Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕТКИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТИ, ЗАДАННЫМ НА ОКРУЖНОСТИ РЕШЕТКИ КРУГОВ

Г. Ю. Степанов

(Москва)

Известно несколько методов построения плоской гидродинамической решетки в установившемся потенциальном потоке несжимаемой жидкости с заданным распределением скорости на профиле.

Одно из решений этой задачи состоит в исправлении путем последовательных приближений формы профиля в решетке с близким распределением скорости [1]. Задача существенно упрощается в случае решеток с тонкими малоизогнутыми профилями [2]. Задача построения канала с заданным распределением скорости имеет достаточно эффективное решение, которое непосредственно обобщается на случай течения газа и применено для приближенного построения канала между профилями в решетке большой густоты [3].

По методу годографа скорости [4] скорость на профиле задается в функции угла наклона касательной. При этом задача построения решетки сводится к более простой задаче определения потенциала скорости в заданной области годографа.

Наконец, заданное распределение скорости может рассматриваться на границе канонической области, на которую отображается внешность решетки (в полосе одного периода). Ранее рассматривалось построение решетки с распределением скорости, заданным на окружности [5] и границах кольца [6].

Все упомянутые выше методы достаточно просто обобщаются на случай дозвукового потенциального течения газа в известном приближении С. А. Чаплыгина, разработанном и примененном к решению ряда задач аэродинамики Л. И. Седовым[2]. Известно применение этого приближения в задаче построения решетки с распределением скорости, заданным на окружности [7]. Однако практическое применение развитого метода ограничено решетками малой густоты ввиду необходимости разлагать в ряд Фурье функции с большим колебанием на небольших интервалах изменения аргумента.

В работе излагается метод построения, в приближении С. А. Чаплыгина, решетки с распределением скорости, заданным на окружности решетки кругов, что обеспечивает достаточную эффективность метода при построении решеток большой густоты.

Задачу поставим следующим образом. Пусть в плоскости $\mathfrak{w}$ (фиг. 1) расположена решетка кругов единичного радиуса с заданным периодом $it$, а в плоскости $z$ (фиг. 2) с тем же периодом располагается решетка искомых профилей, внешность которых соответствует внешности решетки кругов. Заданы векторы скорости в потоке газа на бесконечности до решетки профилей и за ней $v_1 e^{i\alpha_1}$ и $v_2 e^{i\alpha_2}$, а также скорость $v$ на профиле в функции центрального угла $\varphi$ окружности решетки кругов. Отметим, что функция $v(\varphi)$ должна удовлетворять некоторым условиям, которые будут сформулированы ниже.

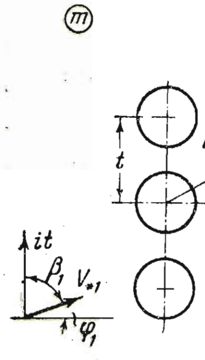
Величины скоростей $v_1$ и $v_2$ связаны уравнением неразрывности

$$v_1 \rho_1 \cos\alpha_1 = v_2 \rho_2 \cos\alpha_2 \tag{1}$$

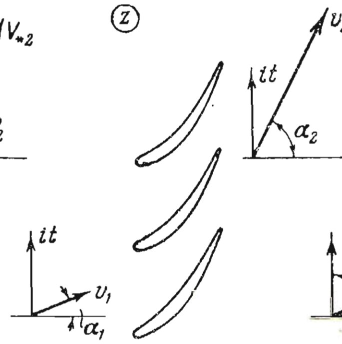
где $\rho$ — плотность в потоке газа, зависимость которой от скорости согласно приближенному методу С. А. Чаплыгина аппроксимируется функцией

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{c'}{\sqrt{1 + 4c\,(v/v_*)^2}} \qquad \left(v_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}}\right) \tag{2}$$

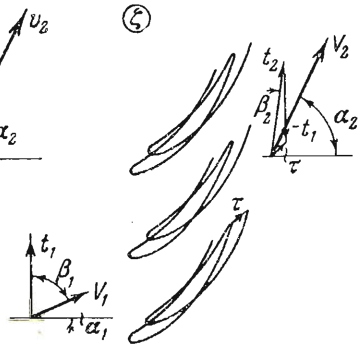
Здесь $v_*$ — критическая скорость, $k$ — показатель адиабаты, $p_0$ и $\rho_0$ — соответственно давление и плотность газа при $v = 0$; постоянные $c'$ и $c$ могут быть выбраны из условия наилучшего приближения функции (2) к действительной.




Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3

Течению газа в плоскости $z$ ставится в соответствие некоторое фиктивное течение несжимаемой жидкости в плоскости $\zeta$ (фиг. 3), причем в соответствующих точках этих плоскостей разность комплексных потенциалов $W$ равна постоянной, углы наклона $\alpha$ скоростей к действительной оси одинаковы, и их величины связаны соотношением

$$v = \frac{V}{1 - \lambda V^2} \qquad \left(\lambda = \frac{c}{{v_*}^2}\right) \tag{3}$$

Комплексные координаты $z$ и $\zeta$ связаны формулой

$$dz = d\zeta - \lambda \overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)^2 d\zeta} \qquad \left(\frac{dW}{d\zeta} = \overline{V} = Ve^{-i\alpha}\right) \tag{4}$$

Функция $z(\zeta)$, очевидно, не является аналитической. На линии тока

$$dz = (1 - \lambda V^2)\, d\zeta \tag{5}$$

Введем комплексную координату $m$ как аналитическую функцию $\zeta$ и получим [2]

$$dz = \frac{d\zeta}{dm}\, dm - \lambda \overline{\left(\frac{dW}{dm}\right)^2 \frac{dm}{d\zeta}\, dm} \qquad \left(\frac{dW}{dm} = \overline{V}_* = V_* e^{-i\varphi}\right) \tag{6}$$

где $\overline{V}_*$ — комплексная скорость в плоскости решетки кругов.

Область фиктивного течения в плоскости $\zeta$ при обтекании профилей с циркуляцией скорости бесконечнолистна. Образ решетки в плоскости $\zeta$ имеет различные периоды $t_1$ и $t_2$ до решетки и за ней. Для определения этих периодов применим формулу (4) в бесконечностях справа и слева от решетки:

$$it = t_1 - \lambda (V_1 e^{i\alpha_1})^2\, \overline{t_1} = t_2 - \lambda (V_2 e^{i\alpha_2})^2\, \overline{t_2}$$

Отсюда следует

$$t_1 = \frac{1 - \lambda (V_1 e^{i\alpha_1})^2}{1 - \lambda^2 V_1^4} it, \qquad t_2 = \frac{1 - \lambda (V_2 e^{i\alpha_2})^2}{1 - \lambda^2 V_2^4} it \tag{7}$$

Смещение $\tau$ в плоскости $\zeta$ при положительном обходе профиля в плоскости $z$ по любому замкнутому контуру $\tau = t_2 - t_1$ (фиг. 3).

Чтобы в плоскости решетки кругов периоды слева и справа были равны, производная функции $\zeta(m)$ до решетки и за ней должна иметь значения

$$\left.\frac{d\zeta}{dm}\right|_{m=-\infty} = \frac{t_1}{it}, \qquad \left.\frac{d\zeta}{dm}\right|_{m=\infty} = \frac{t_2}{it} \tag{8}$$

Выполнение условий (8) обеспечивает взаимно-однозначное соответствие плоскостей $z$ и $m$ в окрестностях бесконечно удаленных точек.

Соответствующее течение несжимаемой жидкости в плоскости $m$ на бесконечностях имеет скорости:

$$\overline{V}_{*1} = \left.\frac{dW}{dm}\right|_{m=-\infty} = \frac{t_1}{it} \overline{V}_1, \qquad \overline{V}_{*2} = \frac{t_2}{it} \overline{V}_2 \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что в плоскостях $\zeta$ и $m$ равны углы $\beta_1$ и $\beta_2$ (фиг. 1 и 3) между направлениями скоростей на бесконечностях и соответствующих им периодов.

Комплексный потенциал $W(m)$ любого заданного течения через решетку кругов можно считать известным [8].

Скорость на профиле решетки связана со скоростью на окружности решетки кругов уравнением

$$v(\varphi) = \frac{V_*(\varphi)}{|dz\,/\,dm|} \tag{10}$$

которое в рассматриваемой задаче определяет $|dz\,/\,dm| = |dz|\,/d\varphi$.

Таким образом, задача построения решетки с распределением скорости, заданным на окружности решетки кругов, сводится к определению отображающей функции $z(m)$ по известной величине модуля производной этой функции на границе. Общее выражение отображающей функции может быть построено, исходя из формулы (6) и разложения вне решетки периодических аналитических функций [8] $dW\,/\,dm$ и $d\zeta\,/\,dm$.

Для дальнейшего заметим, что вместо определения функции $z(m)$ во всей внешности кругов достаточно найти ее производную $dz\,/\,dm$ на границе ($m = e^{i\varphi}$), после чего профиль строится при помощи интегрирования

$$z = z_0 + \int_0^m \frac{dz}{dm} dm \tag{11}$$

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае течения газа формула (11) справедлива только вдоль линии тока, так как вообще производной $dz\,/\,dm$ не существует. Преобразуем формулу (11), вводя модуль и аргумент производной отображающей функции и переходя к переменной $\varphi$:

$$z = z_0 + \int_0^\varphi \left|\frac{dz}{dm}\right| \exp i \left(\arg \frac{dz}{dm} + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) d\varphi \tag{12}$$

После разделения действительной и мнимой частей в формуле (12) получим параметрические выражения координат профиля:

$$x = x_0 - \int_0^\varphi \left|\frac{dz}{dm}\right| \sin\left(\varphi + \arg\frac{dz}{dm}\right) d\varphi, \quad y = y_0 + \int_0^\varphi \left|\frac{dz}{dm}\right| \cos\left(\varphi + \arg\frac{dz}{dm}\right) d\varphi \tag{13}$$

В полученных выражениях неизвестна функция $\arg(dz/dm)$ на окружности решетки кругов. [Функция $|dz/dm|$ определена уравнением (10).] Заметим далее, что $\arg(dz/dm) = \arg(d\zeta/dm)$ есть мнимая часть аналитической функции

$$F(m) = \ln\frac{d\zeta}{dm} = \ln\left|\frac{d\zeta}{dm}\right| + i\arg\frac{d\zeta}{dm} \tag{14}$$

действительная часть которой известна:

$$\ln\left|\frac{d\zeta}{dm}\right| = \ln\frac{V_*}{V}$$

и, значит, задача построения профиля решетки сводится к определению мнимых значений аналитической функции $F(m)$ на границе области.

Эта функция, как однозначная и периодическая, представляется вне решетки кругов рядом [8]

$$F(m) = c_1 m + c_0 + q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}c_{-(n+1)}\frac{d^n}{dm^n}\operatorname{cth} qm \qquad \left(q = \frac{\pi}{t}\right) \tag{15}$$

В отношении функции $F(m)$ известно, что в бесконечностях слева $(m = -\infty)$ и справа $(m = \infty)$ она должна быть равна главным значениям логарифмов соответствующих величин производной $d\zeta/dm$, для которых выше были получены формулы (8). Из этого следует, что $c_1 = 0$, а коэффициенты $c_0$ и $c_{-1}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$F(-\infty) = c_0 - qc_{-1} = \ln\frac{t_1}{it}, \qquad F(\infty) = c_0 + qc_{-1} = \ln\frac{t_2}{it}$$

Отсюда

$$c_0 = \ln\frac{\sqrt{t_1 t_2}}{it}, \qquad c_{-1} = \frac{1}{2q}\ln\frac{t_2}{t_1} \tag{16}$$

В потоке несжимаемой жидкости $(\lambda = 0)$

$$c_0 = c_{-1} = 0$$

Вблизи начала координат, и, в частности, на окружности решетки кругов функция $F(m)$ разлагается в ряд Лорана:

$$F(m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} m^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2k}B_{2k}\,c_{-(2k-n)}}{2k(2k-n-1)!\,n!}q^{-2k}m^n + c_0 \tag{17}$$

в котором $B_{2k}$ — числа Бернулли, и суммирование по $k$ производится от $k = \frac{1}{2}(n+2)$ при $n$ четном и от $k = \frac{1}{2}(n+1)$ при $n$ нечетном.

В правильной части разложения (17), как указано в работе [8], практически возможно ограничиться членами со степенями $q$ не выше шестой, с учетом чего получим приближенное выражение функции $F(m)$:

$$F(m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} m^{-n} + \left(c_0 - \tfrac{1}{3} c_{-2} q^2 + \tfrac{1}{45} c_{-4} q^4 - \tfrac{2}{945} c_{-6} q^6\right) +$$
$$+ \left(\tfrac{1}{3} c_{-1} q^2 - \tfrac{1}{15} c_{-3} q^4 + \tfrac{2}{189} c_{-5} q^6\right) m + \left(\tfrac{1}{15} c_{-2} q^4 - \tfrac{4}{189} c_{-4} q^6\right) m^2 +$$
$$+ \left(-\tfrac{1}{45} c_{-1} q^4 + \tfrac{4}{189} c_{-3} q^6\right) m^3 - \tfrac{2}{189} c_{-2} q^6 m^4 + \tfrac{2}{945} c_{-1} q^6 m^5 \qquad (18)$$

Подставляя $c_n = A_n + iB_n$ и разделяя действительную и мнимую части выражения (18), найдем сопряженные представления логарифма модуля и аргумента производной отображающей функции на окружности решетки кругов $(m = e^{i\varphi})$:

$$\ln\left|\frac{d\zeta}{dm}\right| = \left(A_0 - \tfrac{1}{3} A_{-2} q^2 + \tfrac{1}{45} A_{-4} q^4 - \tfrac{2}{945} A_{-6} q^6\right) +$$
$$+ \left(A_{-1} + \tfrac{1}{3} A_{-1} q^2 - \tfrac{1}{15} A_{-3} q^4 + \tfrac{2}{189} A_{-5} q^6\right) \cos\varphi +$$
$$+ \left(B_{-1} - \tfrac{1}{3} B_{-1} q^2 + \tfrac{1}{15} B_{-3} q^4 - \tfrac{2}{189} B_{-5} q^6\right) \sin\varphi +$$
$$+ \left(A_{-2} + \tfrac{1}{15} A_{-2} q^4 - \tfrac{4}{189} A_{-4} q^6\right) \cos 2\varphi + \left(B_{-2} - \tfrac{1}{15} B_{-2} q^4 + \tfrac{4}{189} B_{-4} q^6\right) \sin 2\varphi +$$
$$+ \left(A_{-3} - \tfrac{1}{45} A_{-1} q^4 + \tfrac{4}{189} A_{-3} q^6\right) \cos 3\varphi + \left(B_{-3} + \tfrac{1}{45} B_{-1} q^4 - \tfrac{4}{189} B_{-3} q^6\right) \sin 3\varphi +$$
$$+ \left(A_{-4} - \tfrac{2}{189} A_{-2} q^6\right) \cos 4\varphi + \left(B_{-4} + \tfrac{2}{189} B_{-2} q^6\right) \sin 4\varphi + \left(A_{-5} + \tfrac{2}{945} A_{-1} q^6\right) \cos 5\varphi +$$
$$+ \left(B_{-5} - \tfrac{2}{945} B_{-1} q^6\right) \sin 5\varphi + A_{-6} \cos 6\varphi + B_{-6} \sin 6\varphi + \ldots \qquad (19)$$

$$\arg\frac{d\zeta}{dm} = \left(B_0 - \tfrac{1}{3} B_{-2} q^2 + \tfrac{1}{45} B_{-4} q^4 - \tfrac{2}{945} B_{-6} q^6\right) +$$
$$+ \left(B_{-1} + \tfrac{1}{3} B_{-1} q^2 - \tfrac{1}{15} B_{-3} q^4 + \tfrac{2}{189} B_{-5} q^6\right) \cos\varphi +$$
$$+ \left(-A_{-1} + \tfrac{1}{3} A_{-1} q^2 - \tfrac{1}{15} A_{-3} q^4 + \tfrac{2}{189} A_{-5} q^6\right) \sin\varphi +$$
$$+ \left(B_{-2} + \tfrac{1}{15} B_{-2} q^4 - \tfrac{4}{189} B_{-4} q^6\right) \cos 2\varphi + \left(-A_{-2} + \tfrac{1}{15} A_{-2} q^4 - \tfrac{4}{189} A_{-4} q^6\right) \sin 2\varphi +$$
$$+ \left(B_{-3} - \tfrac{1}{45} B_{-1} q^4 + \tfrac{4}{189} B_{-3} q^6\right) \cos 3\varphi + \left(-A_{-3} - \tfrac{1}{45} A_{-1} q^4 + \tfrac{4}{189} A_{-3} q^6\right) \sin 3\varphi +$$
$$+ \left(B_{-4} - \tfrac{2}{189} B_{-2} q^6\right) \cos 4\varphi + \left(-A_{-4} - \tfrac{2}{189} A_{-2} q^6\right) \sin 4\varphi +$$
$$+ \left(B_{-5} + \tfrac{2}{945} B_{-1} q^6\right) \cos 5\varphi +$$
$$+ \left(-A_{-5} + \tfrac{2}{945} A_{-1} q^6\right) \sin 5\varphi + B_{-6} \cos 6\varphi - A_{-6} \sin 6\varphi + \ldots \qquad (20)$$

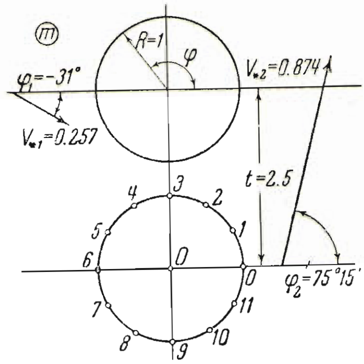
Напомним, что в выражениях (17) — (20) $c_0 = A_0 + iB_0$ и $c_{-1} = A_{-1} + iB_{-1}$ определяются из (16). При $q = 0$ и $\lambda = 0$, т. е. в случае одиночного профиля, обтекаемого несжимаемой жидкостью, выражения (19) и (20) превращаются в обычные гармонически-сопряженные разложения действительной и мнимой частей аналитической функции на окружности $m = e^{i\varphi}$.

Для определения $\arg(d\zeta / dm)$ необходимо иметь разложение функции:

$$\ln\left|\frac{d\zeta}{dm}\right| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (21)$$

после чего могут быть найдены коэффициенты $A_n$ и $B_n$ [путем сравнения разложений (21) и (19)] и вычислена функция $\arg(d\zeta / dm)$ (20).

Остановимся на условиях, которым должны удовлетворять функции $\ln|d\zeta / dm|$ и $v(\varphi)$. Прежде всего, функция $\ln|d\zeta / dm|$ должна допускать разложение в ряд Фурье. Практически эту функцию всегда можно считать непрерывной и дифференцируемой вместе с ее производной. Для этого при задании скорости $v(\varphi)$ [или $V(\varphi)$] достаточно обеспечить обращение ее в нуль в тех же двух точках на окружности решетки кругов, в которых $V_* = 0$, чтобы в этих двух точках было два ограниченных минимума $\ln|d\zeta / dm|$, и затем выразить функцию (21) конечным многочленом.



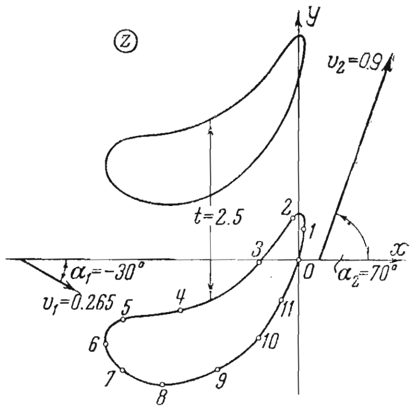

Фиг. 4

Далее, в соответствии с полученным выше разложением (19), три первых коэффициента разложения (21) должны удовлетворять условиям (22)

$$a_0 = A_0 - \frac{1}{3} A_{-2} q^2 + \frac{1}{45} A_{-4} q^4 - \frac{2}{945} A_{-6} q^6$$

$$a_1 = A_{-1} + \frac{1}{3} A_{-1} q^2 - \frac{1}{15} A_{-3} q^4 + \frac{2}{189} A_{-5} q^6$$

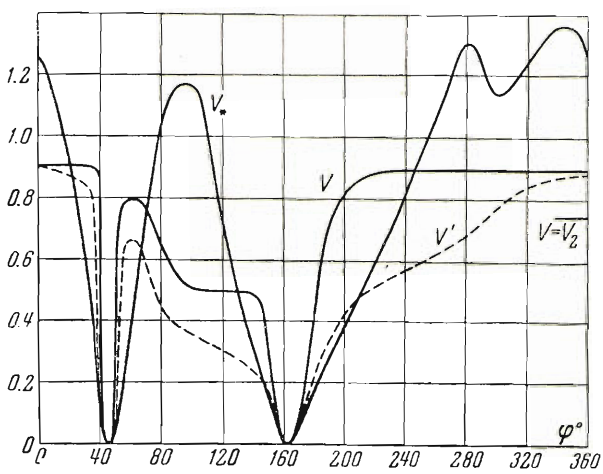
$$b_1 = B_{-1} - \frac{1}{3} B_{-1} q^2 + \frac{1}{15} B_{-3} q^4 - \frac{2}{189} B_{-5} q^6$$




**Фиг. 5**

где $A_0$, $A_{-1}$ и $B_{-1}$ известны из (16).

Указанные условия и ограничивают произвол выбора функции $v(\varphi)$.




Фиг. 6

Покажем применение описанного метода на одном примере построения решетки [1]. Условимся все скорости относить к критической (2), не отмечая этого особым значком.

Зададим (фиг. 4 и 5) углы потока $\alpha_1 = -30°$, $\alpha_2 = 70°$, безразмерную скорость газа за решеткой $v_2 = 0.9$ и шаг $t = 2.5$.

Величины постоянных в формулах (2) и (3) примем равными [2] $c' = 1$ и $c = 0.296$, т. е.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\sqrt{1+1{,}184 v^2}}$$

$$v = \frac{V}{1 - 0.296 V^2}$$

[1] Автор благодарит Л. И. Романцеву за помощь в проведении вычислений.

[2] Функция $\rho / \rho_0$ будет совпадать с действительной ($k = 1.4$) при $v / a_* = 0$ и $v / a_* = 0.8$.

*Таблица 1*

| $\varphi°$ | $V_*$ | $V$ | $\ln \frac{V_*}{V}$ | $V'$ | $\arg \frac{d\zeta}{dm}$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.251 | 0.90 | 0.329 | 0.894 | —0.276 | 0.00 | 0.00 |
| 30 | 0.660 | 0.90 | —0.310 | 0.854 | —0.527 | 0.06 | 0.42 |
| 60 | 0.400 | 0.80 | —0.693 | 0.674 | 0.743 | —0.06 | 0.56 |
| 90 | 1.167 | 0.55 | 0.751 | 0.397 | 1.005 | —0.58 | —0.07 |
| 120 | 0.713 | 0.50 | 0.354 | 0.309 | —0.401 | —1.62 | —0.77 |
| 150 | 0.175 | 0.35 | —0.693 | 0.194 | —0.452 | —2.41 | —0.87 |
| 180 | 0.196 | 0.50 | —0.939 | 0.266 | 0.030 | —2.62 | —1.19 |
| 210 | 0.483 | 0.88 | —0.594 | 0.478 | 0.394 | —2.46 | —1.53 |
| 240 | 0.834 | 0.90 | —0.078 | 0.566 | 0.535 | —1.90 | —1.69 |
| 270 | 1.225 | 0.90 | 0.307 | 0.662 | 0.419 | —1.20 | —1.48 |
| 300 | 1.147 | 0.90 | 0.240 | 0.773 | 0.290 | —0.59 | —1.08 |
| 330 | 1.319 | 0.90 | 0.379 | 0.864 | 0.081 | —0.23 | —0.56 |

Из уравнения неразрывности (1) находится $v_1 = 0.265$. Соответствующие величины безразмерных скоростей фиктивного течения несжимаемой жидкости в плоскости $\zeta$ равны $V_1 = 0.259$ и $V_2 = 0.750$.

Для определения параметров вспомогательного потока несжимаемой жидкости в плоскости $m$ решетки кругов необходимо сначала найти комплексные величины

$$r_1 e^{i\delta_1} = \frac{t_1}{it}, \qquad r_2 e^{i\delta_2} = \frac{t_2}{it}$$

Исходя из выражений (7), имеем

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - 2cV_1^2 \cos 2\alpha_1 + c^2 V_1^4}}{1 - c^2 V_1^4}, \qquad \sin \delta_1 = -\frac{cV_1^2 \sin 2\alpha_1}{r_1 (1 - c^2 V_1^4)}$$

Произведя вычисление, находим $r_1 = 0.991$, $\delta_1 = 1°0'$, и аналогично $r_2 = 1.164$, $\delta_2 = -5°15'$. Величины и направления скоростей на бесконечностях в плоскости $m$ определяются согласно выражениям

$$V_{*1} = r_1 V_1 = 0.257, \qquad \varphi_1 = \alpha_1 - \delta_1 = -31°0'$$

$$V_{*2} = r_2 V_2 = 0.874, \qquad \varphi_2 = \alpha_2 - \delta_2 = \phantom{-}75°15'$$

Полученные величины можно проверить по уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости: $V_{*1} \cos \varphi_1 = V_{*2} \cos \varphi_2 = 0.221$.

Затем, используя таблицы скоростей на окружности в решетке кругов, определяем распределение скорости $V_* (\varphi)$, соответствующее найденным значениям $V_{*1}$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$ (фиг. 6 и табл. 1). После этого можно задать распределение скорости $v$ или $V$ на профиле решетки в функции центрального угла $\varphi$ (фиг. 6 и табл. 1) и определить $\ln | d\zeta / dm | = \ln (V_* / V)$ (табл. 1).

Тригонометрический полином, представляющий функцию $\ln |d\zeta / dm|$, имеет вид:

$$\ln | d\zeta / dm | = -0.0787 + 0.346 \cos \varphi - 0.064 \sin \varphi - 0.365 \cos 2\varphi - 0.282 \sin 2\varphi +$$

$$+ 0.333 \cos 3\varphi - 0.206 \sin 3\varphi + 0.191 \cos 4\varphi + 0.112 \sin 4\varphi - 0.0451 \cos 5\varphi + 0.0807 \sin 5\varphi$$

Из (16) определяем первые коэффициенты разложения функции $F(m) = \ln (d\zeta / dm)$:

$$A_0 = \frac{1}{2} \ln r_1 r_2 = 0.0715, \qquad B_0 = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) = -0.0372$$

$$A_{-1} = \frac{1}{2q} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0.0645, \qquad B_{-1} = \frac{1}{2q} (\delta_2 - \delta_1) = -0.0437 \qquad \left(q = \frac{\pi}{t} = 1.256\right)$$

Сравнивая коэффициенты полинома (21) и разложения (19), находим остальные коэффициенты:

$$A_{-2} = \frac{a_2 + {}^4/_{189}\, q^6 a_4}{1 + {}^1/_{15}\, q^4} = -0.299, \qquad B_{-2} = \frac{b_2 - {}^4/_{189}\, q^6 b_4}{1 - {}^1/_{15}\, q^4} = -0.349$$

$$A_{-3} = \frac{a_3 + {}^1/_{45}\, q^4 A_{-1}}{1 - {}^4/_{189}\, q^6} = 0.367, \quad B_{-3} = \frac{b_3 - {}^1/_{45}\, q^4 B_{-1}}{1 - {}^4/_{189}\, q^6} = -0.188$$

$$A_{-4} = a_4 + \frac{2}{189} q^6 A_{-2} = 0.178, \qquad B_{-4} = b_4 - \frac{2}{189} q^6 B_{-2} = 0.126$$

$$A_{-5} = a_5 - \frac{2}{945} q^6 A_{-1} = -0.046, \quad B_{-5} = b_5 + \frac{2}{945} q^6 B_{-1} = 0.080$$

Затем по формулам (22) исправляем коэффициенты $a_0$, $a_1$ и $b_1$; получим

$$a_0' = 0.239, \qquad a_1' = 0.035, \qquad b_1' = -0.055$$

В соответствии с полученным исправляем функцию $\ln|d\zeta / dm| = \ln(V_* / V')$:

$$\ln|d\zeta / dm| = 0.239 + 0.035 \cos\varphi - 0.055 \sin\varphi - 0.365 \cos 2\varphi - 0.282 \sin 2\varphi + \ldots$$

Исправленные значения $V'$ приведены в табл. 1 и показаны на графике фиг. 6 пунктиром. Наконец, вычислив коэффициенты в формуле (20) получим

$$\begin{aligned} \arg(d\zeta / dm) = 0.1534 - 0.0323 \cos\varphi - 0.0932 \sin\varphi - 0.418 \cos 2\varphi + \\ + 0.235 \sin 2\varphi - 0.201 \cos 3\varphi - 0.340 \sin 3\varphi + \\ + 0.141 \cos 4\varphi - 0.166 \sin 4\varphi + 0.080 \cos 5\varphi + 0.046 \sin 5\varphi \end{aligned}$$

Значения $\arg(d\zeta / dm)$ приводятся в табл. 1. Для построения профиля решетки предварительно вычисляются величины подинтегральных функций в формулах (13):

$$P_1 = -\left|\frac{dz}{dm}\right| \sin\left(\varphi + \arg\frac{dz}{dm}\right), \qquad P_2 = \left|\frac{dz}{dm}\right| \cos\left(\varphi + \arg\frac{dz}{dm}\right)$$

В них

$$\left|\frac{dz}{dm}\right| = \frac{V_*}{V'}(1 - cV'^2), \qquad \arg\frac{dz}{dm} = \arg\frac{d\zeta}{dm}$$

Координаты профиля, полученные путем графического интегрирования:

$$x = \int_0^{\varphi} P_1 d\varphi, \qquad y = \int_0^{\varphi} P_2\, d\varphi$$

даны в табл. 1. Замкнутость профиля подтверждает правильность вычислений.

Поступила 29 IX 1952

## ЛИТЕРАТУРА


1. Goldstein A. W. Jerisson M. Isolated and cascade aerofoils with prescribed velocity distributions. NACA, Rep. No 869, 1947.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
3. Wu Ch. H., Brown C. A. A theory of the direct and inverse problems of compressible flow past cascade of arbitrary airfoils. J. Aeron. Science, vol. 19, No 3, 1952.
4. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. ПММ, т. IV, вып. 4, 1940; т. V, вып. 2, 1941.
5. Lighthill M. J. A mathematical theory of cascade design. ARC, R & M, No 2104, 1946.
6. Тумашев Г. Г. Построение решетки по данному распределению скорости. Ученые записки Казанского университета, т. 109, кн. 1,1949.
7. Costello G. R. Method of designing cascade blades with prescribed velocity distributions in compressible potential flows. NACA, Rep. No 978, 1950.
8. Самойлович Г. С. Расчет гидродинамических решеток, ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.