Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

Если газ (или жидкость) движется в среде с очень мелкими порами, то существенную роль играет сорбция газа (или жидкости), — под нею понимают явление конденсации молекул на поверхности раздела двух фаз, при котором молекулы образуют как бы плотную пленку.

Чтобы пояснить, насколько это явление зависит от размеров пор, предположим, что в единице объема пористого тела (вместе с заключенным в нем газом) имеется n пор, имеющих форму внутренности шара радиуса r. Тогда объем всех пор даст нам пористость $m = {}^4/_3\, \pi n r^3$, а площадь поверхности S всех пор будет $S = 2\pi n r^2$. Исключая n, найдем

$$S = \frac{3}{2}\,\frac{m}{r}$$

Отсюда видно, что с уменьшением r при сохранении одной и той же пористости площадь поверхности пор может получить сколь угодно большое значение. А так как количество сорбированного газа пропорционально величине S, то в мелкопористой среде оно может быть значительным. Заметим, что в угольных пластах встречаются поры, размеры которых имеют порядок 10^{-6} см[1], поэтому в них сорбция имеет, вообще говоря, большое значение.

§ 1. Уравнения фильтрации газа в угольном пласте. Рассмотрим куб, грани которого параллельны плоскостями координат и ребра которого равны единице длины.

Обозначим через u, v, w составляющие скорости фильтрации по осям координат. Тогда u будет равно объему газа, проходящего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x. Масса газа, проходящего в единицу времени через ту же площадку, будет равна ρu, где ρ — плотность газа при давлении p.

Мы применяем известный способ Л. С. Лейбензона для вывода уравнения фильтрации газа, лишь добавляя член, зависящий от десорбции.

В случае неустановившегося движения масса газа, входящего в единичный кубик, ребра которого параллельны осям координат, будет изменяться, причем изменение массы компенсируется изменением со временем плотности газа и, кроме того, изменением со временем массы адсорбированного газа.

Масса M газа, заключенного в данный момент времени в единице объема пласта, равна произведению пористости пласта m на плотность газа ρ.

Масса M_1 адсорбированного газа в единице объема угля зависит от давления:

$$M = m\rho, \qquad M_1 = \varphi(p) \tag{1.1}$$

где φ — заданная функция, определяемая экспериментально или теоретически.

Получаем уравнение неразрывности:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial(M + M_1)}{\partial t} = m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.2}$$

Знак минус в левой части берется потому, что при возрастании со временем плотности — при отсутствии десорбции — производная $\partial\rho / \partial t$ должна быть отрицательной.

К уравнению (1.2) нужно присоединить уравнения для u, v, w. Обычно для фильтрации газа в пористой среде принимают, что скорость фильтрации пропорциональна градиенту давления:

$$u = -\lambda \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v = -\lambda \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad w = -\lambda \frac{\partial p}{\partial z} \qquad \lambda = \frac{k}{\mu} \tag{1.3}$$

Здесь k — проницаемость пласта и μ — вязкость газа.

Для массы адсорбированного газа M_1 можно принять зависимость Ленгмюра [2]

$$M_1 = \varphi(p) = \frac{abp}{1+ap} \tag{1.4}$$

где a и b — постоянные. При условиях (1.3) и (1.4) уравнение (1.2) перепишется так:

$$\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] = m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ab}{(1+ap)^2} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.5}$$

В этом уравнении две неизвестные функции: p и ρ. Уравнение Бойля-Мариотта

$$p = RT\rho \tag{1.6}$$

которое имеет место для рудничных газов, содержит новую переменную — температуру T (R — газовая постоянная). В случае изотермического процесса, когда T постоянно, при помощи (1.6) можно исключить из (1.5) плотность и получить уравнение для давления:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right) = 2 \left[m + \frac{abRT}{(1+ap)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.7}$$

Это уравнение в случае одномерной фильтрации принимает вид:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda} \left[m + \frac{abRT}{(1+a\sqrt{P})^2} \right] \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad (P = p^2) \tag{1.8}$$

Оно было выведено Р. М. Кричевским[3] и при условиях $p(x, 0) = p_0 = \text{const}$, $p(0, t) = p_1 = \text{const}$ было приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению при помощи подстановки $\eta = x / \sqrt{t}$. Для определенных значений постоянных a, b, T, m, λ, p_0, p_1 им произведен числовой расчет. Мы здесь выводим интегральные соотношения, которые удобны для приложения приближенных методов решения различных задач фильтрации.

§ 2. **Интегральное соотношение для одномерного движения газа.** Предположим, что газ движется параллельно оси x. Тогда уравнение неразрывности (1.3) будет:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial(M + M_1)}{\partial t} \tag{2.1}$$

Умножим обе части этого уравнения на dx и проинтегрируем по x в пределах от l_1 до L, где $L - l_1$ — длина части пласта, занятого газом, из которого будет происходить фильтрация. Получим

$$-\left[(\rho u)_L - (\rho u)_{l_1}\right] = \int_{l_1}^{L} \frac{\partial M}{\partial t} dx + \int_{l_1}^{L} \frac{\partial M_1}{\partial t} dx$$

Переставляя порядок интегрирования и дифференцирования, можем переписать последнее равенство так [согласно (1.2) и (1.3)]:

$$-\left[(\rho u)_L - (\rho u)_{l_1}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{L} M\, dx + \frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{L} M_1 dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{L} m\rho\, dx + \frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{L} \varphi(p)\, dx \tag{2.2}$$

В случае перемещающегося забоя l_1 является заданной функцией времени. При неподвижном забое l_1 постоянно и можно принять его равным нулю.

Если предположить, что на конце пласта, т. е. при $x = L$ имеется непроницаемая стенка, то будем иметь

$$u\big|_{x=L} = 0$$

и уравнение (2.2) примет вид (при $l_1 = 0$):

$$(\rho u)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^L m\rho dx + \int_0^L \varphi(p)\, dx\right\} \tag{2.3}$$

Вводя обозначения полных масс газа, заключенного во всем пласте — в его порах и за счет сорбции, — можем написать

$$M^* = \int_0^L M\, dx = \int_0^L m\rho\; dx, \qquad M_1{}^* = \int_0^L M_1 dx = \int_0^L \varphi(p) dx \tag{2.4}$$

и тогда уравнение (2.3) можно будет представить в виде

$$(\rho u)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t}(M^* + M_1{}^*) \tag{2.5}$$

Последнее уравнение представляет интегральное соотношение, выражающее то обстоятельство, что дебит газа на выходе из пласта, рассчитанный на единицу площади поперечного сечения пласта, равен производной по времени всей массы газа, заключенной в пласте.

В такой форме уравнение (2.5) применяется в теории фильтрации нефти и газа [3] (при $M_1 = 0$). При этом обычно делается допущение, не являющееся необходимым, но удобное в практическом отношении, что промежуток (l_1, L) можно разбить на два промежутка: промежуток (l_1, l), который можно назвать областью дренирования пласта, т. е. областью, в которой происходит движение газа, и промежуток (l, L), в котором еще никакого движения газа нет (это разделение является, конечно, условным). Длина l является функцией времени, которая в задаче об истощении газа в пласте увеличивается со временем.

Из интегрального соотношения, в котором произведено интегрирование по всей области движения, нельзя полностью определить p. Но если задаться некоторой зависимостью p от x, удовлетворяющей граничным условиям, то подстановка этого выражения в (2.2) или (2.3) в конечном итоге дает и зависимость от времени.

По какому же принципу выбирать эту зависимость p от x? В методе последовательной смены стационарных состояний принимают, что зависимость p от координаты такая же, как в установившемся движении. Но из уравнения (1.12) имеем для установившегося движения

$$p^2 = Ax + B$$

Постоянные A и B определяются из условий при $x = 0$ и $x = l$.

Такой способ был применен И. А. Чарным [4] к случаю $p(x, 0) = p_0$, $p(0, t) = p_1$ (адсорбция газа в его задаче отсутствует).

А. М. Пирвердян [5] показал, что лучший результат получается (рассматривается тот же самый пример при отсутствии сорбции), если не ставить условия об удовлетворении уравнению установившегося движения, а подбирать p так, чтобы при $x = l$ осуществлялась более высокая степень касания кривой давления с прямой $p = p_0$, например, если взять

$$p^2 = p_1{}^2 - (p_0{}^2 - p_1{}^2)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

Еще лучший результат получится, если вместо показателя 2 взять показатель n, который подбирается из условия минимума интеграла (см. [6,7])

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_0^L \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda}\left(m + \frac{abRT}{(1 + a\sqrt{P})^2}\right)\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial P}{\partial t}\right] dx\, dt$$

который для точного решения равен нулю.

§ 3. Интегральное соотношение для плоской задачи. Если движение газа происходит в плоскости xy в области S, ограниченной контуром C, причем имеются скважины или группы скважин, ограниченные контурами $C_1, \ldots, C_n$, то можно уравнение неразрывности этого случая

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=\frac{\partial(M+M_1)}{\partial t} \tag{3.1}$$

умножить почленно на $dx\,dy$ и проинтегрировать по области S. Интеграл левой части по формуле Грина дает криволинейный интеграл по совокупности контуров $C, C_1, \ldots, C_n$:

$$\int\limits_{C+C_1+\cdots+C_n} \rho V_n ds = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint\limits_S M dx\,dy + \int\limits_S M_1 dx\,dy\right\} \tag{3.2}$$

Здесь V_n — нормальная к контуру составляющая (внутренняя) скорости фильтрации. Очевидно, что сумма криволинейных интегралов дает суммарный расход газа через все контуры области.

Простейшим случаем является приток газа к сважине, когда контур S является окружностью, концентричной контуру скважины. В этом случае элемент дуги обоих контуров выражается соответственно так: $ds = r_c d\varphi$, где r_c — радиус скважины, φ — полярный угол, $ds = R d\varphi$, где R — радиус контура C. Получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho v_r R\, d\varphi - \int\limits_0^{2\pi} \rho v_r r_c d\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_r^R r dr \int\limits_0^{2\pi} M d\varphi + \int\limits_{r_c}^R r dr \int\limits_0^{2\pi} M_1 d\varphi\right\}$$

После выполнения интегрирования будем иметь

$$R\,(\rho v_r)_{\text{конт}} - r_c\,(\rho v_r)_{\text{скв}} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{r_c}^R rM\,dr + \int\limits_{r_c}^R rM_1\,dr\right\} \tag{3.3}$$

§ 4. Интегральное соотношение в пространственном случае. Если фильтрация происходит в некотором объеме v, ограниченном поверхностями $S, S_1, \ldots, S_n$, то интегрирование по объему v уравнения (1.2) и применение формулы Остроградского-Гаусса дает

$$\iint\limits_{S+S_1+\cdots+S_n} \rho V_n dS = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\iiint\limits_v M dx\,dy\,dz + \iiint\limits_v M_1 dx\,dy\,dz\right\} \tag{4.1}$$

Сумма интегралов по поверхностям $S, S_1, \ldots, S_n$, очевидно, является суммарным расходом, проходящим через поверхности, ограничивающие область движения.

Задаваясь приближенными зависимостями p от координат, удовлетворяющими граничным условиям, получим возможность приближенного определения зависимости давления от времени.

Поступила 20 VII 1953

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лидин Г. Д. Газовыделения в угольных шахтах и меры борьбы с ними. Углетехиздат, 1952.
2. Ходот В. В. Приближенное определение сорбции и метаноемкости каменного угля. ДАН СССР, т. LXXXIV, № 5, 1952.
3. Кричевский Р. М. О природе внезапных выделений газа с выбросом угля. Бюллетень МАКНИИ, № 18, 1948.
4. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. ОГИЗ, 1948.
5. Пирвердян А. М. Приближенное решение задачи о фильтрации при упругом режиме. ДАН Аз. ССР, т. VI, № 1.
6. Пирвердян А. М. Об одном приближенном методе решения задач фильтрации при упругом режиме. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ, 1936.