Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПОСРЕДСТВОМ ВКЛЮЧЕНИЯ В ЦИКЛ

М. А. Лукомская

(Минск)

1. Понятие Σ-интеграла для решения системы дифференциальных уравнений. Понятие включения системы в цикл введено А. И. Маркушевичем [1]. В простейшем случае (цикл первого порядка) оно состоит в следующем.

Пусть дана система уравнений эллиптического или гиперболического типа

$$c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial x} = a_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad c_2 \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.1}$$

где $a_1, a_2, b_1, \ldots, d_2$ — достаточно гладкие функции от x и y.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются решением системы (1.1). Будем называть решением системы (1.1) функцию $f(z) = u + iv$, где $z = x + iy$.

Если криволинейные интегралы

$$U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_2 u + b_2 v)\, dx + (c_2 u + d_2 v)\, dy, \quad V = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_1 u + b_1 v)\, dx + (c_1 u + d_1 v)\, dy \tag{1.2}$$

где u и v — любое решение системы (1.1), не зависят от пути интегрирования, то функцию $U + iV$ будем называть Σ-интегралом от решения $u + iv$ системы (1.1).

Может случиться, что Σ-интеграл от решения системы (1.1) также является ее решением. Тогда говорят, что система (1.1) включена в цикл первого порядка. В этом случае аналитическое решение системы (1.1) представимо рядом по функциям, получаемым последовательным Σ-интегрированием комплексной постоянной (рядом по Σ-степенным функциям) [2,3]. Ниже указывается возможность представления в виде ряда по таким обобщенным степенным функциям аналитических решений уравнений предельного равновесия сыпучей среды для плоской задачи в случае отсутствия объемных сил, уравнений длинных волн и уравнений, определяющих p-аналитические функции для случая, когда $p(x, y)$ — функция гармоническая.

2. Уравнения сыпучей среды. Дана система уравнений [4]

$$\begin{aligned} &\cos\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \operatorname{tg}\rho \left[\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0 \\ &\sin(\varphi + \rho) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \cos(\varphi + \rho) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \operatorname{tg}\rho \left[\sin(\varphi + \rho) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos(\varphi + \rho) \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\rho = \text{const}$.

Сделаем замену переменных, принимая φ и σ за независимые переменные, а x и y за функции. Получим систему:

$$\begin{aligned} &-\cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + 2\sigma \operatorname{tg}\rho \left[\cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \sigma}\right] = 0 \\ &\sin(\varphi + \rho) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \cos(\varphi + \rho) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + 2\sigma \operatorname{tg}\rho \left[\sin(\varphi + \rho) \frac{\partial y}{\partial \rho} + \cos(\varphi + \rho) \frac{\partial x}{\partial \sigma}\right] = 0 \end{aligned}$$

Исключая из этой системы один раз $\partial x / \partial \varphi$, другой раз $\partial y / \partial \varphi$ и деля на σ, получим следующую, равносильную данной, систему:

$$\frac{\cos\rho}{\sigma}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -4\operatorname{tg}\rho\cos(\varphi+\rho)\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\sigma} + 2\operatorname{tg}\rho\cos(2\varphi+\rho)\frac{\partial y}{\partial\sigma}$$
$$\frac{\cos\rho}{\sigma}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -2\operatorname{tg}\rho\cos(2\varphi+\rho)\frac{\partial x}{\partial\sigma} - 4\operatorname{tg}\rho\sin(2\varphi+\rho)\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\sigma} \tag{2.2}$$

Эта система включается в цикл первого порядка [3], что можно проверить и непосредственно. Σ-интеграл от решения имеет вид:

$$\int\limits_{(\varphi_0,\sigma_0)}^{(\varphi,\sigma)} [-2\operatorname{tg}\rho\cos(2\varphi+\rho)\,x - 4\operatorname{tg}\rho\sin(\varphi+\rho)\cos\varphi y]\,d\varphi + \frac{\cos\rho}{\sigma}x\,d\sigma +$$
$$+ i\int\limits_{(\varphi_0,\sigma_0)}^{(\varphi,\sigma)} [-4\operatorname{tg}\rho\cos(\varphi+\rho)\sin\varphi x + 2\operatorname{tg}\rho\cos(2\varphi+\rho)\,y]\,d\varphi + \frac{\cos\rho}{\sigma}y\,d\sigma$$

и Σ-степенная функция 1-й степени, получаемая Σ-интегрированием единицы от точки (0,1) до точки (φ, σ), равна

$$-\operatorname{tg}\rho\sin(2\varphi+\rho) + \operatorname{tg}\rho\sin\rho + \cos\rho\ln\sigma + i\,[\operatorname{tg}\rho\cos(2\varphi+\rho) + 2\operatorname{tg}\rho\sin\rho\varphi - \sin\rho]$$

Все Σ-степенные функции вычисляются в конечном виде.

3. Уравнения длинных волн. Дана система [5]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{g}{B}\frac{\partial F}{\partial s}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (UF)}{\partial s} = 0 \tag{3.1}$$

Делаем замену переменных, принимая U и F за независимые переменные а s и t — за функции. Получаем систему:

$$\frac{g}{B}\frac{\partial t}{\partial U} = -\frac{\partial s}{\partial F} + U\frac{\partial t}{\partial F}, \qquad \frac{\partial s}{\partial U} - U\frac{\partial t}{\partial U} = -F\frac{\partial t}{\partial F} \tag{3.2}$$

Эта система Σ-интегрируема (интегралы (1.2) не зависят от пути интегрирования). Для этой системы Σ-интеграл от решения $s + it$ имеет вид:

$$S + i\Gamma = \int\limits_{(U_0,F_0)}^{(U,F)} -F t\,dU + (s - Ut)\,dF + i\int\limits_{(U_0,F_0)}^{(U,F)} (-s + Ut)\,dU + \frac{g}{B}t\,dF \tag{3.3}$$

Он не удовлетвлетворяет системе (3.2), но удовлетворяет системе [6]:

$$\frac{g}{B}U\frac{\partial S}{\partial U} - \frac{g}{B}F\frac{\partial\Gamma}{\partial U} = \frac{g}{B}F\frac{\partial S}{\partial F} + UF\frac{\partial\Gamma}{\partial F}, \quad \frac{g}{B}\frac{\partial S}{\partial U} = -F\frac{\partial\Gamma}{\partial F} \tag{3.4}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Эта последняя система равносильна следующей:

$$\frac{g}{B}\frac{1}{F}\frac{\partial S}{\partial U} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial F}, \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial U} = -\frac{\partial S}{\partial F} \tag{3.5}$$

Уравнения системы (3.5) получаются как линейные комбинации уравнений системы (3.4) с коэффициентами

$$0, \quad \frac{1}{F}; \qquad -\frac{B}{g}\frac{1}{F}, \qquad -\frac{B}{g}\frac{U}{F}$$

Система (3.5) включается в цикл первого порядка.

Решения $s+it$ системы (3.2) выражаются через решения $S+i\Gamma$ системы (3.5), или, что то же, через решения системы (3.4), по формулам

$$\frac{\partial S}{\partial U}=-Ft, \qquad \frac{\partial S}{\partial F}=s-Ut$$

что видно из (3.3). Каждое аналитическое решение системы (3.1) представляется рядом по функциям, являющимся «Σ-производными» Σ-степеней системы (3.4). Выражение для Σ-интеграла от решения $S+i\Gamma$ системы (3.4) имеет вид:

$$\int\limits_{(U_0,F_0)}^{(U,F)} -S dU+\Gamma dF+i\int\limits_{(U_0,F_0)}^{(U,F)} -\Gamma\, dU+\frac{g}{B}\frac{S}{F}\,dF$$

Все Σ-степени вычисляются в конечном виде.

4. Уравнения, определяющие p-аналитические функции. Дана система [7]:

$$p\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -p\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

где $p\ (x, y)$ — гармоническая функция.

Эта система равносильна следующей:

$$\begin{gathered} p\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=p\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Уравнения системы (4.2) получаются как линейные комбинации уравнений системы (4.1) с коэффициентами

$$\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Легко видеть, что система (4.2) включается в цикл первого порядка.

Поступила 20 V 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. Усп. мат. наук, т. I, вып. 3—4 (13—14), 1946.
2. Bers L. Gelbart A. On a class of functions defined by partical differential equations. Tr. Am. Math. Soc., 56, No. 1, 1946.
3. Лукомская М. А. Об одном обобщении класса аналитических функций. ДАН СССР, т. LXXIII, № 5, 1950.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР, 1942.
5. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. В. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Гостехиздат, 1938.
6. Лукомская М. А. О циклах систем линейных однородных дифференциальных уравнений. Мат. сб., 29, вып. 3, 1951.
7. Положий Г. Н. О p-аналитических функциях комплексного переменного. ДАН СССР, т. LVIII, № 7, 1947.