Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

§ 1. При плоской одномерной нестационарной фильтрации газа в пористой среде плотность газа ρ подчиняется уравнению Л. С. Лейбензона [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\varphi(\rho)}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \sqrt{\frac{k}{m\mu}} \tag{1.1}$$

где x — координата, t — время, k — проницаемость грунта, m — пористость грунта, μ — вязкость газа,

$$\varphi(\rho) = \int_0^\rho \rho\, dp = \int_0^\rho \rho\Phi'(\rho)\, d\rho \tag{1.2}$$

причем предполагается, что $p = \Phi'(\rho)$, где p — давление газа. Относительно функции Φ предполагается только, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(\rho) > 0$ при $\rho \neq 0$. Если движение происходит при политропической связи плотности и давления, $\Phi(\rho) = \beta^n \rho^n$, где β, n — положительные константы, уравнение (1.1) принимает вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\rho^{n+1}}{\partial x^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{k\beta^n n}{m\mu(n+1)}} \tag{1.3}$$

В случае изотермического режима ($n = 1$) приходим к уравнению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{k\beta}{2m\mu}}$$

которое совпадает с известным уравнением Буссинеска [1] для напора при неустановившемся одномерном движении грунтовых вод.

Для общего уравнения (1.1) известно только одно семейство точных автомодельных решений вида $\rho = F(x/\sqrt{at})$, указанное П. Я. Кочиной [2]. Для эффективного построения решений этого семейства необходимо решить некоторое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями на обоих концах интервала $(0, \infty)$.

Для уравнений специального типа (1.3) помимо решений П. Я. Кочиной известны еще неавтомодельные решения вида $\rho = X(x)T(t)$, впервые указанные Буссинеском, и большой класс автомодельных решений [3—5], отвечающих начальному условию $\rho(x, 0) \equiv 0$.

Ниже строится некоторый класс неавтомодельных, вообще говоря, точных решений уравнения (1.1), которые удается получить при помощи одной квадратуры.

Можно сказать, что если автомодельные движения определяются как такие, для которых все кривые $\rho(x, t)$, отвечающие разным моментам времени, получаются одна из другой аффинным преобразованием, то движения, рассмотренные в настоящей заметке, можно определить как такие, для которых кривые $\rho(x, t)$, отвечающие разным моментам времени, получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси x.

§ 2. Рассматриваются решения уравнения (1.1) вида:

$$\rho = R(x - ct), \qquad c = \text{const} \neq 0 \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получаем для функции R уравнение

$$\frac{d^2\varphi(R)}{d\xi^2} + \frac{c}{a^2}\frac{dR}{d\xi} = 0 \qquad (\xi = x - ct) \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2) один раз, приходим к уравнению

$$\frac{d\xi}{dR} = -\frac{a^2}{c}\frac{\varphi'(R)}{R - A} \tag{2.3}$$

где A — константа интегрирования. Вторая интеграция дает

$$\xi = -\frac{a^2}{c}\int\frac{\varphi'(R)\,dR}{R - A} + B, \qquad B = \text{const} \tag{2.4}$$

Имея в виду (1.2), переписываем (2.4) в виде

$$\xi = -\frac{a^2}{c}\Phi(R) - \frac{a^2 A}{c}\int\frac{\Phi'(R)\,dR}{R - A} + B \tag{2.5}$$

Для уравнений вида (1.3), так как β и n включены определенным образом в выражение для a, то $\Phi(\rho)$ следует писать в виде

$$\Phi(\rho) = \frac{n+1}{n}\rho^n$$

Интеграл (2.5) запишется для этих уравнений в форме

$$\xi = -\frac{a^2(n+1)R^n}{cn} - \frac{a^2 A}{c}(n+1)\int\frac{R^{n-1}dR}{R - A} + B \tag{2.6}$$

Интеграл в правой части этого равенства берется в конечном виде лишь для целых n. В частности, для $n = 1$ (изотермическое течение газа, уравнение Буссинеска) интеграл (2.6) имеет вид:

$$\xi = -\frac{2a^2}{c}R - \frac{2a^2}{c}A\ln(R - A) + B \tag{2.7}$$

§ 3. 1°. Для обыкновенного уравнения теплопроводности ($n = 0$, $\varphi'(R) \equiv 1$) соотношение (2.4) имеет вид:

$$\xi = -\frac{a^2}{c}\ln(R - A) + B \quad \text{или} \quad R = A + K\exp\left[-\frac{c(x - ct)}{a^2}\right] \tag{3.1}$$

Очевидно, что константа A равна $\rho(\infty, t)$, константа K равна $\rho(0, 0) - \rho(\infty, t)$.

2°. Пусть теперь $A = 0$ и рассматриваемое уравнение таково, что $\varphi'(0) = 0$. В этом случае интеграл (2.5) имеет вид:

$$\xi = -\frac{a^2}{c}\Phi(R) + B \tag{3.2}$$

константа B может быть выбрана произвольно, смысл ее определяется равенством $\Phi[\rho(0, 0)] = ca^{-2}B$. При $\xi = B$ $\Phi(R) = 0$, т. е. $R = 0$. Дифференцируя (3.2) по ξ, получим

$$1 = -\frac{a^2}{c}\Phi'(R)\frac{dR}{d\xi} = -\frac{a^2}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi(\rho)}{\partial x} \tag{3.3}$$

Так как $\rho = R = 0$ при $\xi = B$, из (3.3) следует, что $\partial\varphi(\rho)/\partial x = 0$ при $\xi = B$, т. е. поток газа через поверхность $\xi = B$ равен нулю. Таким образом, движения, отвечающие $A = 0$, представляют собой распространение газа в пространстве, в начальный момент свободном от газа, начиная с некоторой точки. Передний фронт газа — поверхность $\xi = B$ — распространяется в пространстве с конечной скоростью, равной c.

Решения рассматриваемого типа окончательно записываются так:

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{c}{a^2}[(ct - x) + B] & (0 \leqslant x \leqslant ct + B) \\ 0 & (x \geqslant ct + B) \end{cases} \tag{3.4}$$

В политропическом случае эти решения записываются так:

$$\rho = \begin{cases} \left\{\dfrac{c}{a^2}\left[(ct - x)\dfrac{n}{n+1} + B\dfrac{n}{n+1}\right]\right\}^{\frac{1}{n}} & (0 \leqslant x \leqslant ct + B) \\ 0 & (x \geqslant ct + B) \end{cases} \tag{3.5}$$

Выберем константу B так, чтобы $\rho(0, 0) = 1$; тогда

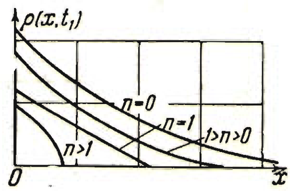
$$B = \frac{a^2(n+1)}{nc}$$

и решение переписывается следующим образом

$$\rho = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{n}{n+1}\dfrac{c}{a^2}(ct - x)\right]^{\frac{1}{n}} & \left(0 \leqslant x \leqslant ct + \dfrac{a^2(n+1)}{xc}\right) \\ 0 & \left(x \geqslant ct + \dfrac{a^2(n+1)}{nc}\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

В случае уравнения Буссинеска $(n = 1)$ это решение записывается в виде

$$\rho = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{c}{2a^2}(ct - x)\right] & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2a^2}{c} + ct\right) \\ 0 & \left(x \geqslant \dfrac{2a^2}{c} + ct\right) \end{cases} \tag{3.7}$$



Фиг. 1

Это решение было ранее указано в работе [4]. На фиг. 1 изображены решения (3.6) в один и тот же момент времени $t_1 = a^2 / c^2$ при разных n.

3°. Пусть теперь $\varphi'(0) = M > 0$. При больших ξ решение имеет вид:

$$R = C\exp\left(-\frac{c\xi}{Ma^2}\right)$$

где C — некоторая константа, т. е. решение асимптотически ведет себя как решение соответствующего классического уравнения теплопроводности.

§ 4.1°. Рассмотрим решение (2.5) при произвольном значении $A > 0$. Пусть $R \to A$, тогда

$$\xi = -\frac{a^2A}{c}\Phi'(A)\ln(R - A) + 0(1) \tag{4.1}$$

Отсюда $A = \rho(\infty, t)$. Так как $\xi \to -\infty$ при $t \to \infty$, то правая часть (2.5) также должна стремиться к $-\infty$. Но второй член правой части (2.5) при $R \to \infty$ мал сравнительно с первым; поэтому можно написать асимптотическое соотношение

$$\frac{c^2t}{a^2} = \Phi(R)(1 + o(1)) \tag{4.2}$$

Зададимся $\rho(0, 0) = P > A$; этим константа B будет определена и решение (2.5) запишется в виде

$$\xi = -\frac{a^2}{c}[\Phi(R) - \Phi(P)] - \frac{a^2A}{c}\int\limits_P^R \frac{\Phi'(R)\,dR}{R - A} = \frac{a^2}{c}F(R, A, P) \tag{4.3}$$

Начальное и граничное при $x=0$ значения функции $\rho(x, t)$ определяются из соотношений

$$F[R(x, 0), A, P] = \frac{cx}{a^2}, \qquad F[R(0, t), A, P] = -\frac{c^2 t}{a^2} \tag{4.4}$$

2°. Для уравнений типа (1.3) решение (4.3) имеет вид:

$$\xi = -\frac{a^2(n+1)}{cn}[R^n - P^n] - \frac{a^2 A(n+1)}{c}\int_P^R \frac{R^{n-1}\, dR}{R-A} \tag{4.5}$$

Для уравнения Буссинеска решение (4.5) принимает вид:

$$-\frac{c\xi}{2a^2 A} = \Psi\left(\frac{R}{A}\right) - \Psi\left(\frac{P}{A}\right) \tag{4.6}$$

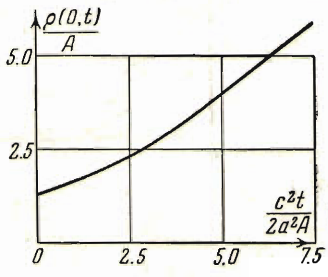
где функция Ψ определяется соотношением

$$\Psi(z) = z + \ln(z-1)$$

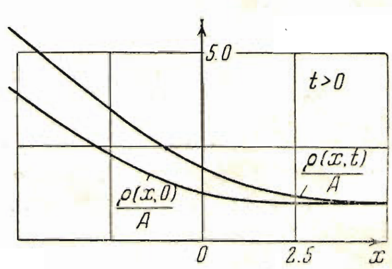
Начальное $\rho(x, 0)$ и граничное $\rho(0, t)$ значения функции $\rho(x, t)$ определяются из соотношений

$$-\frac{cx}{a^2 A} = \Psi\left[\frac{\rho(x, 0)}{A}\right] - \Psi\left[\frac{P}{A}\right], \qquad \frac{c^2 t}{2a^2 A} = \Psi\left[\frac{\rho(0, t)}{A}\right] - \Psi\left[\frac{P}{A}\right]$$

Пусть для простоты $P/A = 1.394$. Тогда $\Psi(P/A) = 0$. Функция $\rho(0, t)$ имеет



Фиг. 2



Фиг. 3

вид, данный на графике фиг. 2. Функция $\rho(x, 0)$ изображена на фиг. 3. В процессе движения весь график фиг. 3 с течением времени перемещается параллельно самому себе.

Поступила 27 VIII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, 1947.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР, т. LXIII, вып. 6, 1948.
3. Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С. О распространении тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. Изд. АН СССР, 1950.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
5. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.