Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# К УРАВНЕНИЯМ ЧАПЛЫГИНА НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**М. И. Ефимов**

(Москва)

В работе [1] *О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости* Чаплыгин, исходя из основного уравнения в форме

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}\right\}\delta q_s=0 \tag{1}$$

впервые для механических систем с линейными неголономными связями получил уравнения движения, которые являются непосредственным обобщением уравнений Лагранжа на неголономные системы.

Установленные для случая, когда коэффициенты $B_i^{(s)}$ в уравнениях связей

$$\dot{q}_s=\sum_{i=m+1}^{n} B_i^{(s)}\, q_i \qquad (s=1,\ldots,m) \tag{2}$$

живая сила $T$ и силовая функция $U$ не зависят от зависимых параметров $q_1,\ldots,q_m$, уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial (T)}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k=0 \tag{3}$$

где $(T)$ — есть результат исключения из $T$ зависимых скоростей.

При выводе уравнений (3) Чаплыгин, очевидно, предполагал, что параметры $q_1,\ldots,q_n$ представляют собой обобщенные лагранжевы координаты, т. е. те независимые параметры, через которые и время $t$ в любой момент времени и независимо от уравнений движения могут быть определены координаты $x_\nu$, $y_\nu$, $z_\nu$ любой точки механической системы в виде $x_\nu=x_\nu(t,q_1,\ldots,q_n)$, $y_\nu=y_\nu(t,q_1,\ldots,q_n)$, $z_\nu=z_\nu(t,q_1,\ldots,q_n)$. Это следует из того, что уравнение (1) выводится из основного уравнения

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{(X_i-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(Y_i-m_i y_i)\delta y_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right\}=0 \tag{4}$$

именно при указанном предположении.

Поэтому, видимо, Чаплыгин и не сделал специального уточнения этого факта.

Таким образом, можно сказать, что вывод уравнений и самые уравнения Чаплыгина имеют место лишь при условии, что параметры $q_1,\ldots,q_n$ являются голономными лагранжевыми координатами и не могут быть координатами неголономными.

Однако в другой работе [2] Чаплыгин, повидимому, упустил из виду указанное важное условие и сделал ошибку при решении известной задачи о движении твердого тела параллельно плоскости. Эта задача состоит в следующем.

На горизонтальную плоскость тремя точками опирается твердое тело, причем две из этих точек представляют собой простые свободно скользящие ножки, а третья есть точка прикосновения острого колесика, горизонтальная ось которого неизменно связана с движущимся телом. Предполагается, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Тогда положение тела определится горизонтальными координатами $\xi, \eta$ точки прикосновения $A$ колесика и углом $\varphi$, который составляет ось $Ax$, связанная с телом и лежащая в плоскости колесика, с неподвижной осью $0\xi$. Горизонтальная проекция центра тяжести тела определяется ее координатами $\alpha$ и $\beta$ по подвижным осям. Требуется исследовать движение тела по инерции.

Условимся для краткости называть движущееся тело «санями».

При выводе уравнений движения «саней» Чаплыгин вместо голономных координат $\xi, \eta, \varphi$ взял параметры $\xi, \eta, \varphi, q$, где $q$ — длина дуги траектории центра колесика, связанная с параметрами $\xi, \eta, \varphi$ неинтегрируемыми соотношениями:

$$d\xi = dq\cos\varphi, \qquad d\eta = dq\sin\varphi \qquad \text{или} \qquad \dot{q}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$$

и написал уравнения для параметров $q$ и $\varphi$, назвав последние свободными.

Однако это незаконно, так как $q$ — неголономная координата и не обладает теми свойствами, которые предполагаются при выводе уравнений Чаплыгина, а именно, через нее и две какие-либо из координат $\xi, \eta, \varphi$ не могут быть выражены конечным образом координаты точек «саней».

При наличии такой координаты среди тех параметров, через которые выражаются $T$ и вариации, входящие в основное уравнение (1), уравнения Чаплыгина не имеют места. Поэтому решение, найденное Чаплыгиным для задачи о «санях» неверно.

Можно решить указанную задачу элементарным способом, составив уравнения Чаплыгина при неголономной связи

$$\dot{\eta} = \dot{\xi}\,\mathrm{tg}\,\varphi \tag{5}$$

и свободных параметрах $\xi$ и $\varphi$. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} - \beta\cos\varphi\ddot{\varphi} + \mathrm{tg}\,\varphi\dot{\xi}\dot{\varphi} - \alpha\cos\varphi\dot{\varphi}^2 = 0\\ \beta\cos\varphi\ddot{\xi} - \gamma^2\cos^2\varphi\ddot{\varphi} + (\beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi)\,\dot{\xi}\,\dot{\varphi} = 0\\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k^2\end{gathered} \tag{6}$$

Воспользуемся интегралом живых сил

$$\dot{\xi}^2 + \gamma^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 - 2\beta\cos\varphi\dot{\xi}\dot{\varphi} = h_0^2\cos^2\varphi \tag{7}$$

где $k$ — радиус инерции «саней» относительно вертикали, проходящей через центр тяжести, $h_0$ — произвольная постоянная; тогда для $\varphi$ получим

$$\sin\psi = \mathrm{th}\,(c_0t + c_1), \qquad \cos\psi = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(c_0t + c_1)}, \qquad \psi = \frac{c \pm \alpha\varphi}{n}, \qquad n^2 = \alpha^2 + k^2 \tag{8}$$

$$\varphi = \pm\left\{\frac{n}{\alpha}\arccos\frac{1}{\mathrm{ch}\,(c_0t + c_1)} - \frac{c}{\alpha}\right\}$$

Следовательно, согласно (5) и (7) решение можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\dot{\varphi} = \frac{h_0}{n}\frac{1}{\mathrm{ch}\,(c_0t + c_1)}\\ \dot{\xi} = h_0\left[\frac{\beta}{n}\frac{1}{\mathrm{ch}\,(c_0t + c_1)} \pm \mathrm{th}\,(c_0t + c_1)\right]\cos\varphi\\ \dot{\eta} = \dot{\xi}\,\mathrm{tg}\,\varphi\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь

$$c_1 = \pm \frac{c_1^0 \alpha}{n}, \qquad c_0 = \pm \frac{\alpha h_0}{n^2}$$

а $c$ и $c_1^0$ — произвольные постоянные. Из этого решения вытекает, как частный случай, решение задачи Каратеодори [3] при $\beta = 0$

$$\dot{\varphi} = \frac{h_0}{n} \frac{1}{\operatorname{ch} c_0 t}$$

$$\dot{\xi} = h_0 \operatorname{th} c_0 t \cos \varphi$$

$$\dot{\eta} = h_0 \operatorname{th} c_0 t \sin \varphi$$

где

$$\varphi = \frac{n}{\alpha} \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} c_0 t}, \qquad h_0 = \frac{n^2}{\alpha} c_0$$

Можно получить и другие частные случаи

1) Пусть $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Тогда

$$\dot{\varphi} = B = \text{const}, \qquad \varphi = Bt$$

причем постоянную интеграции можно положить равной нулю,

$$\xi = \left(\beta + \frac{A}{B}\right) \sin Bt + \xi_0, \qquad \eta = \left(\beta + \frac{A}{B}\right)(1 - \cos Bt) + \eta_0$$

где $\xi_0$, $\eta_0$ — координаты при $t$, равном нулю, $A$ и $B$ — произвольные постоянные.

Траекторией точки касания будет окружность с центром в точке $(\xi_0, \eta_0 + \beta + A/B)$ и радиусом $r = \beta$.

«Сани» будут вращаться вокруг вертикали, пересекающей ось колесика с посто янной угловой скоростью $\omega = B$.

2) Пусть $\alpha = \beta = 0$. Тогда

$$\varphi = Bt, \qquad \xi = \xi_0 + \frac{A}{B} \sin Bt, \qquad \eta = \eta_0 + \frac{A}{B}(1 - \cos Bt)$$

Поступила 16 IX 1953

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Собр. соч., т. 1, стр. 159—170. Изд. АН СССР, 1933.
2. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Собр. соч., т. 1, стр. 207—215. Изд. АН СССР, 1933.
3. Carateodori C. Der Schlitten. Zeitschrift für angewandte Mat. und Mechanik. H. 1, Bd. 13, s. 71-76, 1933.

Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Ф. С. Чуриков
(Дзауджикау)

Решения, при получении которых исходными являются уравнения равновесия в напряжениях, были подробно рассмотрены в работах [1, 2].

Если за исходное принимать уравнения равновесия в перемещениях, то при отыскании общего интеграла приходится делать какие-либо предположения относительно вектора упругого смещения. Обычно принимают стоксовское допущение, состоящее в том, что вектор упругого смещения может быть разложен на два составляющих вектора, один из которых связан с изменением объема и является градиентом скалярного потенциала; второй же представляет ротацию некоторого соленоидального вектора. Исходя из этого предположения, Буссинеском и Галеркиным было показано, что общий интеграл уравнений равновесия при отсутствии массовых сил может быть выражен через три независимые бигармонические функции точки.

При тех же предположениях Папкович дал выражение общего интеграла через четыре независимые гармонические функции.

Известно, что указанные формы решения могут быть преобразованы одна в другую.

Ниже устанавливается, что представление общего интеграла через четыре независимые гармонические функции точки, и притом весьма просто, можно также получить, если исходить из предположений Ляме о векторе упругого смещения.

Форма общего интеграла, полученного таким путем, как нам кажется, без дополнительных предположений, не приводится ни к одной из названных выше.

В § 2 показано, что для плоской задачи найденное решение преобразуется в известное решение Лява.

§ 1. Возьмем уравнения равновесия Ляме

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y = 0 \qquad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z = 0$$

где все обозначения имеют обычный смысл. Следуя Ляме, положим

$$u = \omega_1 + C \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial y} - \frac{\partial \chi_2}{\partial z} \right)$$

$$v = \omega_2 + C \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial z} - \frac{\partial \chi_3}{\partial x} \right) \qquad (1.2)$$

$$w = \omega_3 + C \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right)$$

где $\omega_i$, $\chi_i$ $(i=1, 2, 3)$ — функции точки $(x, y, z)$, подлежащие определению, $C$ — постоянная.

Заметим, что предположение о векторе упругого смещения, выражаемое равенствами (1.2), не совпадает со стоксовским, так как функции $\omega_i$ здесь независимые, а функции $\chi_i$ не подчинены условию

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

Дифференцируя равенства (1.2) в порядке их написания соответственно по $x$, $y$, $z$ и складывая, находим

$$\Delta = \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \tag{1.4}$$

Подставив (1.2) и (1.4) в (1.1), получим

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2\omega_1 + C\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\chi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\chi_2\right) + \rho X = 0\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2\omega_2 + C\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\chi_1 - \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\chi_3\right) + \rho Y = 0\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2\omega_3 + C\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\chi_2 - \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\chi_1\right) + \rho Z = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\nabla^2\chi_1 &= \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \beta_1\\
\nabla^2\chi_2 &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \beta_2\\
\nabla^2\chi_3 &= \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \beta_3\\
C &= \frac{\lambda+\lambda}{\mu}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\alpha_{ik}$, $\beta_i$ — произвольные постоянные.

Подставив (1.6) в (1.5), после сокращения находим

$$\begin{aligned}
(\lambda+2\mu)\nabla^2\omega_1 + (\lambda+\mu)(\alpha_{32}-\alpha_{23}) + \rho X = 0\\
(\lambda+2\mu)\nabla^2\omega_2 + (\lambda+\mu)(\alpha_{13}-\alpha_{31}) + \rho Y = 0\\
(\lambda+2\mu)\nabla^2\omega_3 + (\lambda+\mu)(\alpha_{21}-\alpha_{12}) + \rho Z = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Из (1.7) видно, что при отсутствии массовых сил и независимости констант $\lambda$, $\mu$ функции $\omega_i$, через которые выражаются перемещения, будут гармоническими, если положить

$$\alpha_{32} = \alpha_{23}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31}, \qquad \alpha_{21} = \alpha_{12}$$

Заметим, что в случае силы тяжести функции $\omega_i$ также будут гармоническими. В самом деле, выбирая оси координат так, чтобы ось $z$ была параллельна силе тяжести, будем иметь $X = Y = 0$, $Z = \rho g$. Тогда для того чтобы $\omega$ $(i=1,2,3)$ были гармоническими, достаточно в (1.7), положить

$$\alpha_{32} = \alpha_{23}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31}$$

$$(\lambda+\mu)(\alpha_{21}-\alpha_{12}) + \rho g = 0$$

В дальнейшем будем предполагать массовые силы отсутствующими и найдем для этого случая общее решение уравнений (1.1).

Для определения функций $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$ рассмотрим уравнения (1.6).

За общее решение уравнений (1.6) можно взять

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \beta_1) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{3}(\alpha_{11}x^3 + \alpha_{12}y^3 + \alpha_{13}z^3)\right]\\
\chi_2 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \beta_2) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{3}(\alpha_{12}x^3 + \alpha_{22}y^3 + \alpha_{23}z^3)\right]\\
\chi_3 &= \omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{3}(\alpha_{13}x^3 + \alpha_{23}y^3 + \alpha_{33}z^3)\right]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где $\omega_0$ — произвольная гармоническая функция [1].

Подставляя (1.8) в (1.2), получим

$$
\begin{aligned}
u &= \omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\right] + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{3}\left[y(\alpha_{13}x + \alpha_{33}z + \beta_3) - z[\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2)\right]\right\}\\
v &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right] + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{3}\left[z(\alpha_{12}y + \alpha_{11}x + \beta_1) - x(\alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3)\right]\right\}\\
w &= \omega_3 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\right] + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{3}\left[x(\alpha_{23}z + \alpha_{22}y + \beta_2) - y(\alpha_{13}z + \alpha_{11}x + \beta_1)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Замечая, что выражения, стоящие во вторых строчках в формулах (1.9) являются гармоническими функциями, положим

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &+ \frac{\lambda+\mu}{3\mu}\left[y(\alpha_{13}x + \alpha_{33}z + \beta_3) - z(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2)\right] = \omega_1'\\
\omega_2 &+ \frac{\lambda+\mu}{3\mu}\left[z(\alpha_{12}y + \alpha_{11}x + \beta_1) - x(\alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \beta_3)\right] = \omega_2'\\
\omega_3 &+ \frac{\lambda+\mu}{3\mu}\left[x(\alpha_{23}z + \alpha_{22}y + \beta_2) - y(\alpha_{13}z + \alpha_{11}x + \beta_1)\right] = \omega_3'
\end{aligned}
$$

где $\omega_1'$, $\omega_2'$, $\omega_3'$ — также независимые гармонические функции точки.

Обозначая $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \omega_2$, $\omega_3' = \omega_3$, получим общее решение уравнений Ляме для случая отсутствия массовых сил:

$$
\begin{aligned}
u &= \omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\right]\right\}\\
v &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right]\right\}\\
w &= \omega_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_3 x - \omega_1 z)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_2 z - \omega_3 y)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где $\omega_3$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ — независимые гармонические функции $x$, $y$, $z$. Как видно из (1.10) наличие в правых частях равенств (1.6) многочленов первой степени относительно $x$, $y$, $z$ в силу (1.2) не отражается на общности полученного решения.

---

[1] В формулах (1.8) вместо $\omega_0$ можно было бы взять три различные гармонические функции, однако это не приводит к большей общности решения, так как в выражение (1.2) для перемещений уже входят аддитивно незавцсимые гармонические функции $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.

§ 2. Покажем, что (1.10) для случая плоской деформации можно преобразовать в интеграл Лява. Из (1.10) имеем

$$u = \omega_1 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right]$$
$$v = \omega_2 - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right] \tag{2.1}$$

где $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$ — гармонические функции от $(x, y)$. Пусть функции $\omega_1$, $\omega_2$ удовлетворяют уравнениям Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} = \frac{\partial\omega_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial y} = -\frac{\partial\omega_2}{\partial x} \tag{2.2}$$

Преобразуя (2.1), пользуясь (2.2), находим

$$u = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\omega_1 - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega_1 x + \omega_2 y - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{2.3}$$
$$v = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\omega_2 - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_1 x + \omega_2 y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

где положено

$$\omega_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

Так как $f$ — гармоническая функция, то, полагая

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi$$

где $\varphi$ — также произвольная гармоническая функция, и подставляя в (2.3), получим

$$2\mu u = 2(\lambda+2\mu)\omega_1 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi)$$
$$2\mu v = 2(\lambda+2\mu)\omega_2 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi) \tag{2.4}$$

Обозначая в (2.4) $(\lambda+\mu)(\omega_1 x + \omega_2 y - 2\varphi) = \Phi$, находим формулы для перемещений

$$2\mu u = 2(\lambda+2\mu)\omega_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad 2\mu v = 2(\lambda+2\mu)\omega_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{2.5}$$

Исходя из (2.1) и (2.2), после преобразований найдем выражения для напряжений:

$$X_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad Y_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \qquad X_y = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

Следовательно, функция $\Phi$ есть функция напряжений Эри.

Для того чтобы из (2.5) получить формулы Лява

$$2\mu u = \xi - \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad 2\mu v = \eta - \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F = \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(\xi x + \eta y) - 2\mu\psi$$

достаточно положить

$$2(\lambda+2\mu)\omega_1 = \xi, \qquad 2(\lambda+2\mu)\omega_2 = \eta, \qquad (\lambda+\mu)\varphi = \mu\psi$$

Поступила 3 XI 1952

## ЛИТЕРАТУРА


1. Блох В. И. Функции напряжений в теории упругости. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
2. Крутков Ю. Н. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
3. Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. ДАН СССР, № 14, 1930.
4. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. ИАН, серия ФМ, стр. 1425—1435, 1932.
5. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ, 1947.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.

**Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ОПЕРТОЙ НА ГИБКИЕ НЕРАСТЯЖИМЫЕ РЕБРА, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

**Х. М. Муштари, И. В. Свирский**

(Казань)

Для решения поставленной задачи в данной работе уравнение совместности деформаций (1.1) интегрируется точно, а уравнение равновесия (1.2) интегрируется по методу Бубнова—Галеркина. При этом в рассмотренном примере для верхнего критического давления получается значение, мало отличающееся от соответствующего значения, найденного по формуле М. А. Колтунова[1], выведенной путем интегрирования обоих уравнений (1.1) и (1.2) по методу Бубнова—Галеркина. Давление же выхлопа (нижнее критическое давление), получающееся по этой последней формуле, оказывается совершенно неверным вследствие неудовлетворительного выполнения условия совместности деформаций.

**1. Общий метод определения равновесных состояний. Решение задачи в первом приближении.** Рассмотрим задачу об определении больших прогибов прямоугольной цилиндрической панели, свободно опертой по краям на ребра. При этом предполагается, что поперечные сечения этих ребер имеют очень большой момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения параллельно поверхности пластины, и очень малый момент инерции относительно оси, перпендикулярной к поверхности пластины. Поэтому будем считать, что ребра не дают возможности перемещаться краям пластины в направлении, перпендикулярном к ее поверхности, но совершенно не препятствуют перемещениям ее краев в направлении, касательном к ее поверхности и перпендикулярном к направлению ребра.

Предполагается также, что ребра являются нерастяжимыми.

Как известно, эта задача приводится к краевой задаче для системы нелинейных уравнений

$$\triangle^2\Phi = -Et\left(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}{}^2 + \frac{w_{xx}}{R}\right) \tag{1.1}$$

$$D\triangle^2 w - \Phi_{xx}w_{yy} - \Phi_{yy}w_{xx} + 2\Phi_{xy}w_{xy} - \frac{1}{R}\Phi_{xx} = P_2 \tag{1.2}$$

где $w$ — прогиб точек панели в направлении к оси кривизны панели, $t$ — толщина, $R$ — радиус кривизны, $D = Et^3 / 12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость панели, $\Phi$ — функция напряжения, через которую мембранные усилия выражаются по следующим формулам:

$$T_1 = \Phi_{yy}, \qquad T_2 = \Phi_{xx}, \qquad S = -\Phi_{xy} \tag{1.3}$$

Непосредственно у продольных ребер панели при $y = 0$ и $y = b$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et}(\Phi_{yy} - \nu\Phi_{xx}) = 0, \qquad T_y = \Phi_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

Первое из этих условий означает, что панель непосредственно у ребра, так же как и самое ребро, не растягивается в направлении ребра.

Второе условие означает, что ребро не сопротивляется его изгибу в касательном к панели направлении.

Из предыдущих двух уравнений следует, что при $y = 0$ и $y = b$

$$\Phi_{yy} = 0 \tag{1.5}$$

Аналогичным образом можно получить граничные условия, которым удовлетворяет функция $\Phi$ вблизи перечных ребер:

$$\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a \tag{1.6}$$

Ввиду свободного опирания панели на ребра также должны выполняться условия, обеспечивающие отсутствие изгибающих моментов на краях панели:

$$\begin{aligned} w = w_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a \\ w = w_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b \end{aligned} \tag{1.7}$$

Приближенное значение функции прогиба будем разыскивать в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} C_{mn} \varphi_{mn} \tag{1.8}$$

где

$$\varphi_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1.9}$$

Очевидно, что каждый член этого ряда удовлетворяет условиям (1.7). Подставляя выражение $w$ в уравнение (1.1), получим

$$\Delta^2\Phi = -Et \sum_{mn,\, pq} C_{mn} C_{pq} (\varphi_{mn,\, xx}\varphi_{pq,\, yy} - \varphi_{mn,\, xy}\varphi_{pq,\, xy}) - \frac{Et}{R} \sum_{m,\, n} C_{mn}\varphi_{mn,\, xx} \tag{1.10}$$

Это уравнение будем решать методом Фурье. Воспользуемся представлением в виде двойного ряда Фурье функции

$$\varphi_{mn,\, xx}\varphi_{pq,\, yy} - \varphi_{mn,\, xy}\varphi_{pq,\, xy} = \sum_{k,\, l} \frac{4}{ab} A_{mn,pq}^{kl} \varphi_{kl} \tag{1.11}$$

где

$$A_{mn,pq}^{kl} = \iint (\varphi_{mn,\, xx}\varphi_{pq,\, yy} - \varphi_{mn,\, xy}\varphi_{pq,\, xy}) \varphi_{kl}\, dx\, dy$$

Здесь и далее интегралы берутся по всей площади панели. Подставляя (1.11) в (1.10), находим

$$\Delta^2\Phi = -Et \sum_{mn,\, pq,\, kl} \frac{4}{ab} A_{mn,pq}^{kl} \varphi_{kl} C_{mn} C_{pq} + \frac{Et}{R} \sum_{kl} C_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \varphi_{kl} \tag{1.12}$$

Решение этого уравнения будем разыскивать в виде ряда

$$\Phi = \sum\sum \alpha_{kl} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{l\pi y}{b} = \sum\sum \alpha_{kl}\varphi_{kl} \tag{1.13}$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (1.4) и (1.6), а коэффициенты $\alpha_{kl}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right]^2 \alpha_{kl} = -Et \sum_{mn,pq}^{N} \frac{4}{ab} A_{mn,pq}^{kl} C_{mn} C_{pq} + \frac{Et}{R} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 C_{kl} \tag{1.14}$$

При этом $C_{pq} = 0$, если $p > N$ или $q > N$. Далее, подставляя в уравнение (1.2) выражения (1.8) и (1.13), умножая обе части полученного уравнения на $\varphi_{rs}$ и интегрируя по всей поверхности панели, после несложных вычислений приходим к системе уравнений.

$$D\left[\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi s}{b}\right)^2\right]\alpha_{rs}-\sum_{kl,\,mn}\alpha_{kl}C_{mn}\frac{4}{ab}\iint\Big[\varphi_{kl,\,xx}\varphi_{mn,\,yy}+ \tag{1.15}$$

$$+\varphi_{kl,\,yy}\varphi_{mn,\,xx}-2\varphi_{kl,\,xy}\varphi_{mn,xy}\Big]\varphi_{rs}\,dx\,dy+\frac{1}{R}\left(\frac{\pi r}{a}\right)\alpha_{rs}=\frac{4}{ab}\iint P_z\varphi_{rs}\,dx\,dy$$

Интегрируя по частям и учитывая, что на краях панели функции $\varphi_{rs}$ равны нулю, имеем

$$\iint\varphi_{kl,\,xx}\,\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,yy,\,xx}\,\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,yy,\,x}\,\varphi_{rs,\,x}+\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs,\,xx})\,dx\,dy$$

$$\iint\varphi_{kl,\,yy}\,\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,xx,\,yy}\,\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,xxy}\,\varphi_{sr,\,y}+\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs,\,yy})\,dx\,dy\,+$$

$$+\,2\iint\varphi_{kl,\,xy}\,\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(2\varphi_{mn,\,xx,\,yy}\varphi_{rs}+2\varphi_{mn,\,xyy}\,\varphi_{rs,\,x}+2\varphi_{mn,\,xxy}\varphi_{rs,\,y}+2\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs,\,xy})\,dx\,dy$$

Следовательно,

$$A^{rs}_{kl,\,mn}+A^{rs}_{mn,\,kl}=A^{kl}_{mn,\,rs}+A^{kl}_{rs,\,mn}=$$

$$=\iint\varphi_{kl}\,(\varphi_{mn,\,yy}\,\varphi_{rs,\,xx}+\varphi_{mn,\,xx}\,\varphi_{rs,\,yy}-2\varphi_{mn,\,xy}\,\varphi_{rs,\,xy})\,dx\,dy$$

Подставив это выражение и выражения (1.14) в (1.15), для определения коэффициентов $C_{rs}$ получаем следующую систему уравнений:

$$D\left[\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi s}{b}\right)^2\right]^2C_{rs}+\sum_{kl,\,mn,\,\alpha\beta,\,\gamma\delta}\frac{16Et\,(A^{\;kl}_{rs,\,mn}+A^{\;kl}_{mn,\,rs})\,A^{kl}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}C_{mn}C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}}{[(k\pi/a)^2+(l\pi/b)^2]^2\,a^2b^2}-$$

$$-\sum_{kl,\,mn}\frac{4Et}{ab\,R}\frac{(A^{\;kl}_{rs,\,mn}+A^{\;kl}_{mn,\,rs})\,(k\pi/a)^2\,C_{kl}C_{mn}}{[(k\pi/a)^2+(l\pi/b)^2]^2}-$$

$$-\frac{Et}{R}\left(\frac{\pi r}{a}\right)^2\sum_{mn,\,pq}\frac{4}{ab}\,\frac{A_{mn,\,pq}C_{mn}C_{pq}}{[(\pi r\,/\,a)^2+(\pi s\,/\,b)^2]^2}+\frac{Et\,/\,R^2\,(\pi r\,/\,a)^4\,C_{rs}}{[(\pi r\,/\,a)^2+(\pi s\,/\,b)^2]^2}=$$

$$=\frac{4}{ab}\iint p_2\varphi_{rs}\,dx\,dy \tag{1.16}$$

Эту систему следует решать методом последовательных приближений.

Для получения более простых формул рассмотрим первое приближение к решению, когда $N=1$. В этом случае, полагая, что давление равномерно распределено по всей поверхности панели, после несложных вычислений и введения обозначений

$$k^*=\frac{b^2}{Rt},\qquad h=\frac{b^2}{SR},\qquad \gamma=\frac{b^2}{a^2} \tag{1.17}$$

находим следующую зависимость давления от прогиба в центре панели:

$$P_z=\frac{\pi^2}{64R^3}\,\frac{Etb^2\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\left[A\,(\gamma)\left(\frac{c_{11}}{h}\right)^2-\left(\frac{c_{11}}{h}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{4.46\gamma^2}{k^{*2}}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^4\right)\frac{c_{11}}{h}\right] \tag{1.18}$$

Здесь

$$A\,(\gamma)=\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2\sum_k\sum_l\left(\frac{1}{k^2+l^2\,/\,\gamma}\right)^2\left(\frac{1}{k}\,\frac{l}{4-l^2}+\frac{1}{l}\,\frac{k}{4-k^2}\right)^2 \tag{1.19}$$

Приводим значения этой величины при некоторых значениях параметра удлиненности панели:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $b/a = 1$ | 0.75 | 0.5 | 0.3 |
| $A = 0.46$ | 0.47 | 0.49 | 0.5 |

При малых прогибах можно пренебречь членами, содержащими высшие степени и произведения $C_{rs}$. При этом можно получить следующее выражение для $C_{rs}$, известное из линейной теории (при $p_z = \text{const}$):

$$C_{rs} = 16P_z\,(-1)^{\frac{1}{2}(r+s-2)}\, b^4 \left(D\pi^6 \left[(\gamma r^2 + s^2)^2 + \frac{k^2}{8.7}\,\frac{\gamma^2}{[\gamma + (s/r)^2]^2}\right] rs\right)^{-1}$$

Рассматривая это выражение, мы замечаем, что при малых прогибах коэффициенты $C_{rs}$, вычисленные по линейной теории, быстро убывают по своей величине, если панель имеет небольшой параметр кривизны порядка 20—30. Кроме того, из этой формулы можно заметить, что если величина $\gamma$ мала, т. е. если панель сильно вытянута в длину, то коэффициенты будут медленно убывать с увеличением номера. Отсюда следует, что первое приближение может давать хорошие результаты для слабо изогнутых и не очень сильно удлиненных панелей.

**2. Решение во втором приближении.** Будем задаваться формой прогиба в виде

$$w = c_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + c_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \tag{2.1}$$

При этом из формулы (1.16) находим два уравнения для определения коэффициентов прогиба $c_{11}$ и $c_{13}$. Коэффициенты этих уравнений содержат величины $A_{mn,\,pq}^{kl}$, вычисляемые по формуле (1.12), а также величины

$$B_{mn,\,pq}^{kl} = A_{mn,\,pq}^{kl} + A_{pq,\,mn}^{kl} = B_{pq,\,mn}^{kl} = B_{nm,\,pq}^{lk} =$$

$$= \frac{8kl\,mn\,pq\,[2\,(m^2q^2 + n^2p^2) - (k^2 - m^2 - p^2)\,(l^2 - n^2 - q^2)]\,\pi^2}{[(k^2 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2]\,[(l^2 - n^2 - q^2)^2 - 4n^2q^2]\,ab}$$

$$\mu_{kl} = \frac{(\gamma+1)^2}{(k^2\gamma + l^2)^2}, \qquad k,\ l = 1, 3, \ldots, m,\ n,\ p,\ q - 1 \text{ и } 3 \tag{2.2}$$

Пользуясь обозначениями (1.17) и вводя новые обозначения

$$\zeta = \frac{c_{11}}{t}, \qquad \zeta_{13} = \frac{c_{13}}{c_{11}}, \qquad P_z^{\,*} = \frac{p_z b^4}{Et^4} \tag{2.3}$$

$$L_1 = \frac{16\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\{3.55 + 1.92\,(\mu_{13} + \mu_{31}) + 1.28\mu_{33} + 0.216\,(\mu_{51} + \mu_{15}) + 0.33\,(\mu_{35} + \mu_{53}) +$$
$$+ 0.094\,(\mu_{71} + \mu_{17}) - \zeta_{13}\,(7.8 + 38\mu_{13} + 8.67\mu_{31} - 8.9\mu_{33} + 1.19\mu_{51} - 7.65\mu_{15}) +$$
$$+ \zeta_{13}^2\,(21.2 + 163\mu_{13} + 29.5\mu_{31} + 18.5\mu_{33} + 4.2\mu_{51} + 49\mu_{15}) -$$
$$- \zeta_{13}^3\,(12.7 - 52\mu_{13} + 31\mu_{31} - 11\mu_{33} + 69\mu_{15} + 4.8\mu_{51})\}.$$

$$M_1 = \frac{4\gamma^2 k^*}{(1+\gamma)^2}\{4 - 1.95\,(2 + \mu_{13})\,\zeta_{13} + 6.5\,(1 + 2\mu_{13})\,\zeta_{13}^2\}$$

$$N_1 = \frac{\pi^4\,(1+\gamma)^2}{10.92} + \frac{\gamma^2 k^{*2}}{(1+\gamma)^2}$$

$$L_1 + L_2 = \frac{48\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\{-2.61 - 12.7\mu_{13} - 2.88\mu_{31} + 2.96\mu_{33} - 0.40\mu_{51} - 0.48\mu_{71} +$$
$$+ \zeta_{13}\,(21.2 + 162\mu_{13} + 29.5\mu_{31} + 18.5\mu_{33} + 4.2\mu_{51} + 6.2\mu_{71}) -$$
$$- \zeta_{13}^2\,(38.2 - 156\mu_{13} + 94\mu_{31} - 32.6\mu_{33} + 14.5\mu_{51}) + \zeta_{13}^3\,(85 + 32\mu_{13} + 227\mu_{31} + 35\mu_{51})\}$$

$$M_1 + M_2 = \frac{12\gamma^2 k^*}{(1+\gamma)^2}\{-1.95 - 0.98\mu_{13} + 13\,(1 + 2\mu_{13})\,\zeta_{13} + 12\mu_{13}\zeta_{13}^2\}$$

$$N_1 + N_2 = 3\left\{\frac{\pi^4}{10.92}\,(9+\gamma)^2 + \frac{\gamma^2 k^{*2}}{(\gamma+9)^2}\right\}\zeta_{13} \tag{2.4}$$

указанные уравнения можно привести к виду:

$$L_1\zeta^2 - M_1\zeta^3 + N_1\zeta = 1.621 p_z^* \tag{2.5}$$

$$(L_1 + L_2)\zeta^3 - (M_1 + M_2)\zeta^2 + (N_1 + N_2)\zeta = 1.621 p_z^* \tag{2.6}$$

Исключая из них $p_z^*$, находим зависимость между $\zeta$ и $\zeta_{13}$:

$$\varphi = L_2\zeta^2 - M_2\zeta + N_2 = 0 \tag{2.7}$$

Задаваясь различными значениями $\zeta_{13}$ и определяя соответствующие им значения $\zeta$ из уравнения (2.7), по формуле (2.5) можно построить график изменения параметра давления $p_z^*$. Для определения критических значений давления составляем дополнительное уравнение

$$\frac{dp_z^*}{d\zeta_{13}} = \frac{\partial p_z^*}{\partial\zeta_{13}} - \frac{\partial p_z^*}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_{13}} : \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0$$

или

$$(L_1'\zeta^3 - M_1'\zeta^2 + N_1'\zeta)(2L_2\zeta - M_2) - (3L_1\zeta^2 - 2M_1\zeta + N_1)(L_2'\zeta^2 - M_2'\zeta + N_2') = 0 \tag{2.8}$$

где штрихи обозначают производные по $\zeta_{13}$.

Значения $\zeta_{13}$ и $\zeta$, соответствующие экстремальным значениям давления, можно найти лишь подбором, задаваясь различными значениями $\zeta_{13}$ и подставляя их и значения $\zeta$, найденные из (2.7), в уравнение (2.8), добиваясь его удовлетворения.

*Пример.* Пусть $\gamma = b^2 / a^2 = {}^1/_4$. Тогда

$$\mu_{13} = 0.01825 \quad \mu_{31} = 0.148 \quad \mu_{33} = 0.0123 \quad \mu_{15} = 0.0297$$
$$\mu_{51} = 0.00245 \quad \mu_{53} = 0.0067 \quad \mu_{35} = 0.0021 \quad \mu_{71} = 0.0095$$

Пусть, кроме того, $k^* = 80$. Указанным путем находим $\zeta_{13} \approx -0.032$. Соответствующее значение $\zeta$ для верхнего критического давления (для давления хлопка) равно 3.08, при нижнем критическом давлении оно равно 10.32). Значения относительного прогиба в центре пластины $\zeta_1^\circ$, $\zeta_2^\circ$ и значения параметра верхнего критического давления $p_{1z}^*$ и параметра нижнего критического давления $p_{2z}^*$, вычисленные по разным формулам, приводим в табл. 1.

*Таблица 1*

| | $a/b$ | $k^*$ | $\overset{\circ}{\zeta}_1$ | $\overset{\circ}{\zeta}_2$ | $p_{1z}^*$ | $p_{2z}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| В первом приближении по М. А. Колтунову | 2 | 40 | 2.124 | 5.380 | 44.8 | 20.2 |
| По формуле (1.18) данной работы . . . . | 2 | 40 | 2.30 | 3.50 | 45.8 | 37.6 |
| По М. А. Колтунову . | 2 | 80 | 3.41 | 11.64 | 256 | —127 |
| По формуле (1.18) . . . | 2 | 80 | 3.67 | 9.93 | 262 | 54 |
| По формуле (1.16) во втором приближении | 2 | 80 | 3.18 | 10.65 | 255 | 83 |

Неточное выполнение условия совместности деформаций при заданной форме прогиба равносильно ослаблению внутренних связей в панели, приводящему к уменьшению энергии деформации срединной поверхности; поэтому при всех прочих условиях, удовлетворяя уравнению (1.1) лишь интегрально, мы должны получить заниженные значения давлений хлопка и выхлопа. Эти соображения объясняют результаты вычислений по формуле М. А. Колтунова [1] и по формуле (1.18) данной работы. Обе эти формулы были выведены, задаваясь одной и той же формой прогиба для одних и тех же граничных условий, но первая из них в отличие от второй была получена при неточном выполнении условия совместности деформаций. Заметим, что в рассматриваемом примере разница в величине верхнего критического давления, определенного по этим формулам, невелика. Давление же выхлопа (а также деформация панели после хлопка) определяется по М. А. Колтунову в первом приближении совершенно неверно. Отсюда следует, что, применяя метод Бубнова — Галеркина к интегрированию уравнения совместности деформаций. необходимо точнее определить функцию напряжения, задаваясь ее выражением, содержащим несколько варьируемых параметров.

Ввиду громоздкости вычислений критические давления во втором приближении нами определены лишь для значения параметра кривизны $k^* = 80$. Из таблицы мы видим, что второе приближение внесло незначительную поправку в величину верхнего критического давления и более чем на 50% увеличило нижнее критическое давление по сравнению с первым приближением по формуле (1.18).

В заключение заметим, что, увеличивая число членов ряда, выражающего прогиб, мы облегчаем возможность как хлопка, так и обратного выхлопа. Поэтому найденное нами приближенное значение давления хлопка больше истинного, а приближенное значение давления выхлопа меньше истинного.

Поступила 14 V 1953

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтунов М. А. Учет конечных перемещений в задаче об изгибе и устойчивости пластинок и пологих оболочек. Вестник Моск. гос. университета, № 5, 1952.

Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Э. Я. Риекстыньш

(Рига)

В этой работе приводятся некоторые общие формулы для преобразования Лапласа, частные случаи которых можно найти в таблицах (см., например, [1]). Такие формулы могут оказаться полезными при решении дифференциальных уравнений параболического типа, в частности телеграфных уравнений в случае кабеля. При выводе этих формул применяется преобразование Эфроса и рассматриваются некоторые новые функции. В конце работы получена связь между применяемыми новыми функциями и функциями параболического цилиндра с целым отрицательным индексом.

1. А. М. Эфросом была установлена следующая формула [2]. Пусть

$$L^{-1}\{f(p)\} = F(t)$$

где символ $L^{-1}$ означает обращение преобразования Лапласа. Тогда при некоторых дополнительных условиях имеет место

$$L^{-1}\{f(q(p))\,\psi(p)\} = \int_0^\infty F(x)\,\varphi(t, x)\,dx \tag{1.1}$$

Здесь $q(p)$ и $\psi(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ — аналитические функции, причем $\operatorname{Re} q(p) > 0$; при этих значениях $p$;

$$\varphi(t, x) = L^{-1}\{e^{-xq(p)}\psi(p)\}$$

причем предполагается, что $L^{-1}$ существует.

В частном случае, если $q(p) = \sqrt{p}$, $\psi(p) = 1$, формула (1.1) даст [2]

$$L^{-1}\{f(\sqrt{p})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty F(2\tau\sqrt{t})\,e^{-\tau^2}\tau\,d\tau \tag{1.2}$$

Можно убедиться в том, что для справедливости формулы (1.2) достаточно существование таких положительных постоянных $M$ и $\sigma$, чтобы при всех $t \geqslant 0$

$$|F(t)| \leqslant Me^{\sigma t}$$

Формулу (1.2) используем для нахождения

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = \Phi_n(\alpha, t) \tag{1.3}$$

где $n$ — целое положительное, а $\alpha \neq 0$. В этом случае

$$F(t) = L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\alpha + p}\right)^n\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\alpha t}$$

и, очевидно, указанное выше неравенство имеет место. Поэтому по формуле (1.2) получаем

$$\Phi_n(\alpha, t) = \frac{2}{(n-1)!\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau^{n-1}(2\sqrt{t})^{n-1}\,e^{-2\alpha\tau\sqrt{t}}\,e^{-\tau^2}\tau\,d\tau$$

После подстановки $\alpha\sqrt{t}+\tau=u$ имеем

$$\Phi_n(\alpha, t)=\frac{2n(\sqrt{t})^{n-2}}{(n-1)!\sqrt{\pi}}e^{\alpha^2 t}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}(u-\alpha\sqrt{t})^n e^{-u^2}\,du=$$

$$=e^{\alpha^2 t}\frac{2^n(\sqrt{t})^{n-2}}{(n-1)!\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\alpha\sqrt{t})^k\binom{n}{k}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}u^{n-k}e^{-u^2}\,du \tag{1.4}$$

Интеграл в формуле (1.4) можно несколько раз проинтегрировать по частям. Таким образом, получается

$$\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}u^p e^{-u^2}\,du= \tag{1.5}$$

$$=e^{-\alpha^2 t}\left[\sum_{m=0}^{[^1/_2\,p]-2}\frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2m-1)}{2^{m+2}}(\alpha\sqrt{t})^{p-2m-3}+\frac{1}{2}(\alpha\sqrt{t})^{p-1}\right]+R_p$$

где

$$R_p=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}\,(p-1)!!}{2^{^1/_2\,p+1}}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t} & \text{при четном } p\\[2ex] \dfrac{(p-1)!!}{2^{^1/_2\,(p+1)}}e^{-\alpha^2 t} & \text{при нечетном } p\end{cases}\qquad \operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\alpha\sqrt{t}}^{\infty}e^{-u^2}\,du$$

**2.** В сумме (1.4) собираем сперва члены, которые содержат $\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$. Такие члены будут только при четных значениях значка $p$. Обозначая коэффициенты при $e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$ через $P_n(\alpha, t)$, имеем

$$P_n(\alpha, t)=\frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(n-1)!}\left[(2\alpha\sqrt{t})^n+\sum_{\nu=1}^{[^1/_2\,n]}\binom{n}{2\nu}(2\nu-1)!!\,2^{n-\nu}(\alpha\sqrt{t})^{n-2\nu}\right] \tag{2.1}$$

Многочлен в квадратных скобках отличается только знаками между членами от многочлена Чебышева — Эрмита $H_n(\alpha\sqrt{t})$. Обозначая его через $Hi_n(\alpha\sqrt{t})$, имеем следующее соотношение

$$Hi_n(x)=(-i)^n H_n(ix) \tag{2.2}$$

Таким образом, имеем, наконец

$$P_n(\alpha, t)=\frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(n-1)!}Hi_n(\alpha\sqrt{t}) \tag{2.3}$$

Из свойств многочлена $H_n(x)$ легко получаются свойства для $Hi_n(x)$. Так, например, имеем

$$Hi_n(x)=e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{x^2} \tag{2.4}$$

$$Hi_n'(x)=2n\,Hi_{n-1}(x) \tag{2.5}$$

$$Hi_n''(x)+2x\,Hi_n'(x)-2n\,Hi_n(x)=0 \tag{2.6}$$

$$Hi_{n+1}(x)=2x\,Hi_n(x)+2n\,Hi_{n-1}(x) \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}e^{-t^2}\cos 2tx&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}Hi_{2k}(x)\\ e^{-t^2}\sin 2tx&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}Hi_{2k+1}(x)\end{aligned} \tag{2.8}$$

**3.** Собираем теперь остальные члены в сумме (1.4). Формула (1.5) показывает что все остальные члены содержат множитель $e^{-\alpha^2 t}$, который сокращается с множителем $e^{+\alpha^2 t}$ перед суммой.

Таким образом видно, что сумма остальных членов содержит только целые степени аргумента $\sqrt{t}$. Кроме того, она является функцией параметра $\alpha$.

Обозначая эту функцию через $Q_n(\alpha, t)$, из формул (1.4) и (1.5) находим

$$Q_n(\alpha, t) = \frac{(2\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{[{}^1/_2(n-1)]} \lambda_{nk} \left(\frac{1}{2\alpha^2 t}\right)^k \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1-2k} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu-1)(n-\nu-3)\ldots(n-\nu-2k+1) & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant [{}^1/_2(n-1)] \\ (-1)^{n-1} & \text{при } k = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

При большом $n$ и малом $k$ формулу (3.2) для вычисления коэффициентов $\lambda_{nk}$ целесообразно представить в другом виде. Для этого надо использовать вспомогательное соотношение, которое получается из формулы бинома Ньютона при помощи индукции для $n > 2k$:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^k (x-1)^n = \sum_{\nu=0}^{n-2k-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-1-\nu)(n-3-\nu)\ldots(n-2k+1-\nu)\, x^{n-2k-\nu} +$$

$$+ (-1)^{n-2k} \left\{ (2k-1)!! \left[\binom{n}{2k} + \frac{(-1)^k}{x^{2k}}\right] - \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \binom{n}{2k-2-2\nu} \frac{(2k-3-2\nu)!!\,(2\nu+1)!!}{x^{2+2\nu}} \right\}$$

Легко видеть, что при $n > 2k$ и $x = 1$ левая сторона формулы обращается в нуль. Поэтому при $k > 0$ имеем тождество

$$\lambda_{nk} = \sum_{\nu=0}^{n-2k-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-1-\nu)(n-3-\nu)\ldots(n-2k+1-\nu) = \tag{3.3}$$

$$= (-1)^{n-2k} \left\{ \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \binom{n}{2k-2-2\nu} (2k-3-2\nu)!!\,(2\nu+1)!! - (2k-1)!! \left[\binom{n}{2k} + (-1)^k\right] \right\}$$

$$(k>0)$$

Эта формула полезна при малом $k$.

Таким образом, мы имеем следующую окончательную формулу:

$$\Phi_n(\alpha, t) = L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\alpha+\sqrt{p}}\right)^n\right\} = P_n(\alpha, t)\, e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t} + Q_n(\alpha, t) \tag{3.4}$$

**4.** Можно получить также другое выражение для $\Phi_n(\alpha, t)$. Если брать производную по $\alpha$ в формуле (3.4), то получаем

$$\Phi_{n+1}(\alpha, t) = -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi_n(\alpha, t) \tag{4.1}$$

Но из формулы (3.4) непосредственно можно проверить, что

$$\Phi_1(\alpha, t) = -\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t}\right)$$

Поэтому формула (4.1) дает следующее соотношение:

$$\Phi_n(\alpha, t) = \frac{(-1)^n}{2t\,(n-1)!}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t}\right) \tag{4.2}$$

Из формулы (4.1) дальше следует

$$P_{n+1}(\alpha, t) = -\frac{1}{n}\left(\frac{\partial P_n}{\partial \alpha}(\alpha, t) + 2\alpha t P_n(\alpha, t)\right) \tag{4.3}$$

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, P_n(\alpha, t) - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_n(\alpha, t) \tag{4.4}$$

Применяя формулу (4.4) повторно, получаем

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{[{}^1/_2 n]} (-1)^\nu \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-\nu)} \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} P_{n-\nu}(\alpha, t) \tag{4.5}$$

В силу формул (2.3) и (2.5) имеем

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} P_{n-\nu}(\alpha, t) = \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-\nu-2}}{2(n-\nu-1)!} \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} \; Hi_{n-\nu}(\alpha\sqrt{t}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-\nu-2}}{2(n-\nu-1)!} (\sqrt{t})^\nu 2^\nu (n-\nu)(n-\nu-1)\cdots(n-2\nu+1)\, Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-\nu}(\sqrt{t})^{n-2}2^{\nu-1}(n-\nu)}{(n-2\nu)!} Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t})$$

Подставляя это выражение в формулу (4.5), получаем

$$Q_{n+1}(\alpha, t) = \frac{(-\sqrt{t})^n}{n!\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=0}^{[{}^1/_2 n]} 2^\nu \frac{(n-\nu)!}{(n-2\nu)!} Hi_{n-2\nu}(\alpha\sqrt{t}) \tag{4.6}$$

Очевидно, $Q_{n+1}(\alpha, t)$ является многочленом от $\alpha$ и мы можем разложить его по степеням $\alpha$ по формуле Тейлора. Для этого из формулы (2.1) имеем

$$Hi_{2n}(0) = 2^n(2n-1)!!, \qquad Hi_{2n+1}(0) = 0 \tag{4.7}$$

При помощи этих соотношений и формулы (2.5) легко найти требуемое разложение. Ввиду того что разложение единственно и полученная формула должна совпадать с формулой (3.1), получаем еще следующее представление коэффициентов $\lambda_{nk}$:

$$\lambda_{nk} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1-2k)!} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-1-\nu)!}{2^{k-\nu}(k-\nu)!} \tag{4.8}$$

Если выражения для функций $P_n$ и $Q_n$ вычисляются постепенно, то удобно использовать также формулу (4.4).

5. При помощи функции $\Phi_n(\alpha, t)$ получим также некоторые другие формулы преобразования Лапласа. Формулы (2.3) и (4.6) показывают, что

$$P_n(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 3, \qquad Q_n(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 2$$

Поэтому при $n \geqslant 3$

$$\Phi_n(\alpha, 0) = 0$$

Таким образом, в силу свойства преобразования Лапласа при $n \geqslant 3$ имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.1}$$

Но можно применить также другой прием. Из тождества

$$\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n} = \frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-2}} - \frac{2\alpha}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\sqrt{p})^n}$$

следует

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\Phi_{n-2}(\alpha, t)-2\alpha\Phi_{n-1}(\alpha, t)+\alpha^2\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.2}$$

Сравнивая формулы (5.1) и (5.2), получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi_n(\alpha, 0)=0 \qquad \text{при } n\geqslant 3+2k \tag{5.3}$$

Поэтому при $n \geqslant 3+2k$ имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}\Phi_n(\alpha, t) \tag{5.4}$$

Надо отметить, что соотношение между $n$ и $k$ необходимо также для того, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках равенства (5.4), была изображением.

Подобным образом ввиду тождества

$$\frac{\sqrt{p}}{(\alpha+\sqrt{p})^n}=\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}}-\frac{\alpha}{(\alpha+\sqrt{p})^n}$$

и соотношения (5.3) имеем

$$L^{-1}\left\{\frac{p^k\sqrt{p}}{(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[\Phi_{n-1}(\alpha, t)-\alpha\Phi_n(\alpha, t)\right] \qquad (n\geqslant 2k+2) \tag{5.5}$$

Имеем еще соотношение

$$\frac{\partial}{\partial p}\,\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n-1}}=\frac{-(n-1)}{2\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n} \qquad (n\geqslant 2)$$

из которого согласно, свойству преобразования Лапласа, получается

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\}=\frac{2t}{n-1}\Phi_{n-1}(\alpha, t) \qquad (n\geqslant 2) \tag{5.6}$$

Левая часть формулы (5.6) имеет смысл также при $n=0$ и $n=1$. Для $n=1$ можно воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}=\frac{\alpha}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^{n+1}}+\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^{n+1}}$$

которое дает

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})}\right\}=2\alpha t\Phi_1(\alpha, t)+\Phi_2(\alpha, t)=e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}$$

Кроме того, это тождество и формула (5.4) показывают, что имеет место следующая рекуррентная формула:

$$\Phi_{n+1}(\alpha, t)=\frac{2t}{n-1}\Phi_{n-1}(\alpha, t)-\frac{2\alpha t}{n}\Phi_n(\alpha, t) \qquad (n\geqslant 2) \tag{5.7}$$

**6.** Более сложно выразятся при помощи $\Phi_n(\alpha, t)$ оригиналы некоторых других изображеиий.

Легко видеть, что имеет место следующее разложение:

$$\frac{1}{p^m(\alpha+p)^n}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(-1)^\nu\binom{n+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{n+\nu}p^{m-\nu}}+(-1)^m\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\binom{m+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{m+\nu}(\alpha+p)^{n-\nu}}$$

Заменяя в этой формуле $p$ на $\sqrt{p}$ и подставляя $m = 2k$ или $m = 2k + 1$. получаем

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu} t^{k-1/2\nu-1}}{\alpha^{n+\nu}\Gamma(k-1/2\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\binom{2k+\nu-1}{\nu}}{\alpha^{2k+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu} t^{k-1/2(1+\nu)}}{\alpha^{n+\nu}\Gamma(k+1/2(1-\nu))} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\binom{2k+\nu}{\nu}}{\alpha^{2k+\nu+1}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.2)$$

В частности, при $k = 1$ из формулы (6.1) следует

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^{n+1}\sqrt{\pi t}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+1}{\alpha^{2+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (6.3)$$

Применяя формулу (5.7), последнюю формулу можно представить также в виде

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(\alpha+\sqrt{p})^n}\right\} = \frac{1}{\alpha^n}[1 - e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}\alpha\sqrt{t}] - 2t\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Phi_{n-k}(\alpha, t)}{\alpha^k(n-k)} \quad (6.4)$$

Подобным образом при $\alpha \neq \beta$ из разложения

$$\frac{1}{(\alpha+p)^n(\beta+p)^m} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu \binom{m+\nu-1}{\nu}}{(\beta-\alpha)^{m+\nu}(\alpha+p)^{n-\nu}} + \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu}}{(\alpha-\beta)^{n+\nu}(\beta+p)^{m-\nu}}$$

следует

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(\alpha+\sqrt{p})^n(\beta+\sqrt{p})^m}\right\} = \sum_{\nu=0}^{n-} \frac{(-1)^\nu \binom{m+\nu-1}{\nu}}{(\beta-\alpha)^{m+\nu}} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) + $$
$$+ \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu \binom{n+\nu-1}{\nu}}{(\alpha-\beta)^{n+\nu}} \Phi_{m-\nu}(\beta, t) \quad (6.5)$$

7. Имеем еще следующее разложение:

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu} \frac{\varkappa_{m\nu}^{(n)}}{p^{m-\nu}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\mu_{n\nu}^{(m)}\alpha^{n-m-\nu}}{(\alpha+p)^{n-\nu}}$$

где обозначено

$$\varkappa_{m\nu}^{(n)} = \frac{n}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{n+k-1}{\nu-1} \quad \text{при } \nu \neq 0, \qquad \varkappa_{m0}^{(n)} = 1$$

$$\mu_{n\nu}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu+m-k}\binom{m+k-1}{k}\binom{n}{\nu-k}2^{n-\nu+}$$

Из этого разложения при $m = 2k$ или $m = 2k + 1$ получаем

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^k}\left(\frac{\alpha-\sqrt{p}}{\alpha+\sqrt{p}}\right)^n\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu} \frac{\varkappa_{2k,\nu}^{(n)}}{\Gamma(k-1/2\nu)} t^{k-1/2\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{n\nu}^{(2k)}\alpha^{n-2k-\nu}\Phi_{n-\nu}(\alpha,t) \quad (7.1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}p^k}\left(\frac{\alpha-\sqrt{p}}{\alpha+\sqrt{p}}\right)^n\right\} = \sum_{\nu=0}^{2k} \frac{(-1)^\nu}{\alpha^\nu} \frac{\varkappa_{2k+1,\nu}^{(n)}}{\Gamma(k-1/2(\nu-1))} t^{k-1/2(\nu+1)} +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{n\nu}^{(2k+1)}\alpha^{n-2k-1-\nu}\Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \quad (7.2)$$

При $k = 1$ имеем

$$\mu_{n\nu}^{(2)} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{n}{k} (\nu + 1 - k) 2^{n-k} \tag{7.3}$$

и, следовательно,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha - \sqrt{p}}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = 1 - \frac{2n}{\alpha\sqrt{\pi t}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{n\nu}^{(2)} \alpha^{n-\nu-2} \Phi_{n-\nu}(\alpha, t) \tag{7.4}$$

Формула (7.3) полезна для малых значений $\nu$. Так, например, имеем

$$\mu_{n0}^{(2)} = 2^n, \qquad \mu_{n1}^{(2)} = 2^{n-1}(4 - n), \qquad \mu_{n2}^{(2)} = 2^{n-3}(n^2 - 9n + 24) \qquad \text{и т. д.}$$

Для значений $\nu$, близких к $n$, можно получить другую формулу. Подставляя $\nu = n - m$, получаем

$$\mu_{n,n-m}^{(2)} = 2^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n - m - \nu + 1)\, 2^{n-m-\nu}$$

Если тождество

$$\frac{(x-1)^n}{x^{m-1}} = \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x^{n-\nu-m+1} +$$

$$+ (-1)^{n-m+1}\binom{n}{n-m+1} + \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu} x^{-m+1+\nu}$$

продифференцируем по $x$ и потом подставим $x = 2$, то получается

$$\mu_{n,n-m}^{(2)} = 2n - m + 1 - \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (-m + 1 + \nu)\, 2^\nu \tag{7.5}$$

Из этой формулы имеем, например,

$$\mu_{n,n-1}^{(2)} = 2n, \qquad \mu_{n,n-2}^{(2)} = 2n - 1 + (-1)^n$$

$$\mu_{n,n-3}^{(2)} = 2(n-1)\,[1 - (-1)^n], \qquad \mu_{n,n-4}^{(2)} = 2n - 3 + (-1)^n\,[2n^2 - 6n + 3] \qquad \text{и т. д.}$$

Полученные выражения для коэффициентов позволяют формулу (7.4) представить также в другом виде, именно

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha - \sqrt{p}}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n\right\} = 1 - 2ne^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc} \alpha\sqrt{t} + \sum_{k=0}^{n-2} \mu_{nk}^{(2)}\, \alpha^{n-k-2} \Phi_{n-k}(\alpha, t) \tag{7.6}$$

Подобным образом можно было найти и некоторые другие формулы.

**8.** Частные случаи некоторых из полученных формул при значениях $n = 1, 2, 3$ можно найти в справочнике Диткина и Кузнецова [1]. Оказывается, что формулы (2.13), (2.14) и (2.17) этой книги, повидимому, из-за опечаток неправильны.

Формула (2.18) также напечатана ошибочно и должна иметь вид:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}(1 + \sqrt{p})^n}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t)^{1/2\,(n-1)} e^{1/2\, t} D_{-n}\left(\sqrt{2t}\right) \tag{8.1}$$

где $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра. Эта формула показывает, что существует связь между функцией $\Phi_n(\alpha, t)$ и функцией параболического цилиндра с целым отрицательным индексом. Но эту связь можно установить также без исполнения преобразования Лапласа.

Для целых неотрицательных значений $n$ существует формула [3]

$$D_n(x) = (-1)^n e^{{}^1/_4 x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-{}^1/_2 x^2}$$

Исходя из интегрального представления $D_n(x)$, можно показать, что при целых отрицательных значениях значка $-n$ в этой формуле надо заменить

$$\frac{d}{dx^n} \qquad \text{на} \quad \left(\int\limits_{\infty}^{x} dv\right)^n$$

так что

$$D_{-n}(x) = e^{{}^1/_4 x^2} \left(\int\limits_{x}^{\infty} dv\right)^n e^{-{}^1/_2 v^2} = e^{{}^1/_4 x^2} \int\limits_{x}^{\infty} \frac{(v-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-{}^1/_2 v^2} d \tag{8.2}$$

где $n$ — целое положительное.

При помощи подстановки $v = u\sqrt{2}$ и формулы (1.4) легко получается соотношение

$$D_{-n}(x) = \frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{}} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n-3} e^{-{}^1/_4 x^2} \Phi u = \left(\alpha, \frac{x^2}{2\alpha^2}\right)$$

Но ввиду того что $D_{-n}$ не зависит от $\alpha$, можно подставить $\alpha = x$. Таким образом, имеем

$$D_{-n}(x) = \frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-{}^1/_4 x^2} \Phi_{n-1}\left(x, \frac{1}{2}\right) \qquad (n \geqslant 2) \tag{8.3}$$

Этот результат можно получить также, сравнивая формулы (5.6) и (8.1).

Имея в виду формулу (4.2), получаем следующее определение для функций параболического цилиндра с целым отрицательным индексом:

$$D_{-n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-{}^1/_4 x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{{}^1/_2 x^2} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{8.4}$$

Можно также обратно выразить $\Phi_n(\alpha, t)$ через $D_{-n}$:

$$\Phi_n(\alpha, t) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{2t})^{n-2} e^{{}^1/_2 \alpha^2 t} D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t}) \tag{8.5}$$

Поэтому можно было во всех полученных формулах вместо $\Phi_n(\alpha, t)$ подставить соответствующее выражение с $D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t})$. Но, очевидно, формулы принимают более сложный вид. Кроме того, для выражения $D_{-n-1}(\alpha\sqrt{2t})$ при помощи более простых функций все же требуется функция $\Phi_n(\alpha, t)$.

Поступила 2 X 1952

Латвийский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению, стр. 129—130. ГИТТЛ, 1951.
2. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы, стр. 103, 129. Гос. научно-техн. изд. Украины. 1937.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, стр. 434—436. ГИТТЛ, 1951.

Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ XVII ТОМА

18

## ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Рукопись представляется в несброшированном виде, напечатанной на пишущей машинке, с интервалами между строками в два проката на одной стороне листа стандартного формата (30×21 см).

2. Как формулы, так и все обозначения должны быть отчетливо вписаны от руки. Недопустимо впечатание обозначений на машинке при помощи букв русского шрифта, совпадающих по начертанию с латинскими. В начертании букв должно быть совершенно отчетливое различие между строчными и прописными буквами, а также между латинскими и греческими. Индексы и степени при вписывании располагаются строго ниже и строго выше соответствующих букв. В журнале не приняты математические символы в виде готических букв. Индексы и черточки над буквами в математических обозначениях применять только в случае особой необходимости.

3. Редакция рекомендует двойную нумерацию формул: первая цифра обозначает номер параграфа, вторая после точки — номер формулы.

4. Чертежи прилагаются на отдельных листах с точным указанием их места ссылкой «фиг.» в тексте статьи и одновременно на левом поле страницы. Каждый чертеж должен быть подписан автором.

5. Литература должна приводиться в конце работы на отдельном листе, причем надлежит указать с сохранением последовательности в случае книги: фамилию автора, наименование книги, издательство, год издания; в случае журнала: фамилию автора, наименование работы, наименование журнала, том, выпуск, год издания.

Несоблюдение этих правил задерживает опубликование статей.

Т-07397 Подп. к печ. 1/XII 1953 г. Объем 10,96 печ. л. Уч.-изд. л. 11,2
Формат бум. $70\times108^1/_{16}$. Бум. л. 4 Тираж 3625 экз. Зак. 1710

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 12 руб.