Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ОПЕРТОЙ НА ГИБКИЕ НЕРАСТЯЖИМЫЕ РЕБРА, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Х. М. Муштари, И. В. Свирский

(Казань)

Для решения поставленной задачи в данной работе уравнение совместности деформаций (1.1) интегрируется точно, а уравнение равновесия (1.2) интегрируется по методу Бубнова—Галеркина. При этом в рассмотренном примере для верхнего критического давления получается значение, мало отличающееся от соответствующего значения, найденного по формуле М. А. Колтунова[1], выведенной путем интегрирования обоих уравнений (1.1) и (1.2) по методу Бубнова—Галеркина. Давление же выхлопа (нижнее критическое давление), получающееся по этой последней формуле, оказывается совершенно неверным вследствие неудовлетворительного выполнения условия совместности деформаций.

1. Общий метод определения равновесных состояний. Решение задачи в первом приближении. Рассмотрим задачу об определении больших прогибов прямоугольной цилиндрической панели, свободно опертой по краям на ребра. При этом предполагается, что поперечные сечения этих ребер имеют очень большой момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения параллельно поверхности пластины, и очень малый момент инерции относительно оси, перпендикулярной к поверхности пластины. Поэтому будем считать, что ребра не дают возможности перемещаться краям пластины в направлении, перпендикулярном к ее поверхности, но совершенно не препятствуют перемещениям ее краев в направлении, касательном к ее поверхности и перпендикулярном к направлению ребра.

Предполагается также, что ребра являются нерастяжимыми.

Как известно, эта задача приводится к краевой задаче для системы нелинейных уравнений

$$\triangle^2\Phi = -Et\left(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}{}^2 + \frac{w_{xx}}{R}\right) \tag{1.1}$$

$$D\triangle^2 w - \Phi_{xx}w_{yy} - \Phi_{yy}w_{xx} + 2\Phi_{xy}w_{xy} - \frac{1}{R}\Phi_{xx} = P_2 \tag{1.2}$$

где w — прогиб точек панели в направлении к оси кривизны панели, t — толщина, R — радиус кривизны, $D = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость панели, Φ — функция напряжения, через которую мембранные усилия выражаются по следующим формулам:

$$T_1 = \Phi_{yy}, \qquad T_2 = \Phi_{xx}, \qquad S = -\Phi_{xy} \tag{1.3}$$

Непосредственно у продольных ребер панели при $y = 0$ и $y = b$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et}(\Phi_{yy} - \nu\Phi_{xx}) = 0, \qquad T_y = \Phi_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

Первое из этих условий означает, что панель непосредственно у ребра, так же как и самое ребро, не растягивается в направлении ребра.

Второе условие означает, что ребро не сопротивляется его изгибу в касательном к панели направлении.

Из предыдущих двух уравнений следует, что при $y=0$ и $y=b$

$$\Phi_{yy}=0 \tag{1.5}$$

Аналогичным образом можно получить граничные условия, которым удовлетворяет функция Φ вблизи перечных ребер:

$$\Phi_{xx}=\Phi_{yy}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ x=a \tag{1.6}$$

Ввиду свободного опирания панели на ребра также должны выполняться условия, обеспечивающие отсутствие изгибающих моментов на краях панели:

$$\begin{aligned} w=w_{xx}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ x=a \\ w=w_{yy}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ y=b \end{aligned} \tag{1.7}$$

Приближенное значение функции прогиба будем разыскивать в виде ряда

$$w=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} C_{mn}\varphi_{mn} \tag{1.8}$$

где

$$\varphi_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1.9}$$

Очевидно, что каждый член этого ряда удовлетворяет условиям (1.7). Подставляя выражение w в уравнение (1.1), получим

$$\Delta^2\Phi=-Et\sum_{mn,\,pq} C_{mn}C_{pq}(\varphi_{mn,\,xx}\varphi_{pq,\,yy}-\varphi_{mn,\,xy}\varphi_{pq,\,xy})-\frac{Et}{R}\sum_{m,\,n} C_{mn}\varphi_{mn,\,xx} \tag{1.10}$$

Это уравнение будем решать методом Фурье. Воспользуемся представлением в виде двойного ряда Фурье функции

$$\varphi_{mn,\,xx}\varphi_{pq,\,yy}-\varphi_{mn,\,xy}\varphi_{pq,\,xy}=\sum_{k,\,l}\frac{4}{ab}A_{mn,pq}^{kl}\varphi_{kl} \tag{1.11}$$

где

$$A_{mn,pq}^{kl}=\iint(\varphi_{mn,\,xx}\varphi_{pq,\,yy}-\varphi_{mn,\,xy}\varphi_{pq,\,xy})\varphi_{kl}\,dx\,dy$$

Здесь и далее интегралы берутся по всей площади панели. Подставляя (1.11) в (1.10), находим

$$\Delta^2\Phi=-Et\sum_{mn,\,pq,\,kl}\frac{4}{ab}A_{mn,pq}^{kl}\varphi_{kl}C_{mn}C_{pq}+\frac{Et}{R}\sum_{kl}C_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\varphi_{kl} \tag{1.12}$$

Решение этого уравнения будем разыскивать в виде ряда

$$\Phi=\sum\sum\alpha_{kl}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}=\sum\sum\alpha_{kl}\varphi_{kl} \tag{1.13}$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (1.4) и (1.6), а коэффициенты α_{kl} удовлетворяют системе уравнений

$$\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right]^2\alpha_{kl}=-Et\sum_{mn,pq}^{N}\frac{4}{ab}A_{mn,pq}^{kl}C_{mn}C_{pq}+\frac{Et}{R}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2C_{kl} \tag{1.14}$$

При этом $C_{pq}=0$, если $p>N$ или $q>N$. Далее, подставляя в уравнение (1.2) выражения (1.8) и (1.13), умножая обе части полученного уравнения на φ_{rs} и интегрируя по всей поверхности панели, после несложных вычислений приходим к системе уравнений.

$$D\left[\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi s}{b}\right)^2\right]^2 \alpha_{rs}-\sum_{kl,\,mn}\alpha_{kl}C_{mn}\frac{4}{ab}\iint\Big[\varphi_{kl,\,xx}\varphi_{mn,\,yy}+ \tag{1.15}$$

$$+\varphi_{kl,\,yy}\varphi_{mn,\,xx}-2\varphi_{kl,\,xy}\varphi_{mn,xy}\Big]\varphi_{rs}\,dx\,dy+\frac{1}{R}\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2\alpha_{rs}=\frac{4}{ab}\iint P_z\varphi_{rs}\,dx\,dy$$

Интегрируя по частям и учитывая, что на краях панели функции φ_{rs} равны нулю, имеем

$$\iint\varphi_{kl,\,xx}\,\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,yy,\,xx}\,\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,yy,\,x}\,\varphi_{rs,\,x}+\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs,\,xx})\,dx\,dy$$

$$\iint\varphi_{kl,\,yy}\,\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,xx,\,yy}\,\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,xxy}\,\varphi_{sr,\,y}+\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs,\,yy})\,dx\,dy\,+$$

$$+\,2\iint\varphi_{kl,\,xy}\,\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(2\varphi_{mn,\,xx,\,yy}\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,xyy}\,\varphi_{rs,\,x}+2\varphi_{mn,\,xxy}\varphi_{rs,\,y}+2\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs,\,xy})\,dx\,dy$$

Следовательно,

$$A_{kl,\,mn}^{rs}+A_{mn,\,kl}^{rs}=A_{mn,\,rs}^{kl}+A_{rs,\,mn}^{kl}=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs,\,xx}+\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs,\,yy}-2\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs,\,xy})\,dx\,dy$$

Подставив это выражение и выражения (1.14) в (1.15), для определения коэффициентов C_{rs} получаем следующую систему уравнений:

$$D\left[\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi s}{b}\right)^2\right]^2C_{rs}+\sum_{kl,\,mn,\,\alpha\beta,\,\gamma\delta}\frac{16Et\,(A_{rs,\,mn}^{kl}+A_{mn,\,rs}^{kl})\,A_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}^{kl}C_{mn}C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}}{[(k\pi/a)^2+(l\pi/b)^2]^2\,a^2b^2}\,-$$

$$-\sum_{kl,\,mn}\frac{4Et}{ab\,R}\,\frac{(A_{rs,\,mn}^{kl}+A_{mn,\,rs}^{kl})\,(k\pi/a)^2\,C_{kl}C_{mn}}{[(k\pi/a)^2+(l\pi/b)^2]^2}\,-$$

$$-\frac{Et}{R}\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2\sum_{mn,\,pq}\frac{4}{ab}\,\frac{A_{mn,\,pq}C_{mn}C_{pq}}{[(\pi r\,/\,a)^2+(\pi s\,/\,b)^2]^2}+\frac{Et\,/\,R^2\,(\pi r\,/\,a)^4\,C_{rs}}{[(\pi r\,/\,a)^2+(\pi s\,/\,b)^2]^2}=$$

$$=\frac{4}{ab}\iint p_z\varphi_{rs}\,dx\,dy \tag{1.16}$$

Эту систему следует решать методом последовательных приближений.

Для получения более простых формул рассмотрим первое приближение к решению, когда $N=1$. В этом случае, полагая, что давление равномерно распределено по всей поверхности панели, после несложных вычислений и введения обозначений

$$k^*=\frac{b^2}{Rt},\qquad h=\frac{b^2}{SR},\qquad \gamma=\frac{b^2}{a^2} \tag{1.17}$$

находим следующую зависимость давления от прогиба в центре панели:

$$P_z=\frac{\pi^2}{64R^3}\,\frac{Etb^2\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\left[A(\gamma)\left(\frac{c_{11}}{h}\right)^2-\left(\frac{c_{11}}{h}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{4.46\gamma^2}{k^{*2}}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^4\right)\frac{c_{11}}{h}\right] \tag{1.18}$$

Здесь

$$A(\gamma)=\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2\sum_k\sum_l\left(\frac{1}{k^2+l^2/\gamma}\right)^2\left(\frac{1}{k}\,\frac{l}{4-l^2}+\frac{1}{l}\,\frac{k}{4-k^2}\right)^2 \tag{1.19}$$

Приводим значения этой величины при некоторых значениях параметра удлиненности панели:

$b/a = 1$	0.75	0.5	0.3
$A = 0.46$	0.47	0.49	0.5

При малых прогибах можно пренебречь членами, содержащими высшие степени и произведения C_{rs}. При этом можно получить следующее выражение для C_{rs}, известное из линейной теории (при $p_z = \text{const}$):

$$C_{rs} = 16P_z(-1)^{\frac{1}{2}(r+s-2)} b^4 \left(D\pi^6\left[(\gamma r^2 + s^2)^2 + \frac{k^2}{8.7}\frac{\gamma^2}{[\gamma + (s/r)^2]^2}\right] rs\right)^{-1}$$

Рассматривая это выражение, мы замечаем, что при малых прогибах коэффициенты C_{rs}, вычисленные по линейной теории, быстро убывают по своей величине, если панель имеет небольшой параметр кривизны порядка 20—30. Кроме того, из этой формулы можно заметить, что если величина γ мала, т. е. если панель сильно вытянута в длину, то коэффициенты будут медленно убывать с увеличением номера. Отсюда следует, что первое приближение может давать хорошие результаты для слабо изогнутых и не очень сильно удлиненных панелей.

2. Решение во втором приближении. Будем задаваться формой прогиба в виде

$$w = c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + c_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \tag{2.1}$$

При этом из формулы (1.16) находим два уравнения для определения коэффициентов прогиба c_{11} и c_{13}. Коэффициенты этих уравнений содержат величины $A_{mn,\,pq}^{kl}$, вычисляемые по формуле (1.12), а также величины

$$B_{mn,\,pq}^{kl} = A_{mn,\,pq}^{kl} + A_{pq,\,mn}^{kl} = B_{pq,\,mn}^{kl} = B_{nm,\,pq}^{lk} =$$

$$= \frac{8kl\,mn\,pq\,[2(m^2q^2 + n^2p^2) - (k^2 - m^2 - p^2)(l^2 - n^2 - q^2)]\,\pi^2}{[(k^2 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2]\,[(l^2 - n^2 - q^2)^2 - 4n^2q^2]\,ab}$$

$$\mu_{kl} = \frac{(\gamma+1)^2}{(k^2\gamma + l^2)^2}, \qquad k,\ l = 1, 3, \ldots, m,\ n,\ p,\ q - 1 \text{ и } 3 \tag{2.2}$$

Пользуясь обозначениями (1.17) и вводя новые обозначения

$$\zeta = \frac{c_{11}}{t}, \qquad \zeta_{13} = \frac{c_{13}}{c_{11}}, \qquad P_z^* = \frac{p_z b^4}{Et^4} \tag{2.3}$$

$$L_1 = \frac{16\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\{3.55 + 1.92(\mu_{13} + \mu_{31}) + 1.28\mu_{33} + 0.216(\mu_{51} + \mu_{15}) + 0.33(\mu_{35} + \mu_{53}) +$$
$$+ 0.094(\mu_{71} + \mu_{17}) - \zeta_{13}(7.8 + 38\mu_{13} + 8.67\mu_{31} - 8.9\mu_{33} + 1.19\mu_{51} - 7.65\mu_{15}) +$$
$$+ \zeta_{13}^2(21.2 + 163\mu_{13} + 29.5\mu_{31} + 18.5\mu_{33} + 4.2\mu_{51} + 49\mu_{15}) -$$
$$- \zeta_{13}^3(12.7 - 52\mu_{13} + 31\mu_{31} - 11\mu_{33} + 69\mu_{15} + 4.8\mu_{51})\}.$$

$$M_1 = \frac{4\gamma^2k^*}{(1+\gamma)^2}\{4 - 1.95(2 + \mu_{13})\zeta_{13} + 6.5(1 + 2\mu_{13})\zeta_{13}^2\}$$

$$N_1 = \frac{\pi^4(1+\gamma)^2}{10.92} + \frac{\gamma^2k^{*2}}{(1+\gamma)^2}$$

$$L_1 + L_2 = \frac{48\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\{-2.61 - 12.7\mu_{13} - 2.88\mu_{31} + 2.96\mu_{33} - 0.40\mu_{51} - 0.48\mu_{71} +$$
$$+ \zeta_{13}(21.2 + 162\mu_{13} + 29.5\mu_{31} + 18.5\mu_{33} + 4.2\mu_{51} + 6.2\mu_{71}) -$$
$$- \zeta_{13}^2(38.2 - 156\mu_{13} + 94\mu_{31} - 32.6\mu_{33} + 14.5\mu_{51}) + \zeta_{13}^3(85 + 32\mu_{13} + 227\mu_{31} + 35\mu_{51})\}$$

$$M_1 + M_2 = \frac{12\gamma^2k^*}{(1+\gamma)^2}\{-1.95 - 0.98\mu_{13} + 13(1 + 2\mu_{13})\zeta_{13} + 12\mu_{13}\zeta_{13}^2\}$$

$$N_1 + N_2 = 3\left\{\frac{\pi^4}{10.92}(9+\gamma)^2 + \frac{\gamma^2k^{*2}}{(\gamma+9)^2}\right\}\zeta_{13} \tag{2.4}$$

указанные уравнения можно привести к виду:

$$L_1\zeta^2 - M_1\zeta^3 + N_1\zeta = 1.621 p_z^* \tag{2.5}$$

$$(L_1 + L_2)\zeta^3 - (M_1 + M_2)\zeta^2 + (N_1 + N_2)\zeta = 1.621 p_z^* \tag{2.6}$$

Исключая из них p_z^*, находим зависимость между ζ и ζ_{13}:

$$\varphi = L_2\zeta^2 - M_2\zeta + N_2 = 0 \tag{2.7}$$

Задаваясь различными значениями ζ_{13} и определяя соответствующие им значения ζ из уравнения (2.7), по формуле (2.5) можно построить график изменения параметра давления p_z^*. Для определения критических значений давления составляем дополнительное уравнение

$$\frac{dp_z^*}{d\zeta_{13}} = \frac{\partial p_z^*}{\partial\zeta_{13}} - \frac{\partial p_z^*}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_{13}} : \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0$$

или

$$(L_1'\zeta^3 - M_1'\zeta^2 + N_1'\zeta)(2L_2\zeta - M_2) - (3L_1\zeta^2 - 2M_1\zeta + N_1)(L_2'\zeta^2 - M_2'\zeta + N_2') = 0 \tag{2.8}$$

где штрихи обозначают производные по ζ_{13}.

Значения ζ_{13} и ζ, соответствующие экстремальным значениям давления, можно найти лишь подбором, задаваясь различными значениями ζ_{13} и подставляя их и значения ζ, найденные из (2.7), в уравнение (2.8), добиваясь его удовлетворения.

Пример. Пусть $\gamma = b^2 / a^2 = 1/4$. Тогда

$$\mu_{13} = 0.01825 \quad \mu_{31} = 0.148 \quad \mu_{33} = 0.0123 \quad \mu_{15} = 0.0297$$
$$\mu_{51} = 0.00245 \quad \mu_{53} = 0.0067 \quad \mu_{35} = 0.0021 \quad \mu_{71} = 0.0095$$

Пусть, кроме того, $k^* = 80$. Указанным путем находим $\zeta_{13} \approx -0.032$. Соответствующее значение ζ для верхнего критического давления (для давления хлопка) равно 3.08, при нижнем критическом давлении оно равно 10.32). Значения относительного прогиба в центре пластины ζ_1°, ζ_2° и значения параметра верхнего критического давления p_{1z}^* и параметра нижнего критического давления p_{2z}^*, вычисленные по разным формулам, приводим в табл. 1.

Таблица 1

	a / b	k^*	ζ_1°	ζ_2°	p_{1z}^*	p_{2z}^*
В первом приближении по М. А. Колтунову	2	40	2.124	5.380	44.8	20.2
По формуле (1.18) данной работы	2	40	2.30	3.50	45.8	37.6
По М. А. Колтунову .	2	80	3.41	11.64	256	—127
По формуле (1.18) . . .	2	80	3.67	9.93	262	54
По формуле (1.16) во втором приближении	2	80	3.18	10.65	255	83

Неточное выполнение условия совместности деформаций при заданной форме прогиба равносильно ослаблению внутренних связей в панели, приводящему к уменьшению энергии деформации срединной поверхности; поэтому при всех прочих условиях, удовлетворяя уравнению (1.1) лишь интегрально, мы должны получить заниженные значения давлений хлопка и выхлопа. Эти соображения объясняют результаты вычислений по формуле М. А. Колтунова [1] и по формуле (1.18) данной работы. Обе эти формулы были выведены, задаваясь одной и той же формой прогиба для одних и тех же граничных условий, но первая из них в отличие от второй была получена при неточном выполнении условия совместности деформаций. Заметим, что в рассматриваемом примере разница в величине верхнего критического давления, определенного по этим формулам, невелика. Давление же выхлопа (а также деформация панели после хлопка) определяется по М. А. Колтунову в первом приближении совершенно неверно. Отсюда следует, что, применяя метод Бубнова — Галеркина к интегрированию уравнения совместности деформаций. необходимо точнее определить функцию напряжения, задаваясь ее выражением, содержащим несколько варьируемых параметров.

Ввиду громоздкости вычислений критические давления во втором приближении нами определены лишь для значения параметра кривизны $k^* = 80$. Из таблицы мы видим, что второе приближение внесло незначительную поправку в величину верхнего критического давления и более чем на 50% увеличило нижнее критическое давление по сравнению с первым приближением по формуле (1.18).

В заключение заметим, что, увеличивая число членов ряда, выражающего прогиб, мы облегчаем возможность как хлопка, так и обратного выхлопа. Поэтому найденное нами приближенное значение давления хлопка больше истинного, а приближенное значение давления выхлопа меньше истинного.

Поступила 14 V 1953

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтунов М. А. Учет конечных перемещений в задаче об изгибе и устойчивости пластинок и пологих оболочек. Вестник Моск. гос. университета, № 5, 1952.