Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ОБ ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

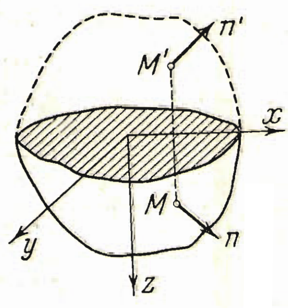
Э. Л. Блох
(Москва)

Настоящая статья является непосредственным развитием и продолжением работы [1], в которой был рассмотрен горизонтальный гидродинамический удар сферы, представляющий собой простейший случай пространственной задачи о горизонтальном ударе твердого тела об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности.

При изучении гидродинамического удара эллипсоида вращения следует различать случаи удлиненного и сплюснутого эллипсоида, для каждого из которых можно рассматривать внешнюю и внутреннюю задачи.

Поскольку исследование всех этих случаев ведется общим и достаточно единообразным методом, в работе приводится подробное изложение решения только внешней задачи для удлиненного эллипсоида вращения, а для всех остальных случаев дается окончательный результат с минимально необходимыми пояснениями.

Не останавливаясь на повторном изложении постановки задачи и выводе граничных условий, напомним, что возмущенное движение идеальной жидкости, порождаемое ударом плавающего на ее поверхности твердого тела (внешняя задача) или сосуда, частично заполненного жидкостью (внутренняя задача), является потенциальным.



Фиг. 1

Потенциал скоростей φ возмущенного движения жидкости связан с импульсивным давлением p_t соотношением

$$p_t = -\rho\varphi \qquad (\rho \text{ — плотность жидкости})$$

В области, занятой жидкостью, φ удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается в нуль на свободной поверхности, так как на ней $p_t = 0$.

На смоченной поверхности тела

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n(M)$$

где n — нормаль к поверхности тела, направленная внутрь жидкости, $V_n(M)$ — проекция на нормаль скорости точек M, принадлежащих смоченной поверхности тела.

Равенство нулю φ на свободной поверхности позволяет аналитически продолжить потенциал скоростей сквозь свободную поверхность в область, представляющую собой зеркальное изображение относительно свободной поверхности области, занятой жидкостью (фиг. 1), так, что

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z) \qquad (0.1)$$

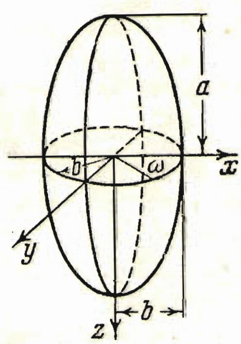
Очевидно, что в точках M и M', симметричных относительно свободной поверхности и принадлежащих соответственно смоченной поверхности тела и его зеркального изображения, в силу соотношения (0.1) имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_M = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M'}$$

Таким образом, граничное условие для всей области D, образованной областью, занятой жидкостью и ее зеркальным изображением относительно свободной поверхности, можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n(M)\operatorname{sign} z \qquad \begin{pmatrix}\operatorname{sign} z = +1 & \text{при } z > 0 \\ \operatorname{sign} z = -1 & \text{при } z < 0\end{pmatrix} \tag{0.2}$$

§ 1. Эллипсоид, экваториальная плоскость которого совпадает со свободной поверхностью жидкости. Рассмотрим наполовину погруженный в идеальную жидкость удлиненный эллипсоид вращения, экваториальная плоскость которого совпадает со свободной поверхностью жидкости (фиг. 2).



Фиг. 2

В эллиптических координатах μ, ζ и ω, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \varkappa\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\zeta^2-1}\cos\omega \\ y &= \varkappa\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\zeta^2-1}\sin\omega \\ z &= \varkappa\mu\zeta \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1 \leqslant \mu \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi \\ \zeta > 1 \\ \varkappa = \text{const}\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

уравнение Лапласа для потенциала скоростей φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta)^2\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} \tag{1.2}$$

Как известно [2], решение этого уравнения, конечное в бесконечно удаленных точках ($\zeta\to\infty$), выражается через функции Лежандра первого $P_n^m(\mu)$ и второго $Q_n^m(\zeta)$ рода рядом

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[A_n^m\cos m\omega + B_n^m\sin m\omega]\,Q_n^m(\zeta)\,P_n^m(\mu) \tag{1.3}$$

Здесь

$$P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2m}\frac{d^mP_n}{d\mu^m}, \qquad P_n^\circ = P_n \text{ — полиномы Лежандра}$$

$$Q_n^m(\zeta) = (\zeta^2-1)^{1/2m}\frac{d^mQ_n}{\partial\zeta^m}, \qquad Q_n^\circ = Q_n \text{ — функции Лежандра второго рода}$$

Уравнение эллипсоида вращения в эллиптических координатах μ, ζ, ω имеет вид:

$$\zeta = \zeta_0 = \text{const}$$

Если обозначить полуось эллипсоида, совпадающую с осью z, через a, а другую полуось, лежащую в экваториальной плоскости, через b

(фиг. 2), то из уравнений (1.1) имеем

$$a = \varkappa\zeta_0, \qquad b = \varkappa\sqrt{\zeta_0^2 - 1}$$

Отсюда

$$\varkappa = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad \zeta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Так как на поверхности эллипсоида вращения $\zeta = \zeta_0$ производная $\partial\varphi / \partial n$ равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}$$

то согласно (1.3)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} [A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega]\, \dot{Q}_n^m(\zeta_0)\, P_n^m(\mu)$$

где

$$\dot{Q}_n^m(\zeta) = \frac{dQ_n^m}{d\zeta}$$

Будем рассматривать только горизонтальный удар, определяемый, как известно [3], внезапным поступательным движением твердого тела вдоль осей x и y и его вращением вокруг оси z. Очевидно, что для эллипсоида вращения, экваториальная плоскость которого нормальна оси z, достаточно ограничиться случаем внезапного поступательного движения вдоль оси x, ибо в силу симметрии движение вдоль оси y ничем не отличается от движения вдоль оси x, а вращение вокруг оси z не вызывает возмущенного движения жидкости.

Если скорость движения эллипсоида вдоль оси x равна U_0, то проекция на нормаль скоростей точек, лежащих на его смоченной поверхности, будет

$$V_n(M) = U_0 \cos\alpha$$

где α — угол между нормалью n и осью z.

Так как для рассматриваемого эллипсоида

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\zeta_0^2 - \mu^2}}\, \zeta_0 \cos\omega$$

то на смоченной поверхности

$$V_n(M) = U_0 \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\zeta_0^2 - \mu^2}}\, \zeta_0 \cos\omega \qquad (\mu > 0)$$

и, значит, граничное условие (0.2) для всей области D $(-1 \leqslant \mu \leqslant 1)$ будет иметь вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} [A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega]\, \dot{Q}_n^m(\zeta_0)\, P_n^m(\mu) =$$

$$= \varkappa U_0 \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\zeta^2 - 1}}\, \zeta_0 \cos\omega \operatorname{sign}\mu \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{sign}\mu = +1 & \text{при} \quad 0 < \mu \leqslant 1 \\ \operatorname{sign}\mu = -1 & \text{при} \; -1 \leqslant \mu < 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Равенство (1.4) служит для определения неизвестных коэффициентов A_n^m и B_n^m. Очевидно, условию (1.4) можно удовлетворить, положив все коэффициенты $B_n^m = 0$ и $A_n^m = 0$ для $m \neq 1$.

Тогда для определения коэффициентов A_n^1 получаем более простое условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 P_n^1(\mu)\,\dot{Q}_n^1(\zeta_0) = \varkappa U_0 \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_0^2-1}}\,\zeta_0 \operatorname{sign}\mu \tag{1.5}$$

Так как функции $P_n^m(\mu)$ ортогональны в интервале $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\mu)\,P_\nu^m(\mu)\,d\mu = 0 \qquad \text{при } n \neq \nu$$

и, кроме того,

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(\mu)]^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

то из условия (1.5) получаем для определения A_n^1 равенства

$$A_n^1 \dot{Q}_n^1(\varphi_0) \int_{-1}^{+1} [P_n^1(\mu)]^2\,d\mu = \varkappa U_0 \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2-1}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2}\,P_n^1(\mu) \operatorname{sign}\mu\,d\mu$$

Так как $P_n^1(\mu)$ является нечетной функцией при $n = 2\nu$ и четной при $n = 2\nu+1$, то

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu}^1(\mu) \operatorname{sign}\mu\,d\mu = 2\int_0^1 \sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu}^1(\mu)\,d\mu$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu+1}^1(\mu) \operatorname{sign}\mu\,d\mu = 0$$

Таким образом, находим, что

$$A_{2\nu+1}^1 = 0, \qquad A_{2\nu}^1 = \varkappa U_0 (4\nu+1) \frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+1)!} J_{2\nu} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2-1}\,\dot{Q}_{2\nu}^1(\zeta_0)}$$

где

$$J_{2\nu} = \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu}^1(\mu)\,d\mu$$

Для интеграла $J_{2\nu}$ в работе [1] дано выражение

$$J_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{2\nu}{2\nu-1}\,\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}$$

в котором

$$(2\nu+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu+1); \qquad (2\nu)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2\nu),$$

Подставляя в уравнение (1.3) вместо коэффициентов A_n^m, B_n^m и величин $\varkappa$ и ζ_0 их значения, получаем для потенциала φ выражение

$$\varphi(\zeta, \mu, \omega) = U_0 \frac{a}{b} \sqrt{a^2-b^2} \cos\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1) \frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+1)!} J_{2\nu} \frac{Q_{2\nu}^1(\varphi)}{\dot{Q}_{2\nu}^1(\varphi)} P_{2\nu}^1(\mu) \tag{1.6}$$

Заметим, что для доказательства сходимости найденного решения для всей области D достаточно доказать сходимость ряда (1.6) на поверхности эллипсоида $\zeta = \zeta_0$.

Потенциал φ при $\zeta = \zeta_0$ представим в виде

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -U_0 b \cos\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu + 1) \frac{(2\nu - 1)!}{(2\nu + 1)!} J_{2\nu} F_{2\nu}{}^1(\zeta_0) P_{2\nu}{}^1(\mu) \qquad (1.7)$$

где

$$F_{2\nu}{}^1(\zeta_0) = -\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \frac{Q_{2\nu}{}^1(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}{}^1(\zeta_0)} = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0{}^2 - 1} \frac{Q_{2\nu}^1(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}^1(\zeta_0)}$$

Воспользовавшись равенством

$$Q_{2\nu}{}^1 = \sqrt{\zeta^2 - 1}\, \frac{dQ_{2\nu}}{d\zeta}$$

и известными [4] рекуррентными соотношениями для функции Лежандра второго рода, приведем коэффициент $F_{2\nu}{}^1(\zeta_0)$ к виду

$$F_{2\nu}{}^1(\zeta_0) = \frac{1 + (\zeta^2 - 1)^{-1}[1 - \zeta_0(Q_{2\nu+1}(\zeta_0) / Q_{2\nu}(\zeta_0))]}{(2\nu + 1) + (\zeta_0{}^2 - 1)^{-1}[1 - \zeta_0(Q_{2\nu+1}(\zeta_0) / Q_{2\nu}(\zeta_0)]}$$

Так как при $\zeta > 1$

$$0 < \zeta \frac{Q_{2\nu+1}(\zeta)}{Q_{2\nu}(\zeta)} < 1$$

то

$$F_{2\nu}{}^1(\zeta_0) < \frac{\zeta_0{}^2}{1 + (2\nu + 1)(\zeta_0{}^2 - 1)}$$

Кроме того, в работе [1] показано, что

$$|J_{2\nu}| < \frac{2\nu}{2\nu - 1} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}, \qquad |P_n^1| < n + 1$$

Указанные неравенства позволяют утверждать, что ряд (1.7), а следовательно, и ряд (1.6) будут сходиться абсолютно и равномерно в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, если сходится ряд

$$S = U_0 b \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\nu + 1}{2\nu + 1} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\zeta_0}{1 + (2\nu + 1)(\zeta_0{}^2 - 1)} = U_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\nu + 1}{2\nu - 1} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{ba^2}{a^2 + 2b^2\nu}$$

все члены которого не зависят от μ, положительны и больше абсолютного значения соответствующих членов ряда (1.7).

Сходимость же ряда S при всех значениях $\zeta_0 > 1$ вытекает из сходимости несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{4\nu + 1}{2\nu - 1} \frac{ba^2}{a^2 + 2b^2\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\pi\nu}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}(1.490\, b + 0.646 a)$$

Вычислим величину P_t — главного вектора импульсивных сил давлений, действующих на смоченную часть σ поверхности эллипсоида. В силу симметрии главный вектор импульсивных сил лежит в плоскости xy, параллелен оси x и направлен в сторону, обратную движению эллипсоида.

Так как импульсивное давление $p_t = -\rho\varphi$ и

$$P_t = -\iint_{\sigma} p_t \cos\alpha\, d\sigma \qquad (d\sigma = \varkappa^2 \sqrt{\zeta_0{}^2 - 1}\sqrt{\zeta_0{}^2 - \mu^2}\, d\mu\, d\omega)$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности эллипсоида вращения, то

$$P_t = -\rho U_0 ab^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1)\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+1)!} J_{2\nu} F_{2\nu}^1(\zeta_0) \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu}^1(\mu)\cos^2\omega\, d\mu\, d\omega$$

Выполняя интегрирование, окончательно имеем

$$P_t = -\pi\rho U_0 ab^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1)\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+1)!} (J_{2\nu})^2 F_{2\nu}^1(\zeta_0)$$

Поделив P_t на $-\rho U_0 V$, где V = объем смоченной части эллипсоида

$$V = \frac{2}{3}\pi ab^2$$

и заменив интеграл $J_{2\nu}$ его значением, получим коэффициент присоединенной массы:

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y = 3\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(2\nu+1)(4\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2}\cdot\left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2 F_{2\nu}^1(\zeta_0) \tag{1.8}$$

Вычислим также главный момент импульсивных сил давлений, действующих на смоченную часть эллипсоида при его внезапном поступательном движении вдоль оси x. В этом случае в силу симметрии момент импульсивных сил относительно осей x и z будет равен нулю, а момент относительно оси y определится выражением

$$M_t = -\iint_\sigma p_t (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\, d\sigma$$

где γ — угол между нормалью n и осью z.

Для рассматриваемого эллипсоида

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2-\mu^2}}\,\mu$$

тогда, заменяя x и z через эллиптические координаты и выполняя интегрирование, получим

$$M_t = -\rho U_0 (a^2-b^2)\, b^2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty}(4\nu+1)\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+1)!} J_{2\nu} F_{2\nu}^1(\zeta_0)\int_0^1 \mu\sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu}^1(\mu)\, d\mu$$

Так как

$$\int_0^1 \mu\sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu}^1(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mu\sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu}^1(\mu)\, d\mu$$

$$\mu\sqrt{1-\mu^2} = \frac{1}{3} P_2^1(\mu)$$

то в силу ортогональности присоединенных функций Лежандра первого рода в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ последний интеграл обращается в нуль для всех значений $\nu \neq 1$, а при $\nu = 1$ он принимает значение 0.400.

Учитывая, что $J_2 = 0.750$, окончательно находим

$$M_t = -\frac{\pi}{4}\rho U_0 (a^2-b^2)\, b^2 F_2^1(\zeta_0)$$

Таким образом, линия действия равнодействующей импульсивных сил давлений, приложенных к смоченной части эллипсоида, пересекает ось z в точке

$$z_0 = \frac{M_t}{P_t} = \frac{3a}{8\lambda}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) F_2{}^1(\zeta_0) \tag{1.9}$$

Рассмотрим предельные случаи, когда $\zeta_0 \to \infty$ $(a/b \to 1)$ и эллипсоид вырождается в сферу, и когда $\zeta_0 \to 1$ или $a/b \to \infty$ и эллипсоид приближается к бесконечно длинному круглому цилиндру.

При больших значениях ζ функция

$$Q_n(\zeta) \to \frac{n!}{(2n+1)!!} \frac{1}{\zeta^{n+1}}$$

и, следовательно,

$$F_{2\nu}{}^1 = \frac{1}{2\nu + 1} \qquad \text{при } \zeta_0 \to \infty$$

В этом случае

$$\lambda = 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(4\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2$$

Последнее выражение для коэффициента присоединенной массы сферы получено в работе [1], где показано, что в данном случае $\lambda = 0.273224$.

Во втором предельном случае $\zeta \to 1$

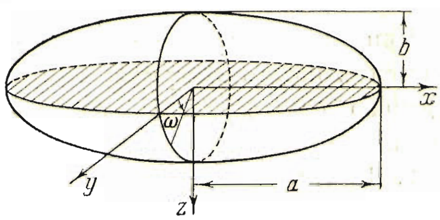
$$Q_n(\zeta) \to \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\zeta - 1}$$

и, следовательно, $F_{2\nu}^1 = 1$ при $\zeta_0 \to 1$. В этом случае

$$\lambda = 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(2\nu+1)(4\nu+1)}{(4\nu-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2$$

Приближенно суммируя последний ряд, находим, что при $a \gg b$ коэффициент присоединенной массы с точностью по крайней мере до пятого знака равен $\lambda = 1.00000$.

§ 2. Эллипсоид, экваториальная плоскость которого нормальна свободной поверхности жидкости. Рассмотрим теперь наполовину погруженный в жидкость удлиненный эллипсоид вращения, экваториальная плоскость которого нормальна свободной поверхности жидкости (фиг. 3).



Фиг. 3

В этом случае введем эллиптические координаты μ, ζ и ω соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \varkappa\mu\zeta \\ y &= \varkappa\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\zeta^2-1}\cos\omega \\ z &= \varkappa\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\zeta^2-1}\sin\omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение эллипсоида и его полуоси a и b попрежнему будет определяться равенствами

$$\zeta = \zeta_0 = \text{const}, \; a = \varkappa\zeta_0, \; b = \varkappa\sqrt{\zeta_0{}^2 - 1}$$

а уравнение Лапласа для потенциала скоростей и его решение — равенствами (1.2) и (1.3).

Точки M, лежащие на смоченной поверхности эллипсоида, определяются координатами

$$\zeta=\zeta_0, \qquad -1\leqslant\mu\leqslant 1, \qquad 0\leqslant\omega\leqslant\pi$$

а их зеркальное изображение M' — координатами

$$\zeta=\zeta_0; \qquad -1\leqslant\mu\leqslant 1, \qquad 2\pi\geqslant\omega\geqslant\pi$$

так что если $M=M(\zeta_0, \mu, \omega)$, то $M'=M(\zeta_0, \mu, 2\pi-\omega)$ и, значит, граничное условие (0.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=V_n(M)\operatorname{sign}\omega \qquad \begin{pmatrix}\operatorname{sign}\omega=+1 & \text{при} & 0<\omega<\pi\\ \operatorname{sign}\omega=-1 & \text{при} & \pi<\omega<2\pi\end{pmatrix}$$

Представляя $\operatorname{sign}\omega$ в виде ряда

$$\operatorname{sign}\omega=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1}$$

и учитывая, что в данном случае

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2-\mu^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}$$

получаем для определения коэффициентов A_n^m и B_n^m ряда (1.3), представляющего собой решение уравнения Лапласа для потенциала скоростей φ, условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m\cos m\omega+B_n^m\sin m\omega\right]\dot{Q}_n^m(\zeta_0)\,P_n^m(\mu)=$$

$$=\frac{4\varkappa}{\pi}\sqrt{\frac{\zeta_0^2-\mu^2}{\zeta_0^2-1}}\,V_n(M)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1} \tag{2.2}$$

При изучении горизонтального удара эллипсоида, экваториальная плоскость которого нормальна свободной поверхности жидкости, следует отдельно рассмотреть случаи его внезапного поступательного движения вдоль осей x и y, а также вращения вокруг оси z.

1. При поступательном движении эллипсоида вдоль оси x со скоростью U_x

$$V_n(M)=U_x\cos\alpha$$

где α — угол между нормалью n и осью x. Так как в данном случае

$$\cos\alpha=\mu\sqrt{\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2-\mu^2}}$$

то условие (2.2) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m\cos m\omega+B_n^m\sin m\omega\right]\dot{Q}_n^m(\zeta_0)\,P_n^m(\mu)=$$

$$=\frac{4\varkappa}{\pi}U_x\mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1} \tag{2.3}$$

Этому условию можно удовлетворить, положив

$$A_n^m = 0 \qquad \text{при всех } n, \qquad B_n^m = 0 \qquad \text{при } m = 2k$$

Тогда для определения коэффициентов B_n^{2k+1} получим соотношения

$$\sum_{n=2k+1}^{\infty} B_n^{2k+1} \dot{Q}_n^{2k+1}(\zeta_0) P_n^{2k+1}(\mu) = \frac{4\varkappa}{\pi} U_x \frac{\mu}{2k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

Используя ортогональность присоединенных функций Лежандра первого рода в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, получаем

$$B_n^{2k+1} \dot{Q}_n^{2k+1}(\zeta_0) \int_{-1}^{+1} [P_n^{2k+1}(\mu)]\, d\mu = \frac{4\varkappa}{\pi} \frac{U_x}{2k+1} \int_{-1}^{+1} \mu P_n^{2k+1}(\mu)\, d\mu$$

Отсюда

$$B_n^{2k+1} = \frac{4\varkappa}{\pi} U_x \frac{2n+1}{2k+1} \frac{(n-2k-1)!}{(n+2k+1)!} \frac{J_n^{2k+1}}{\dot{Q}_n^{2k+1}(\zeta_0)}$$

где

$$J_n^{2k+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu P_n^{2k+1}(\mu)\, d\mu$$

Так как P_n^{2k+1} является четной функцией при $n = 2\nu + 1$ и нечетной при $n = 2\nu$, следует, что

$$J_{2\nu+1}^{2k+1} = 0, \qquad J_{2\nu}^{2k+1} = \int_0^1 \mu P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\, d\mu$$

и, значит,

$$B_{2\nu+1}^{2k+1} = 0, \qquad B_{2\nu}^{2k+1} = \frac{4\varkappa U_x}{\pi} \frac{4\nu+1}{2k+1} \frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!} \frac{J_{2\nu}^{2k+1}}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)}$$

Подставляя коэффициенты A_n^m и B_n^m в выражение (1.3), получаем потенциал скоростей $\varphi(\zeta, \mu, \omega)$ в виде

$$\varphi(\zeta, \mu, \omega) = \frac{4\sqrt{a^2-b^2}}{\pi} U_x \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{4\nu+1}{2k+1} \frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!} \times$$

$$\times J_{2\nu}^{2k+1} \frac{Q_{2\nu}^{2k+1}(\zeta)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)} P_{2\nu}^{2k+1}(\mu) \sin(2k+1)\omega \tag{2.4}$$

Потенциал скоростей на поверхности эллипсоида $\zeta = \zeta_0$ запишем в виде

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -\frac{4U_x}{\pi} \frac{b^2}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{4\nu+1}{2k+1} \frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!} \times$$

$$\times J_{2\nu}^{2k+1} F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0) P_{2\nu}^{2k+1}(\mu) \sin(2k+1)\omega \tag{2.5}$$

где

$$F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)}$$

Интеграл $J_{2\nu}^{2k+1}$ после соответствующих преобразований может быть приведен к известным[5] интегралам, содержащим функции Лежандра $P_n^m(\mu)$, в результате чего находим, что

$$J_{2\nu}^{2k+1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\nu-k}{\nu+k}\,\frac{2k+1}{2\nu-1}\,\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\,\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

Подставляя $J_{2\nu}^{2k+1}$ в выражение (2.5), приводим его к виду

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -U_x\frac{b^2}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\nu+1}{(\nu+1)(2\nu-1)}\,\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)\,P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\sin(2k+1)\,\omega \tag{2.6}$$

Докажем теперь абсолютную и равномерную сходимость найденного решения (2.4) в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ при всех значениях ζ, для чего достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость φ на поверхности эллипсоида $\zeta=\zeta_0$.

Обозначая

$$\frac{4\nu+1}{(\nu+1)(2\nu-1)}\,\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} = \alpha_\nu$$

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}\,F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)\,P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\sin(2k+1)\,\omega = S_\nu$$

запишем (2.6) в виде

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -U_x\frac{b^2}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu S_\nu$$

Конечную сумму S_ν в свою очередь несколько преобразуем, написав

$$S_\nu = \sum_{k=0}^{\nu-1}\left[F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)\sin(2k+1)\,\omega\,\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}\sqrt{\frac{(2\nu+2k+1)!}{(2\nu-2k-1)!}}\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}}\;P_{2\nu}^{2k+1}(\mu) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu-1}\left[F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)\sin(2k+1)\,\omega\sqrt{\frac{(2\nu-2k-1)!!\,(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu-2k-2)!!\,(2\nu+2k)!!}}\right]\sqrt{\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}}\,P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)$$

и так как

$$\left|\sum_{k=k_0}^{n}a_k b_k\right| \leqslant \left[\sum_{k=k_0}^{n}a_k^2\sum_{k=k_0}^{n}b_k^2\right]^{1/2}$$

имеем

$$|S_\nu| \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\nu-1}[F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)]^2\sin^2(2k+1)\,\omega\,\frac{(2\nu-2k-1)!!\,(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu-2k-2)!!\,(2\nu+2k)!!}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}\,[P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)]^2\right\}^{1/2}$$

Для оценки второй суммы воспользуемся равенством

$$1 = [P_n(\mu)]^2 + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}[P_n^{\ m}(\mu)]^2$$

являющимся следствием теоремы сложения [4] функций Лежандра первого рода в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. Из этого равенства получаем

$$1 = [P_n(\mu)]^2 + 2\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}[P_{2\nu}^{\ 2k+1}(\mu)]^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}[P_{2\nu}^{\ 2k}(\mu)]^2$$

Так как все члены правой части существенно положительны, то

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}[P_{2\nu}^{\ 2k+1}(\mu)]^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

Учитывая, кроме того, что $\sin^2(2k+1)\,\omega \leqslant 1$ и

$$\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k-2)!!}\,\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!} < \frac{(2\nu-2k)(2\nu+2k+1)}{\pi\sqrt{\nu^2-k^2}} \qquad \text{при } k \leqslant \nu-1$$

что вытекает из формулы Стирлинга для $n!$, получаем

$$|S_\nu| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2\nu-2k)(2\nu+2k+1)}{\sqrt{\nu^2-k^2}}[F_\nu^{\ 2k+1}(\zeta_0)]^2\right]^{1/2}$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями [5] для присоединенных функций Лежандра второго рода, можно показать, что

$$F_{2\nu}^{\ 2k+1} \leqslant \frac{\zeta_0^2}{(2k+1)+(2\nu+1)(\zeta_0^2-1)} < \frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2-1}\,\frac{1}{2\nu+1} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{1}{2\nu+1}$$

и, значит,

$$|S_\nu| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{1}{2\nu+1}\left[\sum_{k=0}^{\nu-1}\sqrt{\frac{\nu-k}{\nu+k}}(2\nu+2k+1)\right]^{1/2} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{1}{2\nu+1}\left[\sum_{k=0}^{\nu-1}(2\nu+2k+1)\right]^{1/2} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{(3\nu^2)^{1/2}}{2\nu+1} < \frac{a^2}{2b^2}$$

Получив оценку для S_ν, видим, что согласно (2.7)

$$|\varphi(\zeta_0, \mu, \omega)| < \frac{U_x a}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$$

Но α_ν при больших ν уменьшается как $\nu^{-3/2}$, что и доказывает абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.6) в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ для всех значений ζ_0, а значит, и абсолютную и равномерную сходимость решения (2.4) во всей области D для всех значений $b \leqslant a$.

Определив потенциал φ, легко подсчитать главный вектор и главный момент импульсивных сил, действующих на смоченную часть эллипсоида.

Так как в силу симметрии главный вектор импульсивных сил $\mathbf{P}_t$ направлен по оси x в сторону, обратную движению эллипсоида, а единственной отличной от нуля проекцией на оси координат главного момента $\mathbf{M}_t$ является его проекция на ось y, то для полного определения главного вектора и главного момента достаточно вычислить

$$(P_t)_x = P_t = -\iint_\sigma p_t \cos\alpha \, d\sigma$$

$$(M_t)_y = M_t = -\iint_\sigma p_t (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\, d\sigma$$

где σ — смоченная поверхность эллипсоида, α и γ — углы между нормалью n и осями x и z.

Для эллипсоида вращения

$$d\sigma = \varkappa^2 \sqrt{\zeta_0^2 - 1}\sqrt{\zeta_0^2 - \mu^2}\, d\mu\, d\omega$$

и в рассматриваемом случае

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}}\,\mu, \qquad \cos\gamma = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_0^2 - \mu^2}}\,\zeta_0 \sin\omega$$

Следовательно, подставляя вместо p_t его выражение через $\varphi(\zeta_0, \mu_0, \omega)$ и интегрируя почленно получающийся ряд, что возможно в силу равномерной сходимости ряда (2.6), имеем

$$P_t = -\frac{4U_x}{\pi}\rho\frac{b^4}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{4\nu+1}{2k+1}\,\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}\times$$

$$\times J_{2\nu}^{2k+1}F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)\int_{-1}^{+1}\int_0^{\pi}\mu P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\sin(2k+1)\omega\, d\mu\, d\omega$$

$$M_t = \frac{4U_x}{\pi}\rho(a^2-b^3)\frac{b^2}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{4\nu+1}{2k+1}\,\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}\times$$

$$\times J_{2\nu}^{2k+1}F_{2\nu}^{2k+1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\pi}\mu\sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\sin(2k+1)\omega\sin\omega\, d\mu\, d\omega$$

где $\varkappa$ и ζ_0 заменены их выражениями через a и b. Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1}\mu P_{2\nu}^{2k+1}(\mu)\, d\mu = 2J_{2\nu}^{2k+1}, \qquad \int_0^{\pi}\sin(2k+1)\omega\sin\omega\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } k\neq 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{при } k=0\end{cases}$$

$$\mu(1-\mu^2)^{1/2} = \frac{1}{3}P_2^1(\mu), \qquad \int_{-1}^{+1}P_2^1(\mu)P_{2\nu}^1(\mu)\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu\neq 1 \\ \frac{12}{15} & \text{при } \nu=1\end{cases}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} P_t &= -\frac{16}{\pi}\rho U\frac{b^4}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{4\nu+1}{(2k+1)^2}\,\frac{(2\nu-2k-1)!}{(2\nu+2k+1)!}\left(J_{2\nu}^{2k+1}\right)^2 F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0) \\ M_t &= \frac{\pi}{2}\rho U_x(a^2-b^2)\frac{b^3}{a}F_2^1(\zeta_0) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

где в выражении для M_t коэффициент J_2^1 заменен его численным значением, равным $\frac{3}{16}\pi$.

Для определения коэффициента присоединенной массы λ_x разделим P_t на величину $-\rho U_x \frac{2}{3}\pi a b^2$, тогда, заменяя коэффициент $J_{2\nu}^{2k+1}$ его значением, после элементарных преобразований находим

$$\lambda_x = 3\frac{b^2}{a^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(4\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2}\left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2 \alpha_\nu(\zeta_0) \tag{2.8}$$

где

$$\alpha_\nu(\zeta_0) = \frac{4}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1}(\nu-k)\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}F_{2\nu}^{2k+1}(\zeta_0)$$

Центр давления z_0 получим, поделив величину M_t на P_t, тогда

$$z_0 = -\frac{3b}{4\lambda_x}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)F_2^1(\zeta_0) \tag{2.9}$$

Рассмотрим два предельных случая, когда эллипсоид вырождается в сферу ($\zeta_0 \to \infty$) и когда он имеет весьма большое удлинение ($\zeta_0 \to 1$). При $\zeta \to \infty$

$$Q_n(z) \to \frac{n!}{(2n+1)!!}\frac{1}{\zeta^{n+1}}, \qquad Q_n^m(\zeta) \to (-1)^m\frac{(n+m)!}{(2n+1)!!}\frac{1}{\zeta^{n+1}}$$

и, следовательно,

$$F_{2\nu}^{2k+1}(\infty) = \frac{1}{2\nu+1} \qquad \text{при } \zeta_0 \to \infty$$

Подставляя найденное значение $F_{2\nu}^{2k+1}(\infty)$ в выражение для $\alpha_\nu(\zeta_0)$, получаем

$$\alpha_\nu(\infty) = \frac{4}{\nu(2\nu+1)}\sum_{k=0}^{\nu-1}(\nu-k)\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

Непосредственно вычисляя сумму, стоящую в правой части для $\nu \leqslant 5$, получаем, что $\alpha_\nu(\infty) = 1$ при $\nu \leqslant 5$. Приближенное вычисление этой суммы показывает, что $\alpha_\nu(\infty) \to 1$ при больших значениях ν.

Таким образом, можно ожидать, что $\alpha_\nu(\infty)$ точно равно единице[1] при всех значениях ν.

Учитывая, что при $\zeta_0 = \infty$ $a = b$, и принимая $\alpha_\nu(\infty) = 1$, получаем из равенства (2.8) найденное в работе [1] выражение для коэффициента присоединенной массы сферы. При $\zeta \to 1$

$$Q_n \to \frac{1}{2}\ln\frac{2}{\zeta-1}, \qquad Q_n^m \to 2^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^m\frac{(m-1)!}{(\zeta-1)^{\frac{1}{2}m}}$$

и, следовательно,

$$F_{2\nu}^{2k+1}(1) = \frac{1}{2k+1}$$

[1] Строгого доказательства этого утверждения получить не удалось.

Тогда при $\zeta_0 = 1$

$$\alpha_\nu(1) = \frac{4}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\nu-k}{2k+1} \frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!} \frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

Полагая при весьма больших удлинениях эллипсоида $(b/a \ll 1)$ $\alpha_\nu(\zeta_0) = \alpha_\nu(1)$, после приближенного суммирования ряда (2.8) получаем

$$\lambda_x = 0.854 \frac{b^2}{a^2}$$

2. При поступательном движении эллипсоида вдоль оси y со скоростью U_y

$$V_n(M) = U_y \cos\beta$$

где β — угол между нормалью n и осью y.

Так как в рассматриваемом случае

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_0^2-\mu^2}}\, \zeta_0 \cos\omega$$

то условие (2.2) принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_n^m \cos n\omega + B_n^m \sin m\omega\right] \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \tag{2.10}$$

$$= \frac{4\varkappa}{\pi} U_y \sqrt{1-\mu^2} \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \cos\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1} =$$

$$= \frac{4\varkappa}{\pi} U_y \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \sqrt{1-\mu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2-1} \sin 2k\omega$$

Этому условию можно удовлетворить, полагая

$$A_n^m = 0 \quad \text{при всех } n, \qquad B_n^m = 0 \quad \text{при } m = 2k-1$$

Тогда для определения коэффициентов B_n^{2k} получим соотношение

$$\sum_{n=2k}^{\infty} B_n^{2k} \dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0) P_n^{2k}(\mu) = \frac{4\varkappa}{\pi} U_y \frac{2k}{4k^2-1} \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \sqrt{1-\mu^2}$$

Отсюда

$$B_n^{2k} = \frac{4\varkappa}{\pi} U_y \frac{k(2n+1)}{4k^2-1} \frac{(n-2k)!}{(n+2k)!} \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \frac{1}{\dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0)} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2}\, P_n^{2k}(\mu)\, d\mu$$

Обозначая

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2}\, P_n^{2k}(\mu)\, d\mu = J_n^{2k}$$

видим, что так как $P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)$ нечетная, а $P_{2\nu}^{2k}$ четная функция μ, то

$$J_{2\nu+1}^{2k} = 0, \qquad J_{2\nu}^{2k} = \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu}^{2k}(\mu)\, d\mu$$

и, следовательно,

$$B_{2\nu+1}^{2k} = 0, \qquad B_{2\nu}^{2k} = \frac{8\varkappa}{\pi} U_y \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2-1}} \frac{1}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)} J_{2\nu}^{2k}$$

Подставляя найденные значения A_n^m и B_n^m в уравнение (1.3), получаем для потенциала скоростей φ выражение

$$\varphi(\zeta, \mu, \omega) = \frac{8U_y}{\pi} \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - b^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!} \times$$

$$\times J_{2\nu}^{2k} \frac{Q_{2\nu}^{2k}(\zeta)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)} P_{2\nu}^{2k}(\mu) \sin 2k\omega \qquad (2.11)$$

которое на поверхности эллипсоида $\zeta = \zeta_0$ принимает вид:

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -\frac{8U_y}{\pi} b \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!} J_{2\nu}^{2k} F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) P_{2\nu}^{2k}(\mu) \sin 2k\omega \qquad (2.12)$$

где

$$F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)}$$

Интеграл $J_{2\nu}^{2k}$ вычисляется точно так же, как и интеграл $J_{2\nu}^{2k+1}$, и оказывается равным

$$J_{2\nu}^{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{4k^2-1}{2\nu-1} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!} \frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

после чего $\varphi(\zeta_0, \mu, \omega)$ окончательно записывается в виде

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -4U_y b \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\nu+1}{2\nu-1} \frac{(2\nu-1)!}{(2\nu+2)!} \sum_{k=1}^{\nu} k \frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!} \times$$

$$\times F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) P_{2\nu}^{2k}(\mu) \sin 2k\omega$$

Абсолютная и равномерная сходимость найденного решения в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ для всех значений $\zeta_0 \geqslant 1$ доказывается точно так же, как и при поступательном движении эллипсоида вдоль оси x.

Переходя к вычислению импульсивных сил, действующих на смоченную часть эллипсоида, заметим, что в данном случае главный момент относительно начала координат равен нулю и равнодействующая импульсивных сил P_t проходит через центр эллипсоида параллельно оси y и направлена в сторону, обратную его движению. Таким образом,

$$P_t = -\iint_\sigma p_t \cos\beta \, d\sigma = \rho \iint_\sigma \varphi(\zeta_0, \mu, \omega) \cos\beta \, d\sigma$$

или, подставляя вместо φ, $\cos\beta$ и $d\sigma$ их значения, имеем

$$P_t = -\frac{8}{\pi} U_y \rho a b^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu+2k)!}{(2\nu+2k)!} J_{2\nu}^{2k} F_{2\nu}^{2k} \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} \int_0^{\pi} \sqrt{1-\mu^2} P_{2\nu}^{2k}(\mu) \sin 2k\omega \cos\omega \, d\mu \, d\omega$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} P_{2\nu}^{2k}(\mu) \, d\mu = 2J_{2\nu}^{2k}, \qquad \int_0^{\pi} \sin 2k\omega \cos\omega \, d\omega = \frac{4k}{4k^2-1}$$

получаем

$$P_t = -\frac{16}{\pi}\rho U_y ab^2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{(2k)^2(4\nu+1)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left(J_{2\nu}^{2k}\right)^2 F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)$$

Заменяя в этом выражении $J_{2\nu}^{2k}$ его значением и поделив P_t на $-\rho U_y \frac{2}{3}\pi ab^2$, находим выражение для коэффициента присоединенной массы:

$$\lambda_y = 3\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(4\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2}\left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2\beta_\nu(\zeta_0) \qquad (2.13)$$

где

$$\beta_\nu(\zeta_0) = \frac{8}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}k^2\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}\frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)$$

В предельном случае $\zeta_0\to\infty$, когда эллипсоид вырождается в сферу, величина $F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) = (2\nu+1)^{-1}$ и

$$\beta_\nu(\infty) = \frac{8}{\nu(2\nu+1)}\sum_{k=1}^{\nu}k^2\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}\frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}$$

Непосредственное вычисление $\beta_\nu(\infty)$ для $\nu\leqslant 5$ показывает, что $\beta_\nu(\infty)=1$ при этих значениях ν. Приближенное вычисление $\beta_\nu(\infty)$ для весьма больших значений ν также показывает, что $\beta_\nu(\infty)\to 1$ при $\nu\to\infty$. Таким образом, можно предполагать, что $\beta_\nu(\infty)$, так же как и $\alpha_\nu(\infty)$, равно единице при всех значениях ν; в этом случае равенство (2.13) совпадает с выражением для коэффициента присоединенных масс сферы.

Во втором предельном случае $\zeta_0\to 1$, когда эллипсоид вырождается в бесконечно длинный круглый цилиндр, величина $F_{2\nu}^{2k} = 1/2k$ и

$$\beta_\nu = \frac{4}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}k\,\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}\frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}$$

Приближенно суммируя ряд (2.13), получаем для λ_y при $\zeta_0=1$ значение

$$\lambda_y = 0.404$$

что практически совпадает, как это и должно быть, с величиной коэффициента присоединенной массы круглого цилиндра, равного на основании решения плоской задачи [6] величине

$$\frac{4}{\pi^2} = 0.40528$$

3. При вращении эллипсоида вокруг оси z с угловой скоростью Ω_0

$$V_n(M) = \Omega_0(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Заменяя x, y, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ их значениями через эллиптические координаты ζ, μ, ω, приводим условия (2.2) к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m\cos m\omega + B_n^m\sin m\omega\right]\dot{Q}_n^m(\zeta_0)P_n^m(\mu) =$$

$$= \frac{8\varkappa^2}{\pi}\Omega_0\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\varphi_0^2-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2k\omega \qquad (2.14)$$

Отсюда заключаем, что $A_n{}^m = 0$ при всех n, $B_n{}^m = 0$ при $m = 2k - 1$ и, следовательно,

$$\sum_{n=2k}^{\infty} B_n{}^{2k} \dot{Q}_n{}^{2k}(\zeta_0)\, P_n{}^{2k}(\mu) = \frac{8\varkappa^2}{\pi}\Omega_0 \frac{k}{4k^2-1}\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\zeta_0{}^2-1}}$$

а значит,

$$B_n{}^{2k} = \frac{4\varkappa^2}{\pi}\Omega_0 \frac{k}{4k^2-1}(2n+1)\frac{(n-2k)!}{(n+2k)!}\frac{1}{\sqrt{\zeta_0{}^2-1}}\frac{1}{\dot{Q}_n{}^{2k}(\zeta_0)}\int_{-1}^{+1}\mu\sqrt{1-\mu^2}\,P_n{}^{2k}(\mu)d\mu$$

Обозначая

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\mu\sqrt{1-\mu^2}\,P_n{}^{2k}(\mu)\,d\mu = J_n{}^{2k}$$

видим, что

$$J_{2\nu}{}^{2k} = 0, \qquad J_{2\nu+1}^{2k} = \int_0^1 \mu\sqrt{1-\mu^2}\,P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\,d\mu$$

Подставляя найденные значения $A_n{}^m$ и $B_n{}^m$ в уравнение (1.3), получаем для потенциала скоростей выражение

$$\varphi(\zeta, \mu, \omega) = \frac{8}{\pi}\Omega_0\frac{(a^2-b^2)^{3/2}}{b}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k(4\nu+3)}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\times$$

$$\times J_{2\nu+1}^{2k}\frac{Q_{2\nu+1}^{2k}(\zeta)}{\dot{Q}_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)}P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\sin 2k\omega \tag{2.15}$$

которое на поверхности эллипсоида $\zeta = \zeta_0$ принимает вид:

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -\frac{8}{\pi}\Omega_0(a^2-b^2)\frac{b}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k(4\nu+3)}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\times$$

$$\times J_{2\nu+1}^{2k}F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\sin 2k\omega \tag{2.16}$$

где

$$F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0{}^2-1}\frac{Q_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)}$$

Интеграл $J_{2\nu+1}^{2k}$ легко выражается через вычисленные ранее интегралы $J_{2\nu}^{2k}$ и $J_{2\nu+2}^{2k}$ и оказывается равным

$$J_{2\nu+1}^{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{4k^2-1}{2\nu-1}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+4)!!}\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

после чего выражение (2.16) окончательно можно представить в виде

$$\varphi(\zeta_0, \mu, \omega) = -4\Omega_0(a^2-b^2)\frac{b}{a}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\nu+3}{2\nu-1}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+4)!!}\sum_{k=1}^{\nu}k\frac{(2\nu-2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)\,P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\sin 2k\omega \tag{2.17}$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости найденного решения для $\varphi(\zeta, \mu, \omega)$ в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ для всех значений $\zeta_0 \geqslant 1$ ведется точно так же, как и в п. 1 настоящего параграфа.

Очевидно, что в данном случае в силу симметрии система импульсивных сил давлений, приложенных к эллипсоиду, приводится к одному главному моменту, направленному параллельно оси z в сторону, обратную вектору угловой скорости Ω_0.

Алгебраическая величина главного момента M_t определяется равенством

$$M_t = -\iint_\sigma p_t (x\cos\beta - y\cos\alpha)\, d\sigma = \rho \iint_\sigma \varphi(\zeta_0, \mu, \omega)(x\cos\beta - y\cos\alpha)\, d\sigma$$

или

$$M_t = -\rho\Omega_0 \frac{8}{\pi}\frac{b^2}{a}(a^2-b^2)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+3)}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!} J_{2\nu+1}^{2k} \times$$

$$\times F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0) \int_{-1}^{+1}\int_0^{\pi} \mu\sqrt{1-\mu^2}\, P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\sin 2k\omega\cos\omega\, d\mu\, d\omega$$

Выполняя интегрирования, окончательно, находим

$$M_t = -\rho\Omega_0 \frac{16}{\pi}\frac{b^2}{\pi}(a^2-b^2)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{4k^2(4\nu+3)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}(J_{2\nu+1}^{2k})^2 F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)$$

Заменяя $J_{2\nu+1}^{2k}$ его значением и поделив M_t на $-\Omega_0 I_z$, где I_z — момент инерции относительно оси z жидкости, объем и форма которой равны объему и форме смоченной части эллипсоида:

$$I_z = \rho\frac{2}{15}\pi a b^2(a^2+b^2)$$

получим коэффициент присоединенной массы λ_{zz}, который представим в виде

$$\lambda_{zz} = 120\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2(a^2+b^2)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\nu+3}{(2\nu-1)^2}\left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+4)!!}\right]^2 \gamma_\nu(\zeta_0) \tag{2.18}$$

где

$$\gamma_\nu(\zeta_0) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 \frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!} F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)$$

Для сферы $a_0 = b$, естественно, получаем, что

$$\lambda_{zz} = 0$$

Для эллипсоида весьма большого удлинения, когда $\zeta_0 \to 1$ и $a \gg b$:

$$F_{2\nu+1}^{2k} = \frac{1}{2k}$$

В этом случае

$$\gamma_\nu(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} k \frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!}$$

Приближенно суммируя ряд (2.17), находим, что при $a \gg b$

$$\lambda_{zz} = 0.404$$

§ 3. Внутренняя задача. Рассматривая внутреннюю задачу, т. е. задачу о горизонтальном ударе эллипсоида вращения, заполненного до половины идеальной жидкостью, надо воспользоваться решением уравнения Лапласа для потенциала скоростей φ, конечным в начале координат.

Для удлиненного эллипсоида $(a > b)$ таким решением будет[2] выражение

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega] P_n^m(\zeta) P_n^m(\mu) \tag{3.1}$$

В случае внутренней задачи производная $\partial\varphi / \partial n$ и направляющие косинусы нормали n, направленной внутрь жидкости (т. е. внутрь эллипсоида), определяются такими же выражениями, но с обратным знаком, что и для внешней задачи.

Следовательно, граничные условия из которых определяются коэффициенты A_n^m и B_n^m, будут совпадать с условиями (1.4), (2.3), (2.10), (2.14) с той разницей, что в них вместо $\dot{Q}_n^m(\zeta_0)$ будут стоять $\dot{P}_n^m(\zeta_0)$.

Точно так же выражения для потенциала скоростей φ в случае внутренней задачи будут совпадать с выражениями, полученными из соотношений (1.6), (2.4), (2.11), (2.15), заменой в них $Q_n^m(\zeta)$ на $P_n^m(\zeta)$ и $\dot{Q}_n^m(\zeta_0)$ на $\dot{P}_n^m(\zeta_0)$.

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости найденных таким образом решений в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ для всех $\zeta_0 \geqslant 1$ проводится повторением соответствующих доказательств для внешней задачи и не встречает каких-либо новых принципиальных затруднений.

Определив потенциал скоростей φ после соответствующих вычислений, находим коэффициенты присоединенной массы и центры давления для внутренней задачи, которые имеют следующий вид.

1. Для эллипсоида, экваториальная плоскость которого совпадает со свободной поверхностью жидкости:

$$\lambda^* = \lambda_x^* = \lambda_y^* = 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(4\nu+1)(2\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2 F_{2\nu}^{*1}(\zeta_0) \tag{3.2}$$

$$z_0^* = \frac{3a}{8\lambda^*}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) F_2^{*1}(\zeta_0) \tag{3.3}$$

2. Для эллипсоида, экваториальная плоскость которого нормальна свободной поверхности жидкости:

$$\lambda_x^* = \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(4\nu+1)(2\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2 \sigma_\nu^*(\zeta_0) \tag{3.4}$$

$$z_0^* = -\frac{3b}{4\lambda^*{}_x}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) F_2^{*1}(\zeta_0) \tag{3.5}$$

$$\lambda_y^* = \frac{3}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(4\nu+1)(2\nu+1)}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!}\right]^2 \beta_\nu^*(\zeta_0) \tag{3.6}$$

$$\lambda_{zz}^* = 120 \frac{(a^2-b^2)}{a^2(a^2+b^2)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\nu+3}{(2\nu-1)^2} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+4)!!}\right]^2 \gamma_\nu(\zeta_0) \tag{3.7}$$

где

$$\alpha_\nu^*(\zeta_0)=\frac{8}{2\nu+1}\sum_{k=0}^{\nu-1}(\nu-k)\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}F_{2\nu}^{*2k+1}(\zeta_0)$$

$$\beta_\nu^*(\zeta_0)=\frac{16}{2\nu+1}\sum_{k=1}^{\nu}k^2\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}\frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}F_{2\nu}^{*2k}(\zeta_0)$$

$$\gamma_\nu(\zeta_0)=\sum_{k=1}^{\nu}k^2\frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu+2k)!!}\frac{(2\nu-2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!}F_{2\nu+1}^{*2k}$$

$$F_n^{*m}=\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1}\frac{P_n^m(\zeta_0)}{\dot{P}_n^m(\zeta_0)}$$

В предельном случае $\zeta_0\to\infty$, когда эллипсоид вырождается в сферу;

$$F_n^m=\frac{1}{n}$$

При этом

$$\alpha_\nu^*=\alpha_\nu(\infty)=1,\qquad \beta_\nu^*(\infty)=\beta_\nu(\infty)=1$$

и формулы (3.2), (3.4) и (3.6) переходят в полученное в работе [1] выражение для коэффициента присоединенной массы сферы, заполненной до половины идеальной жидкостью, равного 0.398224.

Во втором предельном случае $\zeta_0\to 1$, когда $a\gg b$:

$$F_n^{*m}=\frac{1}{m}$$

Тогда для эллипсоида весьма большого удлинения, экваториальная плоскость которого совпадает со свободной поверхностью жидкости, из формулы (3.2), которая в этом случае совпадает с выражением (1.8), получаем

$$\lambda^*=\lambda=1$$

Для эллипсоида, экваториальная плоскость которого нормальна свободной поверхности жидкости, выражения (3.4), (3.6) и (3.7) при $\zeta\to 1$ совпадают соответственно с равенствами (2.8), (2.13), (2.18) и, значит, при $a\gg b$

$$\lambda_x^*=\lambda_x,\quad \lambda_y^*=\lambda_y,\quad \lambda_{zz}^*=\lambda_{zz}$$

§ 4. Сплюснутый эллипсоид вращения (сфероид). Для сплюснутого эллипсоида вращения $a<b$ эллиптические координаты ζ, μ, ω вводим соотношениями

$$x=\varkappa\sqrt{\zeta^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$$
$$y=\varkappa\sqrt{\zeta^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$$
$$z=\varkappa\zeta\mu$$

если экваториальная плоскость совпадает со свободной поверхностью жидкости, и соотношениями

$$x=\varkappa\mu\zeta,\qquad y=\varkappa\sqrt{\zeta^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega,\qquad z=\varkappa\sqrt{\zeta^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$$

если экваториальная плоскость нормальна свободной поверхности.

В приведенных равенствах

$$-1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 < \zeta < \infty, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi, \quad \varkappa = \sqrt{b^2 - a^2}$$

уравнение эллипсоида, как и прежде, будет

$$\zeta = \zeta_0 \qquad \left(\zeta_0 = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$$

В координатах ζ, μ, ω уравнение Лапласа для потенциала скоростей φ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{\zeta^2+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}$$

Решение этого уравнения, конечное в бесконечно удаленных точках, пригодное для внешней задачи, имеет [2] вид:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n{}^m \cos m\omega + B_n{}^m \sin m\omega\right] q_n{}^m(\zeta) P_n{}^m(\mu)$$

а решение, конечное в начале координат и пригодное для внутренней задачи [2], будет

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n{}^m \cos m\omega + B_u{}^m \sin m\omega\right] p_n{}^m(\zeta) P_n{}^m(\mu)$$

где

$$p_n{}^m(\zeta) = (\zeta^2+1)^{1/2\, m}\frac{d^m p_n}{d\zeta^m}, \qquad q_n{}^m(\zeta) = (\zeta^2+1)^{1/2\, m}\frac{d^m q_n}{d\zeta^m}$$

и $p_n{}^\circ(\zeta) = p_n(\zeta)$, $q_n{}^\circ(\zeta) = q_n(\zeta)$ соответственно функции Лежандра первого и второго рода от мнимого аргумента.

Функции $p_n(\zeta)$ и $q_n(\zeta)$ связаны с функциями $P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$ соотношениями

$$p_n(\zeta) = (i)^{-n} P_n(i\zeta), \qquad q_n(\zeta) = i^{n+1} Q_n(i\zeta)$$

Повторяя без всяких изменений все выводы, подробно приведенные в предыдущих параграфах, получаем для потенциалов скоростей, главного вектора и главного момента импульсивных сил давлений, действующих на смоченную поверхность сплюснутого эллипсоида, точно такие же выражения, как и для удлиненного эллипсоида, в которых функции $Q_n{}^m(\zeta)$ для внешней задачи и $P_n{}^m(\zeta)$ для внутренней задачи заменяются соответственно функциями $q_n{}^m(\zeta)$ и $p_n{}^m(\zeta)$.

Точно так же все формулы для присоединенных масс и координаты центра давления, полученные для удлиненного эллипсоида, сохраняют свой вид и для сплюснутого эллипсоида, если в них заменить при внешней задаче функции $F_n{}^m(\zeta_0)$ функциями $f_n{}^m(\zeta_0)$ и при внутренней задаче функции $F_n{}^{*m}(\zeta_0)$ функциями $f_n{}^{*m}(\zeta_0)$, где

$$f_n{}^m(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2+1}\frac{q_n{}^m(\zeta_0)}{\dot q_n{}^m(\zeta_0)}, \qquad f_n{}^{*m}(\zeta_0) = \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2+1}\frac{p_n{}^m(\zeta_0)}{\dot p_n{}^m(\zeta_0)}$$

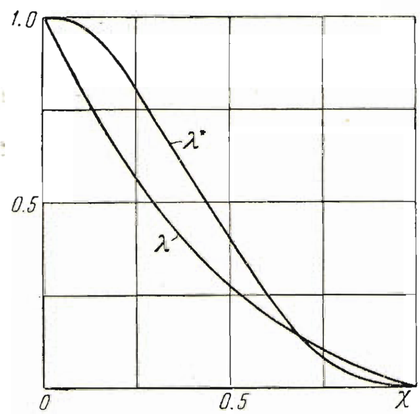
Причем в предельном случае $\zeta_0 \to \infty$, когда эллипсоид вырождается в сферу:

$$f_n^m(\infty) = F_n^m(\infty) = \frac{1}{n+1}, \qquad f_n^{*m}(\infty) = F_n^{*m}(\infty) = \frac{1}{n}$$

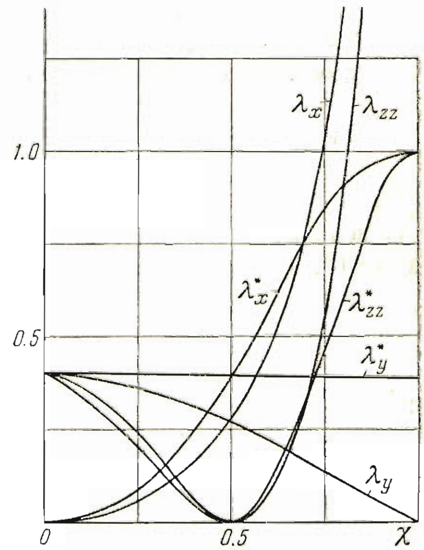
Значения коэффициентов присоединенной массы, найденные в результате приближенного расчета, по полученным в работе формулам, как для внешней, так и для внутренней задачи приведены на фиг. 4 в случае, когда экваториальная плоскость эллипсоида совпадает со свободной поверхностью, и на фиг. 5, когда экваториальная плоскость нормальна к свободной поверхности жидкости, где они даются в функции от величины

$$\chi = \frac{1}{a/b+1}$$

характеризующей удлинение эллипсоида.



Фиг. 4



Фиг. 5

В заключение следует отметить, что, используя найденные решения для внешней и внутренней задач, легко получить решение для смешанной задачи, под которой понимается горизонтальный удар эллипсоида вращения, плавающего на поверхности идеальной жидкости, заключенной в сосуд, представляющей собой эллипсоид вращения, софокусный с плавающим эллипсоидом. Однако вследствие громоздкости получающихся выражений эти результаты не приводятся.

Поступила 27 VII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1 Блох Э. Л. Горизонтальный гидродинамический удар сферы при наличии свободной поверхности жидкости, ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.

2. Ламб Г. Гидродинамика. ГИТТЛ, 1947.

3. Седов Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, № 178, 1934.

4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. И. Л., 1952.

5. Рыжик И. М. и Градштейн. Таблицы интегралов сумм и произведений. ГИТТЛ, 1951.

6. Седов Л. И. Теория плоско-параллельных движений идеальной жидкости. ГИТТЛ, 1950.