Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

Ю. Б. Румер

(Новосибирск)

Задача о ламинарной затопленной струе, бьющей из конца тонкой трубки в неограниченное пространство, заполненное той же несжимаемой жидкостью, была рассмотрена Ландау [1] и автором [2].

В настоящей заметке эта задача обобщается на случай, когда жидкость является раствором. К уравнениям непрерывности и Навье — Стокса, определяющим поле скоростей и давления, присоединяется еще одно дополнительное уравнение конвективной диффузии (см., например, [1], § 91—93)

$$\operatorname{div}(c\mathbf{v} - D \operatorname{grad} c) = 0 \tag{1}$$

определяющее дополнительную неизвестную функцию c — концентрацию растворенного вещества (D — коэффициент диффузии).

Мы рассматриваем течение на далеком расстоянии от конца трубки в зоне, где влиянием величины секундного расхода жидкости Q на характер течения можно пренебречь [2].

Выберем сферические координаты с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке ее выхода, которая совпадает с началом координат. Движение обладает аксиальной симметрией, так что $v_\varphi = 0$, а v_r, v_θ, c являются только функциями от переменных r, θ.

Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат должны протекать одинаковые полные потоки как импульса, так и растворенного вещества. Для этого v_r, v_θ и c должны падать обратно пропорционально расстоянию r от начала координат, так что

$$v_r = \frac{F(\theta)}{r}, \qquad v_\theta = \frac{f(\theta)}{r}, \qquad c = \frac{h(\theta)}{r} \tag{2}$$

где F, f, h — функции только от θ.

В интересующей нас зоне имеем решение, найденное Ландау:

$$F(\theta) = 2\nu\left[\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} - 1\right], \qquad f(\theta) = -\frac{2\nu}{A-\cos\theta} \tag{3}$$

где постоянная A связана с составляющей J_z полного потока импульса в направлении оси через сферическую поверхность радиуса R с центром в начале координат соотношением

$$J_z = 16\pi\rho\nu^2 A\left\{1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\right\} \tag{4}$$

Принимая во внимание $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, уравнение (1) может быть написано в виде

$$v_r\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta} - D\Delta c = 0 \tag{5}$$

Подставляя в (5) выражения по формулам (2) и (3), получаем для функции $h(\theta)$ уравнение

$$Dh'' + \left(D \operatorname{ctg} \theta + \frac{2\nu \sin \theta}{A - \cos \theta}\right) h' + 2\nu \left[\frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1\right] h = 0 \tag{6}$$

Единственным регулярным при всех углах θ решением этого уравнения, как легко проверить, будет

$$h(\theta) = C(A - \cos \theta)^{-2P} \tag{7}$$

где C — постоянная интегрирования и $P = \nu / D$ — число Прандтля.

Для газов P — порядка единицы, для воды $P \approx 10^3$, для вязких жидкостей $P \approx 10^6$ и больше [3].

Постоянную интегрирования легко связать с секундным расходом растворенного вещества Q_c. Имеем из (1) и (7)

$$Q_c = 2\pi\rho \int_0^\pi \left(v_r c - D \frac{\partial c}{\partial r}\right) r^2 \sin \theta \, d\theta = 2\pi\rho C \int_0^\pi h(F + D) \sin \theta \, d\theta \tag{8}$$

откуда после интегрирования получаем

$$C = \frac{Q_c}{2\pi\rho} \left\{ \frac{2\nu (A^2 - 1)}{(2P + 1)(A - 1)^{2P+1}} \left[\left(1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^{2P+1}\right]\right. + \right.$$
$$\left. + \frac{D - 2\nu}{(2P - 1)(A - 1)^{2P-1}} \left[1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^{2P-1}\right] \right\}^{-1} \tag{9}$$

Полный поток растворенного вещества оказывается чисто радиальным, поскольку вторая составляющая потока

$$\rho \left(c v_\theta - \frac{D}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}\right) = \rho \frac{(hf - Dh')}{r^2} \equiv 0 \tag{10}$$

тождественно исчезает, в чем легко убедиться, подставляя в (10) выражения f и h по формулам (3) и (7).

В заключение рассмотрим предельный случай слабой струи (импульс $J_z \to 0$, $A \to \infty$). Другой предельный случай сильной струи (импульс $J_z \to \infty$, $A \to 1$) нас не интересует, поскольку течение в сильной струе делается турбулентным.

Имеем из (4) и (9)

$$J_z = \frac{16\pi\nu^2\rho}{A}, \qquad c = \frac{Q_c}{4\pi\rho D} A^{2P} \tag{11}$$

и далее по формулам (3) и (7)

$$v_r = \frac{J_z}{4\pi\nu\rho} \frac{\cos \theta}{r}, \qquad v_\theta = -\frac{J_z}{8\pi\nu\rho} \frac{\sin \theta}{r}, \qquad c = \frac{Q_c}{4\pi\rho D r}\left(1 + \frac{P}{16\pi\nu^2\rho} \cos \theta\right)^{2P} \tag{12}$$

Рассмотренная нами задача является, насколько нам известно, первым примером, в котором уравнения конвективной диффузии допускают точное решение.

Поступила 4 VIII 1953

Западно-Сибирский филиал
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред, § 19. ГТТИ, 1944.
2. Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидромеханика, стр. 42. Изд. АН СССР, 1952.