Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Ф. С. Чуриков
(Дзауджикау)

Решения, при получении которых исходными являются уравнения равновесия в напряжениях, были подробно рассмотрены в работах [1, 2].

Если за исходное принимать уравнения равновесия в перемещениях, то при отыскании общего интеграла приходится делать какие-либо предположения относительно вектора упругого смещения. Обычно принимают стоксовское допущение, состоящее в том, что вектор упругого смещения может быть разложен на два составляющих вектора, один из которых связан с изменением объема и является градиентом скалярного потенциала; второй же представляет ротацию некоторого соленоидального вектора. Исходя из этого предположения, Буссинеском и Галеркиным было показано, что общий интеграл уравнений равновесия при отсутствии массовых сил может быть выражен через три независимые бигармонические функции точки.

При тех же предположениях Папкович дал выражение общего интеграла через четыре независимые гармонические функции.

Известно, что указанные формы решения могут быть преобразованы одна в другую.

Ниже устанавливается, что представление общего интеграла через четыре независимые гармонические функции точки, и притом весьма просто, можно также получить, если исходить из предположений Ляме о векторе упругого смещения.

Форма общего интеграла, полученного таким путем, как нам кажется, без дополнительных предположений, не приводится ни к одной из названных выше.

В § 2 показано, что для плоской задачи найденное решение преобразуется в известное решение Лява.

§ 1. Возьмем уравнения равновесия Ляме

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X = 0$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y = 0 \qquad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z = 0$$

где все обозначения имеют обычный смысл. Следуя Ляме, положим

$$u = \omega_1 + C\left(\frac{\partial \chi_3}{\partial y} - \frac{\partial \chi_2}{\partial z}\right)$$

$$v = \omega_2 + C\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial z} - \frac{\partial \chi_3}{\partial x}\right) \qquad (1.2)$$

$$w = \omega_3 + C\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y}\right)$$

где ω_i, χ_i $(i=1, 2, 3)$ — функции точки (x, y, z), подлежащие определению, C — постоянная.

Заметим, что предположение о векторе упругого смещения, выражаемое равенствами (1.2), не совпадает со стоксовским, так как функции ω_i здесь независимые, а функции χ_i не подчинены условию

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

Дифференцируя равенства (1.2) в порядке их написания соответственно по x, y, z и складывая, находим

$$\Delta = \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \tag{1.4}$$

Подставив (1.2) и (1.4) в (1.1), получим

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \omega_1 + C\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \chi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \chi_2 \right) + \rho X = 0 \\
&(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \omega_2 + C\mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \chi_1 - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \chi_3 \right) + \rho Y = 0 \\
&(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \omega_3 + C\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \chi_2 - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \chi_1 \right) + \rho Z = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \chi_1 &= \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \beta_1 \\
\nabla^2 \chi_2 &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + \beta_2 \\
\nabla^2 \chi_3 &= \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + \beta_3
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$C = \frac{\lambda + \lambda}{\mu}$$

где α_{ik}, β_i — произвольные постоянные.

Подставив (1.6) в (1.5), после сокращения находим

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \omega_1 + (\lambda + \mu)(\alpha_{32} - \alpha_{23}) + \rho X = 0 \\
&(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \omega_2 + (\lambda + \mu)(\alpha_{13} - \alpha_{31}) + \rho Y = 0 \\
&(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \omega_3 + (\lambda + \mu)(\alpha_{21} - \alpha_{12}) + \rho Z = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Из (1.7) видно, что при отсутствии массовых сил и независимости констант λ, μ функции ω_i, через которые выражаются перемещения, будут гармоническими, если положить

$$\alpha_{32} = \alpha_{23}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31}, \qquad \alpha_{21} = \alpha_{12}$$

Заметим, что в случае силы тяжести функции ω_i также будут гармоническими. В самом деле, выбирая оси координат так, чтобы ось z была параллельна силе тяжести, будем иметь $X = Y = 0$, $Z = \rho g$. Тогда для того чтобы ω $(i = 1, 2, 3)$ были гармоническими, достаточно в (1.7), положить

$$\alpha_{32} = \alpha_{23}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31}$$

$$(\lambda + \mu)(\alpha_{21} - \alpha_{12}) + \rho g = 0$$

В дальнейшем будем предполагать массовые силы отсутствующими и найдем для этого случая общее решение уравнений (1.1).

Для определения функций χ_1, χ_2, χ_3 рассмотрим уравнения (1.6).

За общее решение уравнений (1.6) можно взять

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \beta_1) - \\
&\qquad - \frac{1}{3}(\alpha_{11}x^3 + \alpha_{12}y^3 + \alpha_{13}z^3)\Big] \\
\chi_2 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \beta_2) - \\
&\qquad - \frac{1}{3}(\alpha_{12}x^3 + \alpha_{22}y^3 + \alpha_{23}z^3)\Big] \\
\chi_3 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x) + \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3) - \\
&\qquad - \frac{1}{3}(\alpha_{13}x^3 + \alpha_{23}y^3 + \alpha_{33}z^3)\Big]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где ω_0 — произвольная гармоническая функция[1].

Подставляя (1.8) в (1.2), получим

$$\begin{aligned}
u &= \omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial y}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\Big] - \frac{\partial}{\partial z}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\Big] + \\
&\qquad + \frac{1}{3}[y(\alpha_{13}x + \alpha_{33}z + \beta_3) - z[\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2)]\Big\} \\
v &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial z}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\Big] - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\Big] + \\
&\qquad + \frac{1}{3}[z(\alpha_{12}y + \alpha_{11}x + \beta_1) - x(\alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3)]\Big\} \\
w &= \omega_3 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\Big] + \\
&\qquad + \frac{1}{3}\Big[x(\alpha_{23}z + \alpha_{22}y + \beta_2) - y(\alpha_{13}z + \alpha_{11}x + \beta_1)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Замечая, что выражения, стоящие во вторых строчках в формулах (1.9) являются гармоническими функциями, положим

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{3\mu}[y(\alpha_{13}x + \alpha_{33}z + \beta_3) - z(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2)] &= \omega_1' \\
\omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{3\mu}[z(\alpha_{12}y + \alpha_{11}x + \beta_1) - x(\alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3)] &= \omega_2' \\
\omega_3 + \frac{\lambda+\mu}{3\mu}[x(\alpha_{23}z + \alpha_{22}y + \beta_2) - y(\alpha_{13}z + \alpha_{11}x + \beta_1)] &= \omega_3'
\end{aligned}$$

где ω_1', ω_2', ω_3' — также независимые гармонические функции точки.

Обозначая $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \omega_2$, $\omega_3' = \omega_3$, получим общее решение уравнений Ляме для случая отсутствия массовых сил:

$$\begin{aligned}
u &= \omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial y}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\Big] - \frac{\partial}{\partial z}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\Big]\Big\} \\
v &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial z}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\Big] - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\Big]\Big\} \\
w &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где ω_3, ω_1, ω_2, ω_3 — независимые гармонические функции x, y, z. Как видно из (1.10) наличие в правых частях равенств (1.6) многочленов первой степени относительно x, y, z в силу (1.2) не отражается на общности полученного решения.

[1] В формулах (1.8) вместо ω_0 можно было бы взять три различные гармонические функции, однако это не приводит к большей общности решения, так как в выражение (1.2) для перемещений уже входят аддитивно независимые гармонические функции ω_1, ω_2, ω_3.

§ 2. Покажем, что (1.10) для случая плоской деформации можно преобразовать в интеграл Лява. Из (1.10) имеем

$$u = \omega_1 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\omega_0 + \frac{1}{2} (\omega_1 y - \omega_2 x) \right]$$
$$v = \omega_2 - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega_0 + \frac{1}{2} (\omega_1 y - \omega_2 x) \right] \tag{2.1}$$

где ω_0, ω_1, ω_2 — гармонические функции от (x, y). Пусть функции ω_1, ω_2 удовлетворяют уравнениям Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \tag{2.2}$$

Преобразуя (2.1), пользуясь (2.2), находим

$$u = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \omega_1 - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_1 x + \omega_2 y - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \tag{2.3}$$
$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \omega_2 - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega_1 x + \omega_2 y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$

где положено

$$\omega_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$$

Так как f — гармоническая функция, то, полагая

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi$$

где φ — также произвольная гармоническая функция, и подставляя в (2.3), получим

$$2\mu u = 2(\lambda + 2\mu)\omega_1 - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi)$$
$$2\mu v = 2(\lambda + 2\mu)\omega_2 - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} (\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi) \tag{2.4}$$

Обозначая в (2.4) $(\lambda + \mu)(\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi) = \Phi$, находим формулы для перемещений

$$2\mu u = 2(\lambda + 2\mu)\omega_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad 2\mu v = 2(\lambda + 2\mu)\omega_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2.5}$$

Исходя из (2.1) и (2.2), после преобразований найдем выражения для напряжений:

$$X_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad X_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}$$

Следовательно, функция Φ есть функция напряжений Эри.

Для того чтобы из (2.5) получить формулы Лява

$$2\mu u = \xi - \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad 2\mu v = \eta - \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} (\xi x + \eta y) - 2\mu\psi$$

достаточно положить

$$2(\lambda + 2\mu)\omega_1 = \xi, \qquad 2(\lambda + 2\mu)\omega_2 = \eta, \qquad (\lambda + \mu)\varphi = \mu\psi$$

Поступила 3 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох В. И. Функции напряжений в теории упругости. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
2. Крутков Ю. Н. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
3. Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. ДАН СССР, № 14, 1930.
4. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. ИАН, серия ФМ, стр. 1425—1435, 1932.
5. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ, 1947.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.