Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Э. Я. Риекстыньш

(Рига)

В этой работе приводятся некоторые общие формулы для преобразования Лапласа, частные случаи которых можно найти в таблицах (см., например, [1]). Такие формулы могут оказаться полезными при решении дифференциальных уравнений параболического типа, в частности телеграфных уравнений в случае кабеля. При выводе этих формул применяется преобразование Эфроса и рассматриваются некоторые новые функции. В конце работы получена связь между применяемыми новыми функциями и функциями параболического цилиндра с целым отрицательным индексом.

1. А. М. Эфросом была установлена следующая формула [2]. Пусть

$$L^{-1}\{f(p)\} = F(t)$$

где символ L^{-1} означает обращение преобразования Лапласа. Тогда при некоторых дополнительных условиях имеет место

$$L^{-1}\{f(q(p))\,\psi(p)\} = \int_0^\infty F(x)\,\varphi(t, x)\,dx \tag{1.1}$$

Здесь $q(p)$ и $\psi(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ — аналитические функции, причем $\operatorname{Re} q(p) > 0$; при этих значениях p;

$$\varphi(t, x) = L^{-1}\{e^{-xq(p)}\psi(p)\}$$

причем предполагается, что L^{-1} существует.

В частном случае, если $q(p) = \sqrt{p}$, $\psi(p) = 1$, формула (1.1) даст [2]

$$L^{-1}\{f(\sqrt{p})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty F(2\tau\sqrt{t})\,e^{-\tau^2}\tau\,d\tau \tag{1.2}$$

Можно убедиться в том, что для справедливости формулы (1.2) достаточно существование таких положительных постоянных M и σ, чтобы при всех $t \geqslant 0$

$$|F(t)| \leqslant Me^{\sigma t}$$

Формулу (1.2) используем для нахождения

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = \Phi_n(\alpha, t) \tag{1.3}$$

где n — целое положительное, а $\alpha \neq 0$. В этом случае

$$F(t) = L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\alpha + p}\right)^n\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\alpha t}$$

и, очевидно, указанное выше неравенство имеет место. Поэтому по формуле (1.2) получаем

$$\Phi_n(\alpha, t) = \frac{2}{(n-1)!\,\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau^{n-1}(2\sqrt{t})^{n-1}\,e^{-2\alpha\tau\sqrt{t}}\,e^{-\tau^2}\tau\,d\tau$$

После подстановки $\alpha\sqrt{t}+\tau=u$ имеем

$$\Phi_n(\alpha,t)=\frac{2n(\sqrt{t})^{n-2}}{(n-1)!\sqrt{\pi}}e^{\alpha^2 t}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}(u-\alpha\sqrt{t})^n e^{-u^2}du=$$

$$=e^{\alpha^2 t}\frac{2^n(\sqrt{t})^{n-2}}{(n-1)!\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\alpha\sqrt{t})^k\binom{n}{k}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}u^{n-k}e^{-u^2}du \tag{1.4}$$

Интеграл в формуле (1.4) можно несколько раз проинтегрировать по частям. Таким образом, получается

$$\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}u^p e^{-u^2}\,du= \tag{1.5}$$

$$=e^{-\alpha^2 t}\left[\sum_{m=0}^{[{}^1/_2\,p]-2}\frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2m-1)}{2^{m+2}}(\alpha\sqrt{t})^{p-2m-3}+\frac{1}{2}(\alpha\sqrt{t})^{p-1}\right]+R_p$$

где

$$R_p=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}\,(p-1)\,!!}{2^{{}^1/_2\,p+1}}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t} & \text{при четном } p\\[2ex] \dfrac{(p-1)\,!!}{2^{{}^1/_2\,(p+1)}}e^{-\alpha^2 t} & \text{при нечетном } p\end{cases}\qquad \operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}e^{-u^2}du$$

2. В сумме (1.4) собираем сперва члены, которые содержат $\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$. Такие члены будут только при четных значениях значка p. Обозначая коэффициенты при $e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$ через $P_n(\alpha,t)$, имеем

$$P_n(\alpha,t)=\frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(n-1)!}\left[(2\alpha\sqrt{t})^n+\sum_{\nu=1}^{[{}^1/_2\,n]}\binom{n}{2\nu}(2\nu-1)!!\,2^{n-\nu}(\alpha\sqrt{t})^{n-2\nu}\right] \tag{2.1}$$

Многочлен в квадратных скобках отличается только знаками между членами от многочлена Чебышева — Эрмита $H_n(\alpha\sqrt{t})$. Обозначая его через $Hi_n(\alpha\sqrt{t})$, имеем следующее соотношение

$$Hi_n(x)=(-i)^n H_n(ix) \tag{2.2}$$

Таким образом, имеем, наконец

$$P_n(\alpha,t)=\frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(n-1)!}Hi_n(\alpha\sqrt{t}) \tag{2.3}$$

Из свойств многочлена $H_n(x)$ легко получаются свойства для $Hi_n(x)$. Так, например, имеем

$$Hi_n(x)=e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{x^2} \tag{2.4}$$

$$Hi_n'(x)=2n\,Hi_{n-1}(x) \tag{2.5}$$

$$Hi_n''(x)+2x\,Hi_n'(x)-2n\,Hi_n(x)=0 \tag{2.6}$$

$$Hi_{n+1}(x)=2x\,Hi_n(x)+2n\,Hi_{n-1}(x) \tag{2.7}$$

$$e^{-t^2}\cos 2tx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}Hi_{2k}(x)$$

$$e^{-t^2}\sin 2tx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}Hi_{2k+1}(x) \tag{2.8}$$

3. Собираем теперь остальные члены в сумме (1.4). Формула (1.5) показывает что все остальные члены содержат множитель $e^{-\alpha^2 t}$, который сокращается с множителем $e^{+\alpha^2 t}$ перед суммой.

Таким образом видно, что сумма остальных членов содержит только целые степени аргумента $\sqrt{t}$. Кроме того, она является функцией параметра α.

Обозначая эту функцию через $Q_n(\alpha, t)$, из формул (1.4) и (1.5) находим

$$Q_n(\alpha, t) = \frac{(2\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{[{}^1/_2 (n-1)]} \lambda_{nk} \left(\frac{1}{2\alpha^2 t}\right)^k \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1-2k} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu-1)(n-\nu-3)\ldots(n-\nu-2k+1) & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant [{}^1/_2 (n-1)] \\ (-1)^{n-1} & \text{при } k=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

При большом n и малом k формулу (3.2) для вычисления коэффициентов λ_{nk} целесообразно представить в другом виде. Для этого надо использовать вспомогательное соотношение, которое получается из формулы бинома Ньютона при помощи индукции для $n > 2k$:

$$\left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}\right)^k (x-1)^n = \sum_{\nu=0}^{n-2k-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-1-\nu)(n-3-\nu)\ldots(n-2k+1-\nu)\, x^{n-2k-\nu} +$$

$$+ (-1)^{n-2k} \left\{ (2k-1)!! \left[\binom{n}{2k} + \frac{(-1)^k}{x^{2k}} \right] - \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \binom{n}{2k-2-2\nu} \frac{(2k-3-2\nu)!!\,(2\nu+1)!!}{x^{2+2\nu}} \right\}$$

Легко видеть, что при $n > 2k$ и $x = 1$ левая сторона формулы обращается в нуль. Поэтому при $k > 0$ имеем тождество

$$\lambda_{nk} = \sum_{\nu=0}^{n-2k-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-1-\nu)(n-3-\nu)\ldots(n-2k+1-\nu) = \tag{3.3}$$

$$= (-1)^{n-2k} \left\{ \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \binom{n}{2k-2-2\nu} (2k-3-2\nu)!!\,(2\nu+1)!! - (2k-1)!! \left[\binom{n}{2k} + (-1)^k \right] \right\}$$

$$(k > 0)$$

Эта формула полезна при малом k.

Таким образом, мы имеем следующую окончательную формулу:

$$\Phi_n(\alpha, t) = L^{-1}\left\{ \left(\frac{1}{\alpha + \sqrt{p}} \right)^n \right\} = P_n(\alpha, t)\, e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t} + Q_n(\alpha, t) \tag{3.4}$$

4. Можно получить также другое выражение для $\Phi_n(\alpha, t)$. Если брать производную по α в формуле (3.4), то получаем

$$\Phi_{n+1}(\alpha, t) = -\frac{1}{n}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\Phi_n(\alpha, t) \tag{4.1}$$

Но из формулы (3.4) непосредственно можно проверить, что

$$\Phi_1(\alpha, t) = -\frac{1}{2t}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t} \right)$$

Поэтому формула (4.1) дает следующее соотношение:

$$\Phi_n(\alpha, t) = \frac{(-1)^n}{2t\,(n-1)!}\,\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t} \right) \tag{4.2}$$

Из формулы (4.1) дальше следует

$$P_{n+1}(\alpha, t) = -\frac{1}{n}\left(\frac{\partial P_n}{\partial \alpha}(\alpha, t) + 2\alpha t P_n(\alpha, t)\right) \tag{4.3}$$

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, P_n(\alpha, t) - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_n(\alpha, t) \tag{4.4}$$

Применяя формулу (4.4) повторно, получаем

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{[{}^1/_2 n]} (-1)^\nu \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-\nu)} \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} P_{n-\nu}(\alpha, t) \tag{4.5}$$

В силу формул (2.3) и (2.5) имеем

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} P_{n-\nu}(\alpha, t) = \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-\nu-2}}{2(n-\nu-1)!} \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Hi_{n-\nu}(\alpha\sqrt{t}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-\nu-2}}{2(n-\nu-1)!} (\sqrt{t})^\nu 2^\nu (n-\nu)(n-\nu-1)\cdots(n-2\nu+1)\, Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-2} 2^{\nu-1}(n-\nu)}{(n-2\nu)!} Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t})$$

Подставляя это выражение в формулу (4.5), получаем

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = \frac{(-\sqrt{t})^n}{n!\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=0}^{[{}^1/_2 n]} 2^\nu \frac{(n-\nu)!}{(n-2\nu)!} Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t}) \tag{4.6}$$

Очевидно, $Q_{n+1}(\alpha, t)$ является многочленом от α и мы можем разложить его по степеням α по формуле Тейлора. Для этого из формулы (2.1) имеем

$$Hi_{2n}(0) = 2^n(2n-1)!!, \qquad Hi_{2n+1}(0) = 0 \tag{4.7}$$

При помощи этих соотношений и формулы (2.5) легко найти требуемое разложение. Ввиду того что разложение единственно и полученная формула должна совпадать с формулой (3.1), получаем еще следующее представление коэффициентов λ_{nk}:

$$\lambda_{nk} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1-2k)!} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-1-\nu)!}{2^{k-\nu}(k-\nu)!} \tag{4.8}$$

Если выражения для функций P_n и Q_n вычисляются постепенно, то удобно использовать также формулу (4.4).

5. При помощи функции $\Phi_n(\alpha, t)$ получим также некоторые другие формулы преобразования Лапласа. Формулы (2.3) и (4.6) показывают, что

$$P_n(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 3, \qquad Q_n(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 2$$

Поэтому при $n \geqslant 3$

$$\Phi_n(\alpha, 0) = 0$$

Таким образом, в силу свойства преобразования Лапласа при $n \geqslant 3$ имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.1}$$

Но можно применить также другой прием. Из тождества

$$\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n} = \frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-2}} - \frac{2\alpha}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\sqrt{p})^n}$$

следует

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\Phi_{n-2}(\alpha, t)-2\alpha\Phi_{n-1}(\alpha, t)+\alpha^2\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.2}$$

Сравнивая формулы (5.1) и (5.2), получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi_n(\alpha, 0)=0 \qquad \text{при } n\geqslant 3+2k \tag{5.3}$$

Поэтому при $n\geqslant 3+2k$ имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.4}$$

Надо отметить, что соотношение между n и k необходимо также для того, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках равенства (5.4), была изображением.

Подобным образом ввиду тождества

$$\frac{\sqrt{p}}{(\alpha+\sqrt{p})^n}=\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}}-\frac{\alpha}{(\alpha+\sqrt{p})^n}$$

и соотношения (5.3) имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p^k\sqrt{p}}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[\Phi_{n-1}(\alpha, t)-\alpha\Phi_n(\alpha, t)\right] \qquad (n\geqslant 2k+2) \tag{5.5}$$

Имеем еще соотношение

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}}=\frac{-(n-1)}{2\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n} \qquad (n\geqslant 2)$$

из которого согласно, свойству преобразования Лапласа, получается

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{2t}{n-1}\Phi_{n-1}(\alpha, t) \qquad (n\geqslant 2) \tag{5.6}$$

Левая часть формулы (5.6) имеет смысл также при $n=0$ и $n=1$. Для $n=1$ можно воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}=\frac{\alpha}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^{n+1}}+\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n+1}}$$

которое дает

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})}\right\}=2\alpha t\Phi_1(\alpha, t)+\Phi_2(\alpha, t)=e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$$

Кроме того, это тождество и формула (5.4) показывают, что имеет место следующая рекуррентная формула:

$$\Phi_{n+1}(\alpha, t)=\frac{2t}{n-1}\Phi_{n-1}(\alpha, t)-\frac{2\alpha t}{n}\Phi_n(\alpha, t) \qquad (n\geqslant 2) \tag{5.7}$$

6. Более сложно выразятся при помощи $\Phi_n(\alpha, t)$ оригиналы некоторых других изображеиий.

Легко видеть, что имеет место следующее разложение:

$$\frac{1}{p^m(\alpha+p)^n}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(-1)^\nu\binom{n+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{n+\nu}p^{m-\nu}}+(-1)^m\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\binom{m+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{m+\nu}(\alpha+p)^{n-\nu}}$$

Заменяя в этой формуле p на $\sqrt{p}$ и подставляя $m = 2k$ или $m = 2k+1$, получаем

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu} t^{k-1/2\nu-1}}{\alpha^{n+\nu}\,\Gamma(k-1/2\,\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\binom{2k+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{2k+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu} t^{k-1/2(1+\nu)}}{\alpha^{n+\nu}\,\Gamma(k+1/2(1-\nu))} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\binom{2k+\nu}{\nu}}{\alpha^{2k+\nu+1}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.2)$$

В частности, при $k=1$ из формулы (6.1) следует

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^{n+1}\sqrt{\pi t}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+1}{\alpha^{2+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.3)$$

Применяя формулу (5.7), последнюю формулу можно представить также в виде

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{1}{\alpha^n}\left[1 - e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}\right] - 2t\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Phi_{n-k}(\alpha, t)}{\alpha^k(n-k)} \quad (6.4)$$

Подобным образом при $\alpha \neq \beta$ из разложения

$$\frac{1}{(\alpha+p)^n(\beta+p)^m} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu\binom{m+\nu-1}{\nu}}{(\beta-\alpha)^{m+\nu}(\alpha+p)^{n-\nu}} + \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu\binom{n+\nu-1}{\nu}}{(\alpha-\beta)^{n+\nu}(\beta+p)^{m-\nu}}$$

следует

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^n(\beta+\sqrt{p})^m}\right\} = \sum_{\nu=0}^{n-} \frac{(-1)^\nu\binom{m+\nu-1}{\nu}}{(\beta-\alpha)^{m+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) + $$
$$+ \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu\binom{n+\nu-1}{\nu}}{(\alpha-\beta)^{n+\nu}} \Phi_{m-\nu}(\beta, t) \quad (6.5)$$

7. Имеем еще следующее разложение:

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu} \frac{\varkappa_{m\nu}^{(n)}}{p^{m-\nu}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\mu_{n\nu}^{(m)}\alpha^{n-m-\nu}}{(\alpha+p)^{n-\nu}}$$

где обозначено

$$\varkappa_{m\nu}^{(n)} = \frac{n}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{n+k-1}{\nu-1} \quad \text{при } \nu \neq 0, \qquad \varkappa_{m0}^{(n)} = 1$$

$$\mu_{n\nu}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu+m-k}\binom{m+k-1}{k}\binom{n}{\nu-k}2^{n-\nu+}$$

Из этого разложения при $m=2k$ или $m=2k+1$ получаем

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k}\left(\frac{\alpha-\sqrt{p}}{\alpha+\sqrt{p}}\right)^n\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu}\frac{\varkappa_{2k,\nu}^{(n)}}{\Gamma(k-1/2\,\nu)}t^{k-1/2\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\mu_{n\nu}^{(2k)}\alpha^{n-2k-\nu}\Phi_{n-\nu}(\alpha,t) \quad (7.1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}p^k}\left(\frac{\alpha-\sqrt{p}}{\alpha+\sqrt{p}}\right)^n\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k}\frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu}\frac{\varkappa_{2k+1,\nu}^{(n)}}{\Gamma(k-1/2(\nu-1))}t^{k-1/2(\nu+1)} + $$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1}\mu_{n\nu}^{(2k+1)}\alpha^{n-2k-1-\nu}\Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (7.2)$$

При $k = 1$ имеем

$$\mu_{n\nu}^{(2)} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{n}{k} (\nu + 1 - k) 2^{n-k} \tag{7.3}$$

и, следовательно,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha - \sqrt{p}}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = 1 - \frac{2n}{\alpha\sqrt{\pi t}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{n\nu}^{(2)} \alpha^{n-\nu-2} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \tag{7.4}$$

Формула (7.3) полезна для малых значений ν. Так, например, имеем

$$\mu_{n0}^{(2)} = 2^n, \qquad \mu_{n1}^{(2)} = 2^{n-1}(4 - n), \qquad \mu_{n2}^{(2)} = 2^{n-3}(n^2 - 9n + 24) \qquad \text{и т. д.}$$

Для значений ν, близких к n, можно получить другую формулу. Подставляя $\nu = n - m$, получаем

$$\mu_{n,n-m}^{(2)} = 2^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n - m - \nu + 1)\, 2^{n-m-\nu}$$

Если тождество

$$\frac{(x-1)^n}{x^{m-1}} = \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x^{n-\nu-m+1} +$$

$$+ (-1)^{n-m+1}\binom{n}{n-m+1} + \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu} x^{-m+1+\nu}$$

продифференцируем по x и потом подставим $x = 2$, то получается

$$\mu_{n,n-m}^{(2)} = 2n - m + 1 - \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(-m + 1 + \nu)\, 2^\nu \tag{7.5}$$

Из этой формулы имеем, например,

$$\mu_{n,n-1}^{(2)} = 2n, \qquad \mu_{n,n-2}^{(2)} = 2n - 1 + (-1)^n$$

$$\mu_{n,n-3}^{(2)} = 2(n-1)[1 - (-1)^n], \qquad \mu_{n,n-4}^{(2)} = 2n - 3 + (-1)^n [2n^2 - 6n + 3] \qquad \text{и т. д.}$$

Полученные выражения для коэффициентов позволяют формулу (7.4) представить также в другом виде, именно

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha - \sqrt{p}}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = 1 - 2ne^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t} + \sum_{k=0}^{n-2} \mu_{nk}^{(2)}\, \alpha^{n-k-2}\Phi_{n-k}(\alpha, t) \tag{7.6}$$

Подобным образом можно было найти и некоторые другие формулы.

8. Частные случаи некоторых из полученных формул при значениях $n = 1, 2, 3$ можно найти в справочнике Диткина и Кузнецова [1]. Оказывается, что формулы (2.13), (2.14) и (2.17) этой книги, повидимому, из-за опечаток неправильны.

Формула (2.18) также напечатана ошибочно и должна иметь вид:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(1 + \sqrt{p})^n}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t)^{1/2(n-1)} e^{1/2\, t} D_{-n}(\sqrt{2t}) \tag{8.1}$$

где $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра. Эта формула показывает, что существует связь между функцией $\Phi_n(\alpha, t)$ и функцией параболического цилиндра с целым отрицательным индексом. Но эту связь можно установить также без исполнения преобразования Лапласа.

Для целых неотрицательных значений n существует формула [3]

$$D_n(x) = (-1)^n e^{{}^1/_4 x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-{}^1/_2 x^2}$$

Исходя из интегрального представления $D_n(x)$, можно показать, что при целых отрицательных значениях значка $-n$ в этой формуле надо заменить

$$\frac{d}{dx^n} \qquad \text{на} \quad \left(\int\limits_{\infty}^{x} dv\right)^n$$

так что

$$D_{-n}(x) = e^{{}^1/_4 x^2} \left(\int\limits_{x}^{\infty} dv\right)^n e^{-{}^1/_2 v^2} = e^{{}^1/_4 x^2} \int\limits_{x}^{\infty} \frac{(v-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-{}^1/_2 v^2} d \qquad (8.2)$$

где n — целое положительное.

При помощи подстановки $v = u\sqrt{2}$ и формулы (1.4) легко получается соотношение

$$D_{-n}(x) = \frac{1}{n-} \sqrt{\frac{\pi}{}} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n-3} e^{-{}^1/_4 x^2} \Phi u = \left(\alpha, \frac{x^2}{2\alpha^2}\right)$$

Но ввиду того что D_{-n} не зависит от α, можно подставить $\alpha = x$. Таким образом, имеем

$$D_{-n}(x) = \frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-{}^1/_4 x^2} \Phi_{n-1}\left(x, \frac{1}{2}\right) \qquad (n \geqslant 2) \qquad (8.3)$$

Этот результат можно получить также, сравнивая формулы (5.6) и (8.1).

Имея в виду формулу (4.2), получаем следующее определение для функций параболического цилиндра с целым отрицательным индексом:

$$D_{-n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-{}^1/_4 x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{{}^1/_2 x^2} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \qquad (8.4)$$

Можно также обратно выразить $\Phi_n(\alpha, t)$ через D_{-n}:

$$\Phi_n(\alpha, t) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{2t})^{n-2} e^{{}^1/_2 \alpha^2 t} D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t}) \qquad (8.5)$$

Поэтому можно было во всех полученных формулах вместо $\Phi_n(\alpha, t)$ подставить соответствующее выражение с $D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t})$. Но, очевидно, формулы принимают более сложный вид. Кроме того, для выражения $D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t})$ при помощи более простых функций все же требуется функция $\Phi_n(\alpha, t)$.

Поступила 2 X 1952

Латвийский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению, стр. 129—130. ГИТТЛ, 1951.
2. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы, стр. 103, 129. Гос. научно-техн. изд. Украины. 1937.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, стр. 434—436. ГИТТЛ, 1951.