 = 4s + 2$ — с направлением отрицательной оси. При прямом хвосте в первом случае конец годографа $z = H(i\omega)$ расположен под, а во втором случае — над действительной осью. При обратном хвосте имеет место обратное положение. Далее, если конец годографа расположен над действительной осью, то при начальном подъеме (спуске) N должно быть четным (соответственно нечетным) числом. Если же конец годографа расположен под действительной осью, то имеет место обратное положение. Поэтому при n четном может: (1) выполняться равенство $n - 2\lambda_2 = 4s$ и (1а) равенство $n - 2\lambda_2 = 4s + 2$; (2) годограф может иметь прямой хвост или (2а) обратный хвост; (3) годограф может иметь начальный спуск или (3а) начальный подъем; наконец, (4) N может быть четным или (4а) нечетным.

Приведенные выше рассуждения показывают, что при четном n совместными являются только такие комбинации из этих восьми условий, в которых фигурирует четное число условий с индексом «а» (например, 1, 2, 3, 4, или 1а, 2, 3, 4а и т, д.).

При этом заметим, что у годографа $H(i\omega)$ (а, следовательно, и у $F(i\omega)$) всегда будет прямой хвост в особом случае ($б_2$), упоминаемом в тексте теоремы 7, когда в каждом из множителей $D^{(2)}(p)$ два старших коэффициента имеют разные знаки. В этом случае как в $G(p)$, так и в $D^{(2)}(-p)$, а значит, и в их произведении $\Psi(p)$, отношение двух старших коэффициентов будет положительным. Точно так же в особом случае ($в_2$) у годографа $H(i\omega)$ (а, следовательно, и у $F(i\omega)$) всегда будет начальный подъем, так как при этом в каждом множителе полинома $\Psi(p) = G(p)\,D^{(2)}(-p)$ свободный член и коэффициент при p положительны.

Опираясь на сделанные замечания, продолжим доказательство теоремы, рассмотрев порознь пять возможных вариантов.

Вариант 1. Пусть сначала $\lambda_2 > 0$ и четно, μ_1 четно и реализуется нормальный случай, оговоренный в тексте теоремы. Этот вариант характеризуется следующими четырьмя группами неравенств

$n =$	$N \leqslant$	при $\omega = 0$	$\rho_1 \leqslant M \leqslant$	$n \geqslant$
$4k$	$2k-1$	спуск	k	$4\rho_1$
$4k+1$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+1$
$4k+2$	$2k$	спуск	k	$4\rho_1+2$
$4k+3$	$2k+1$	подъем	k	$4\rho_1+3$

(4.6)

Из неравенств последнего столбца вытекает, что во всех строках $n \geqslant 4\rho_1$ и, следовательно, $n > 4\rho_1 - 1$.

Дадим некоторые пояснения относительно заполнения таблицы (4.6). При определении верхней границы для N исходим из неравенства (4.2). В рассматриваемом случае при n четном нет никаких ограничений на поведение годографа при $\omega \to +\infty$, поскольку два старших коэффициента в $\Psi(p) = G(p)\,D^{(2)}(-p)$ могут быть как одинаковых, так и противоположных знаков. Кроме того при $\lambda_2 > 0$ и нет особого случая ($в_2$), упоминаемого в (2.29). Поэтому при $\omega = 0$ может быть как начальный спуск, так и начальный подъем. Здесь рассматривается только случай начального спуска, поскольку при начальном подъеме всегда получается более сильное условие. Так, например, при $n = 4k$ и начальном подъеме $\rho_1 \leqslant M \leqslant \leqslant k-1$, откуда $k \geqslant \rho_1 + 1$ и $n \geqslant 4\rho_1 + 4$.

Если же n нечетно и $n = 4k+1$, то имеем $n - 2\lambda_2 = 4s + 1$ (s — целое число). Поэтому при начальном спуске N не может быть четным, т. е. либо имеет место начальный подъем и $N \leqslant 2k$, либо имеет место начальный спуск, но $N \leqslant 2k-1$. Оба варианта приводят к неравенству $M \leqslant k$. Аналогично рассматриваются случаи для $n = 4k+3$.

Вариант 2. Пусть теперь $\lambda_2 \geqslant 0$ и четно и при этом имеют место все случаи, оговоренные в тексте теоремы, за исключением рассмотренного случая ($а_1$) при $\lambda_2 > 0$ и μ_1 четном.

Этот вариант характеризуется неравенствами

$n =$	$N \leqslant$	при $\omega = 0$	$\rho_1 \leqslant M \leqslant$	$n \geqslant$
$4k$	$2k-1$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+4$
$4k+1$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+1$
$4k+2$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+2$
$4k+3$	$2k+1$	подъем	k	$4\rho_1+3$

(4.7)

Из неравенств последнего столбца вытекает, что $n \geqslant 4\rho_1 + 1$ и, следовательно, всегда $n > 4\rho_1$.

Вариант 3. Пусть далее λ_2 нечетно, μ_1 четно и реализуется нормальный случай ($а_2$) или особый ($б_2$). Для этого варианта

$n =$	$N \leqslant$	при $\omega = 0$	$\rho_1 \leqslant M \leqslant$	$n \geqslant$
$4k$	$2k-1$	спуск	k	$4\rho_1$
$4k+1$	$2k$	спуск	k	$4\rho_1+1$
$4k+2$	$2k$	спуск	k	$4\rho_1+2$
$4k+3$	$2k+1$	спуск	$k+1$	$4\rho_1-1$

(4.8)

Из неравенств последнего столбца следует, что всегда $n > 4\rho_1 - 2$.

Вариант 4. Пусть теперь λ_2 нечетно, μ_1 нечетно и реализуется нормальный случай ($а_2$); либо λ_2 нечетно, μ_1 любое, но имеет место особый случай ($в_2$). В этом варианте

$n =$	$N \leqslant$	при $\omega = 0$	$\rho_1 \leqslant M \leqslant$	$n \geqslant$
$4k$	$2k-1$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+4$
$4k+1$	$2k-1$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+5$
$4k+2$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+2$
$4k+3$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+3$

(4.9)

Из неравенств последнего столбца следует, что $n > 4\rho_1 + 1$.

Вариант 5. Пусть, наконец, λ_2 нечетно, μ_1 нечетно и имеет место особый случай ($б_2$); либо λ_2 нечетно, μ_1 любое и имеют место одновременно случаи ($б_2$) и ($в_2$).

$n =$	$N \leqslant$	при $\omega = 0$	$\rho_1 \leqslant M \leqslant$	$n \geqslant$
$4k$	$2k-2$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+4$
$4k+1$	$2k-1$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+5$
$4k+2$	$2k-1$	подъем	$k-1$	$4\rho_1+6$
$4k+3$	$2k$	подъем	k	$4\rho_1+3$

(4.10)

Из неравенств последнего столбца находим, что $n > 4\rho_1 + 2$.

Таким образом, условие (3) теоремы 7 выполнено и теорема доказана полностью.

Перейдем теперь к обоснованию примечания 1 к теореме 7.

Назовем индексом полинома $f(p)$ (степени n с положительным старшим коэффициентом) наименьшее целое число $k \geqslant 0$, обладающее тем свойством, что коэффициенты в $f(p)$ при степенях p^k, $p^{k+1}, \ldots, p^n$ все положительны. Индекс гурвицева полинома $G(p)$ всегда равен нулю.

Нетрудно проверить, что при умножении произвольного полинома $f(p)$ (с положительным старшим коэффициентом) на $bp + c$ или $a'p^2 + b'p + c'$ ($b > 0$, $c \leqslant 0$; $a' > 0$, $b' \leqslant 0$, $c \leqslant 0$) индекс увеличивается соответственно по крайней мере на одну или две единицы. Потому, заменяя в полиноме $D^{(1)}(p)$ множители вида ap^2+bp+c, где $b > 0$, $c < 0$, произведениями $(b_1p + c_1)(b_2p + c_2)$, где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, заключаем, что[1] индекс этого полинома $\nu \geqslant \sigma + \tau_1 + \varkappa_1$. Но при этом коэффициент при степени $p^{\nu-1}$ в $D^{(1)}(p)$ всегда меньше или равен нулю. Поэтому для того, чтобы в $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ все коэффициенты могли быть сделаны положительными, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$n_2 \geqslant \nu - 1 \geqslant \sigma + \tau_1 + \varkappa_1 - 1 \tag{4.11}$$

[1] Относительно определения $\varkappa_1$ см. примечание к теореме 7. на стр. 109.

Если $n_2 = \sigma + \tau_1 + \varkappa_1 - 1$, то $n_2 = \nu - 1$ и старший коэффициент в $D^{(2)}(p)$ должен быть больше нуля, т. е. τ_2 четно.

Мы получили требуемое примечанием 1 усиление условия (1) теоремы. Выписывая это усиление условия для взаимной системы, получим усиление условия (2).

2°. Доказательство теоремы 2. Необходимость условий теоремы 2 вытекает непосредственно из доказанной уже теоремы 7. Остается лишь доказать достаточность условий теоремы 2. Не нарушая общности доказательства, будем считать $\tau_1 = 0$, так как этого можно достигнуть, положив в $D^{(1)}(p)$ в каждом множителе вида $ap^2 + bp + c$, где $c < 0$ параметр c равным нулю (см. лемму 1).

После этого неравенство (2.2) теоремы 2 запишется так:[1]

$$n_2 \geqslant \sigma - 1 \tag{4.12}$$

и, поскольку μ_1 и σ будут числами одинаковой четности и $n_2 = \lambda_2$, группа неравенств (2.3) может быть представлена в виде:

	$n_2=0$	$n_2>0$ четно	n_2 нечетно
σ четно	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 - 1$	$n > 4\rho_1 - 2$
σ нечетно	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1$	$n > 4\rho_1 + 1$

(4.13)

Доказательство теоремы будем вести индуктивно относительно n_2.

При $n_2 = 0$ имеем $D^{(2)}(p) = \text{const}$ и условия теоремы дают неравенства $\sigma \leqslant 1$, $n > 4\rho_1$, которые, согласно теореме 1 обеспечивают существование области устойчивости для данной системы.

Пусть теперь $n_2 > 0$. Допустим, что теорема справедлива для систем, у которых степень полинома $D^{(2)}(p)$ меньше данного числа n_2. Рассмотрим раздельно четыре случая.

Случай 1. Пусть сначала n_2 и σ четные числа. Тогда из $n_2 \geqslant \sigma - 1$ следует $n_2 \geqslant \sigma$. Кроме того, в этом случае по условию $n > 4\rho_1 - 1$. Опираясь на лемму 1, положим в одном из множителей в $D^{(2)}(p)$ старший коэффициент равным нулю. Для новой системы

$$n_2^\times = n_2 - 1, \qquad n^\times = n - 1$$

а σ и ρ_1 сохраняют прежние значения. Из неравенств

$$n_2 \geqslant \sigma, \qquad n > 4\rho_1 - 1$$

следует, что

$$n_2^\times \geqslant \sigma - 1, \qquad n^\times > 4\rho_1 - 2$$

а из этих неравенств согласно допущению индукции, поскольку $n_2^\times < n_2$ и $n_2^\times$ нечетно, а σ четно, вытекает существование области устойчивости для упрощенной, а значит, в силу леммы 1, и для исходной системы.

Случай 2. Пусть теперь n_2 и σ — нечетные числа. Поступаем так же, как и в первом случае. Неравенства

$$n_2 \geqslant \sigma - 1, \qquad n > 4\rho_1 + 1$$

переходят в неравенства

$$n_2^\times \geqslant \sigma - 1, \qquad n^\times > 4\rho_1$$

обеспечивающие по индукции существование области устойчивости.

[1] Здесь σ равно сумме первоначальных σ и τ_1.

Случай 3. Пусть n_2 четное, а σ нечетное число. По условию $n > 4\rho_1$. Полагаем в одном из множителей полинома $D^{(2)}(p)$ свободный член равным нулю и сокращаем $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ на p. Это можно сделать в силу леммы 2, поскольку в исходной системе у полинома $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ при любых положительных значениях параметров свободный член и коэффициент при p положительны. В новой системе

$$n^\times = n - 2, \qquad n_2{}^\times = n_2 - 1, \qquad \sigma^\times = \sigma - 1, \qquad \rho_1{}^\times = \rho_1$$

Вместо неравенств $n_2 \geqslant \sigma - 1$, $n > 4\rho_1$ будем иметь неравенства

$$n_2{}^\times \geqslant \sigma^\times - 1, \qquad n^\times > 4\rho_1{}^\times - 2$$

По допущению индукции полученная система, а значит и первоначальная, имеет область устойчивости.

Случай 4. Пусть, наконец, n_2 нечетное, а σ четное число. По условию $n > 4\rho_1 - 2$. Мы можем считать $\sigma \geqslant 2$. Действительно, если $\sigma = 0$ (но $\rho_1 > 0$), то на основании леммы 1 один из множителей $d_\nu^{(1)}(p)$ вида $ap^2 + bp + c$, где $a > 0$, $b \leqslant 0$, $c > 0$, заменим на ap^2. Тогда σ станет равно двум. Условие $n_2 \geqslant \sigma - 1$ будет соблюдаться, поскольку $n_2 \geqslant 1$, а условие $n > 4\rho_1 - 2$ не изменяется. Если же $\sigma = 0$ и $\rho_1 = 0$, $D^{(1)}(p)$ — полином Гурвица и при достаточно малых значениях, параметров, входящих в $D^{(2)}(p)$, полином $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ также будет гурвицевым.

Итак, пусть $\sigma \geqslant 2$. Тогда, как и в третьем случае, полагаем в одном из множителей $d_\nu^{(2)}(p)$ свободный член равным нулю и сокращаем $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ на p. Для новой системы

$$n_2{}^\times = n_2 - 1, \qquad n^\times = n - 2, \qquad \sigma^\times = \sigma - 1, \qquad \rho_1{}^\times = \rho_1 - 1$$

Неравенства $n_2 \geqslant \sigma - 1$, $n > 4\rho_1 - 2$ заменяются неравенствами

$$n_2{}^\times \geqslant \sigma^\times - 1, \qquad n^\times > 4\rho_1{}^\times$$

Тогда выполняется условие теоремы для $n_2{}^\times$ четного и $\sigma^\times$ нечетного, и поэтому согласно допущению индукции существует область устойчивости. Теорема 2 доказана полностью.

3°. Доказательство теоремы 3. Теорема 3 получается непосредственно из теоремы 2, если последнюю применить к взаимной системе, поскольку условия теоремы 3 для данной системы представляют собой, как легко проверить, иную форму условий теоремы 2 для взаимной системы (см. стр. 111 — 112).

4°. Доказательство теоремы 4. Необходимость условия теоремы вытекает из теоремы 7. Остается доказать достаточность. При этом в силу леммы 1, не нарушая общности, можем считать $\tau_1 = 0$, а $\sigma \leqslant 1$ и полиномы $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ взять в виде

$$\begin{gathered} D^{(1)}(p) = G_1(p) \prod_{\nu=1}^{\rho_1} (p^2 + \omega_\nu^2)\, p^\sigma \\ D^{(2)}(p) = G(p) \prod_\nu (a_\nu p^2 + c_\nu) \prod_g (-b_g' p + c_g') \prod_h (-a_h'' p^2 + b_h'' p + c_h'') \end{gathered} \tag{4.14}$$

где $G(p)$ и $G_1(p)$ — полиномы Гурвица, а все ω, a, b, c — положительные параметры.

Пусть сначала $\sigma = 1$. Мы можем положить равными нулю в $D^{(2)}(p)$ два параметра c_g' или один параметр c_ν и сократить $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ на p. Это можно сделать в силу леммы 2, поскольку в исходной системе в $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p) \equiv a_n + a_{n-1}p + \cdots$ отношение двух последних коэффициентов a_n и a_{n-1} при малых положительных значениях аннулируемых параметров будет положительным. В полученной системе заменим одно из ω_ν нулем и снова сократим на p. В результате всех этих операций над $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ приходим к новой системе с характеристическим уравнением $D^{\times(1)}(p) + D^{\times(2)}(p) = 0$, причем

$$n^\times = n - 4,\ \rho_1^\times = \rho_1 - 1,\ \lambda_1^\times = \lambda_1,\ \mu_1^\times = \mu_1 - 2,\ n_2^\times = n - 2,\ \lambda_2^\times = \lambda_2$$

Вместо двух c_g' или одного c_ν мы можем аннулировать два параметра c_h'' или два последних коэффициента в $G(p)$ или одно c_h'' и свободный член в $G(p)$. Но тогда $\lambda_2^\times = \lambda_2 - 2$.

Как в первом, так и во втором случае легко проверяется, что для новой системы снова выполняются условия теоремы.

Повторяя указанные процессы, придем к одному из следующих пяти случаев:

$$(1)\quad \rho_1 = 0,\qquad (2)\quad D^{(2)}(p) \equiv G_0(p),\qquad (3)\quad D^{(2)}(p) = G_0(p)(-b'p + c')$$

$$(4)\qquad D^{(2)}(p) \equiv -a''p^2 + b''p'' + c''$$

$$(5)\qquad D^{(2)}(p) \equiv (-b'p + c')(-a''p^2 + b''p + c'')$$

где

$$G_0(p) \equiv c \quad \text{или} \quad G_0(p) \equiv bp + c \quad (\text{все } a,\ b,\ c > 0)$$

В случае (1) система имеет область устойчивости в силу теоремы 3. Точно так же случай (2) исчерпывается теоремой 2. В случае (4) мы можем положить $a'' = b'' = 0$. При этом n уменьшится на два и потому вместо условия $n > 4\rho_1 + 2$ будем иметь неравенство $n > 4\rho_1$. Существование области устойчивости обеспечивается теоремой 1. Полагая $a'' = b'' = 0$, мы случай (5) сводим к случаю (3) (при этом неравенство $n > 4\rho_1 + 2$ заменяется неравенством $n > 4\rho_1$). Наконец, если в случае (3) $G_0(p) \equiv bp + c$, то мы можем положить $b = 0$, поскольку, как легко проверить, из условия теоремы при $b > 0$ вытекает условие теоремы для случая, когда $b = 0$.

Итак, нам осталось доказать существование области устойчивости у системы, для которой [1]

$$D^{(2)}(p) = -b'p' + c'$$

В этом случае

$$F(i\omega) = F_0(i\omega) \prod_{\nu=1}^{\rho_1} (\omega_\nu^2 - \omega^2)$$

[1] См., например, [3], стр. 216.

где

$$F_0(i\omega) = \frac{G_1(i\omega)}{c' - i\omega b'} i\omega = \frac{G^*(i\omega)}{|c' - i\omega b'|^2} i\omega$$

а $G^*(p) = G_1(p)(b'p + c')$ — полином Гурвица степени $\lambda_1 + 1$.

Построим годограф $F_0(i\omega)$ $(0 \leqslant \omega < +\infty)$. Начальное значение аргумента $\theta = \arg F_0(i\omega)$ будет равно $\frac{1}{2}\pi$ и $\Delta\theta = (\lambda_1 + 1)\frac{1}{2}\pi$. Аргумент θ монотонно растет с изменением[1] ω. Разместим на годографе $F_0(i\omega)$ точки со значениями аргумента $\omega_1, \omega_2, \ldots$ так, чтобы эти точки были соответственно в третьем, пятом, ..., квадрантах.

Максимальное число s точек, которые можно так разместить, определяется из неравенства $\lambda_1 + 2 > 2s$.

Отсюда следует, что $n = 2\rho_1 + \lambda_1 + 2 > 2\rho_1 + 2s$. С другой стороны, для рассматриваемого случая условие теоремы дает $n > 4\rho_1$. Сопоставляя, получаем $s = \rho_1$. В годографе $F(i\omega)$ каждой точке ω_ν будет соответствовать начальный подъем. Умножая подобранные значения b' и c' на достаточно малое положительное число, добьемся того, что остальные точки пересечения амплитудно-фазовой характеристики $z = F(i\omega)$ с действительной осью будут находиться вне отрезка $-1 < z \leqslant 0$. Тогда в силу амплитудно-фазового критерия полином $D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$ будет гурвицевым.

В предыдущем рассуждении предполагалось, что $\tau_1 = 0$, а $\sigma = 1$.

Пусть теперь $\tau_1 = \sigma = 0$. Покажем, что этот случай сводится к предыдущему.

При $\lambda_2 = 0$ (поскольку тогда $\lambda_1 > 0$) полагаем в одном из множителей в $G_1(p)$ свободный член равным нулю. После этого $\sigma = 1$, $n > 4\rho_1$ и, согласно уже доказанному, область устойчивости существует.

Случай $\lambda_2 > 0$ и четного сводится к случаю λ_2 нечетного, если в одном из множителей $G_1(p)$ положить старший коэффициент равным нулю. При этом n уменьшается на единицу и неравенства $n > 4\rho_1 - 1$ или $n > 4\rho_1$ переходят соответственно в неравенства $n > 4\rho_1 - 2$ или $n > 4\rho_1 - 1$, которые должны обеспечивать существование области устойчивости при λ_2 нечетном.

На случае, когда λ_2 — нечетное число, остановимся подробнее. Здесь $n > 4\rho_1 - 2$. Заменим нулями свободный член в одном из множителей в $G(p)$ и одно из чисел ω_ν. После этого сократим $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ на p. Согласно лемме 2 из существования области устойчивости полученной системы вытекает существование такой же области для исходной системы. Но для новой системы

$$\sigma^\times = 1, \quad \rho_1^\times = \rho_1 - 1, \quad n^\times = n - 2, \quad \lambda_2^\times = \lambda_2 - 1$$

и потому неравенство $n > 4\rho_1 - 2$ переходит в неравенство $n^\times > 4\rho_1^\times$, которое, как уже доказано, при $\sigma^\times = 1$ и λ_2 четном гарантирует существование области устойчивости.

Теорема 4 доказана полностью.

---

[1] См., например, [3], стр. 216.

5.° *Доказательство теоремы 5.* Теорема 5 получается из теоремы 4 путем перехода к взаимной системе.

6°. *Доказательство теоремы 6.* Необходимость условий теоремы вытекает из теоремы 7. Приступая к доказательству достаточности условий, в силу леммы 1 можно без нарушения общности положить $\tau_1 = 0$, соответственно увеличив σ. Доказанные ранее теоремы 2 и 4 позволяют утверждать существование области устойчивости системы при заданных условиях во всех случаях за исключением случаев

$$\sigma = 2, \quad A < 0, \quad B > 0, \quad C > 0 \tag{4.15}$$

$$\sigma = 0 \ \text{или} \ \sigma = 1, \quad A < 0, \quad B = 0, \quad C > 0 \tag{4.16}$$

$$\sigma = 0 \ \text{или} \ \sigma = 1, \quad A < 0, \quad B < 0, \quad C > 0 \tag{4.17}$$

В случае (4.15), пользуясь леммой 2, положим $C = 0$ и сократим $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ на p. Для новой системы

$$D^{(2)}(p) = Ap + B, \ A < 0 \ \text{и} \ \tau_1^{\times} = 0, \ \sigma^{\times} = 1, n_1^{\times} = n_1 - 1, \rho_1^{\times} = \rho_1 - 1.$$

Неравенство

$$n_1 > 4\rho_1 - 4$$

дает

$$n_1^{\times} > 4\rho_1^{\times} - 1$$

Мы пришли к случаю, когда система имеет область устойчивости в силу теоремы 4.

В случаях (4.16) и (4.17), пользуясь леммой 1, положим $A = 0$. После этого мы получим системы нормального типа, для которых неравенство $n_1 > 4\rho_1$ или соответственно $n_1 > 4\rho_1 - 1$ обеспечивают наличие области устойчивости в силу теорем 1 и 4.

Таким образом, теорема 6 доказана во всех случаях.

§ 5. Примеры. Рассмотрим систему автоматического регулирования неустойчивого объекта[1] при помощи регулятора, имеющего трехкаскадное усиление. Все три усилителя (сервомотора) астатические, но с выхода второго усилителя подана обратная связь на вход первого усилителя.

В линейном приближении уравнения движения системы подобного рода записываются так:

$$\begin{gathered}(b_1 p - c_1)\, x_1 = -k_1 x_5, \qquad (a_2 p^2 + b_2 p + c_2)\, x_2 = k_2 x_1 \\ b_3 p x_3 = k_3 x_2 - k_3' x_4, \qquad b_4 p x_4 = k_4 x_3, \qquad b_5 p x_5 = k_5 x_4\end{gathered} \tag{5.1}$$

где все a, b, c, k, k' — положительные величины, а $x_1, \ldots, x_5$ — обобщенные координаты соответственно регулируемого объекта, чувствительного элемента и всех трех сервомоторов.

Система (5.1) имеет характеристическое уравнение

$$(b_1 p - c_1)(a_2 p^2 + b_2 p + c_2)(a_3 p^2 + c_3)\, b_5 p + c = 0 \tag{5.2}$$

где

$$a_3 = b_3 b_4, \qquad c_3 = k_3 k_4, \qquad c = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$$

[1] Примером подобных объектов могут служить быстроходные дизельмоторы на режимах холостого хода и при малых нагрузках (при некоторых распространенных типах топливных насосов), турбовоздуходувки и иные турбомашины на некоторых режимах и т. д.

Система сведена к одноконтурной $D^{(2)}(p) = \text{const}$.

Используя теорему 1, убеждаемся в том, что эта система не имеет области устойчивости, так как не выполняется первое неравенство $\sigma + \tau_1 < 2$, требуемое условием этой теоремы. Система может быть стабилизирована введением воздействия по производной или введением дополнительных обратных связей. Будем интересоваться только первым случаем.

Предположим, что для стабилизации системы вводится положительное воздействие по первой производной в одном месте контура, т. е. характеристическое уравнение приобретает вид:

$$(b_1 p - c_1)(a_2 p^2 + b_2 p + c_2)(a_3 p^2 + c_3) b_5 p + bp + c = 0 \qquad (b > 0)$$

В этом уравнении

$$\mu_1 = 4, \quad \lambda_1 = \rho_1 = 2, \quad \sigma = \tau_1 = n_2 = \lambda_2 = 1, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 1, \quad n = 7, \quad \mu_2 = 5$$

Применяя теорему 2 или теорему 6, убеждаемся[1], что система имеет область устойчивости, так как выполняется как неравенство $n_2 \geqslant \sigma + \tau_1 - 1$, так и неравенство $n > 4\rho_1 - 2$.

Предположим теперь, что для увеличения чувствительности чувствительного элемента его демпфирование сделано пренебрежимо малым, и положим в связи с этим $b_2 = 0$. Тогда $\rho_1 = 3$, неравенство $n > 4\rho_1 - 2$ не выполняется, и, несмотря на введение воздействия по первой производной, система попрежнему не имеет области устойчивости.

Дополнительное введение воздействия по второй производной также не обеспечивает существования области устойчивости, так как характеристическое уравнение в этом случае имеет вид:

$$(b_1 p - c_1)(a_2 p^2 + c_2)(a_3 p^2 + c_3) b_5 p + ap^2 + bp + c = 0 \tag{5.3}$$

Здесь $n = 8$, $\rho_1 = 3$ и необходимое в силу теоремы 2 условие $n > 4\rho_1 - 1$ не выполняется.

Из теоремы 2 следует, что область устойчивости в этом случае существует только при $n_2 \geqslant 5$, т. е. при чрезвычайном усложнении системы.

Если бы система была статической, т. е. если бы третий сервомотор также имел обратную связь, то в характеристическом уравнении содержалось бы слагаемое

$$D^{(1)}(p) = (b_1 p - c_1)(a_2 p^2 + c_2)(a_3 p^2 + c_3)(b_5 p + c_5)$$

и тогда мы имели бы уже $\mu_1 = 5$ и для наличия области устойчивости требовалось бы $n_2 = 4$.

Покажем, что в этом же случае введение отрицательных воздействий по производной позволяет обойтись значением $n_2 = 3$.

Действительно, рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{gathered}(b_1 p - c_1)(a_2 p^2 + c_2)(a_3 p^2 + c_3)(b_5 p + c_5) + \\ + (-b_6 p + c_6)(-b_7 p + c_7)(-b_8 p + c_8) = 0\end{gathered} \tag{5.4}$$

В этом уравнении

$$\sigma = 0, \quad \tau_1 = \lambda_1 = 1, \quad n_2 = 3, \quad \mu_1 = 5, \quad n = 9, \quad \rho_1 = \tau_2 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_2 = 6$$

Применяя теорему 4, получаем в качестве необходимого и достаточного условия неравенство $n > 4\rho_1 - 1$, которое в данном случае выполняется.

---

[1] Теорема 4 не может быть использована, так как здесь $\sigma + \tau_1 = 2$.

§ 6. Математическая формулировка проблемы в общем случае. В предыдущих параграфах рассматривался важный случай систем, у которых характеристическое уравнение сводится к виду (1.2). Пример, рассмотренный в § 5 показывает, что такими системами могут быть не только одноконтурные системы.

В практике автоматического регулирования встречаются системы, у которых характеристическое уравнение имеет иной вид.

У таких систем левая часть характеристического уравнения уже не может быть представлена в виде

$$D^{(1)}(p) + D^{(2)}(p)$$

где каждый из полиномов $D^{(1)}(p)$ и $D^{(2)}(p)$ является произведением множителей вида

$$ap^2 + bp + c$$

Примерами такого рода могут служить системы со сложными внутренними обратными связями, системы автоматического регулирования нескольких связанных величин и т. д.

Ниже формулируется математическая задача, решение которой позволило бы исчерпать вопрос о существовании области устойчивости для линеаризированных систем автоматического регулирования любого вида.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ij} a_{ij} p^2 + \beta_{ij} b_{ij} p + \gamma_{ij} c_{ij})\, x_j = 0 \qquad \left(i = 1, \ldots, m;\ p = \frac{d}{dt}\right) \tag{6.1}$$

В этой системе a, b и c могут принимать любые положительные значения, а α, β и γ могут принимать только одно из значений $+1$, -1, или 0. Если задать все α, β и γ, то возможен один из следующих двух случаев: 1) при этих значениях α, β и γ пространство положительных параметров a, b, c будет содержать непустую область, точкам которой соответствуют системы (6.1), у которых все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, или 2) пространство положительных параметров a, b и c такой области содержать не будет.

Требуется определить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы реализовался первый из этих случаев.

В задачах теории регулирования в каждом уравнении системы (6.1) по крайней мере один из трех коэффициентов α_{ii}, β_{ii} и γ_{ii} отличен от нуля. Без ущерба для общности можно считать, что первый отличный от нуля из этих коэффициентов равен $+1$. Кроме того, обычно в задачах регулирования можно дополнительно ограничиться случаем, когда произведение всех

$$\gamma_{i,i-1}\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ \gamma_{10} = \gamma_{1m}) \text{ равно } +1.$$

Поступила 12 IX 1953

Московский физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия. Известия СПб. практического технологического института, т. I, 1877.
2. Стодола А. Принцип регулирования и американские инерционные регуляторы. Теория автоматического регулирования, серия «Классики науки». Изд. АН СССР, 1949.
3. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования двигателей. Гостехиздат, 1952.