Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ИЗГИБ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

А. И. Каландия

(Тбилиси)

В работе рассматривается смешанного типа задача об изгибе нормально нагруженной тонкой упругой пластинки в виде конфокального эллиптического кольца, когда один из контуров закреплен, а другой свободен. Задача приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, дается исследование этой системы и приводится способ ее решения. Как частный случай рассматривается для такой области первая основная задача плоской теории упругости [1]. В конце приводится пример о случае постоянной нагрузки.

§ 1. Сведéние задачи к бесконечной системе алгебраических уравнений. Рассмотрим тонкую упругую изотропную пластинку в виде конфокального эллиптического кольца, находящуюся под действием нормальной нагрузки. Область пластинки будем обозначать через T, а ее внутреннюю и внешнюю границы через L_1 и L_2; большие и малые полуоси последних пусть будут a, b и b, d соответственно. Будем предполагать, что контур L_2 закреплен, а L_1 свободен. Расположим пластинку в плоскости $z = x + iy$.

Задача о нахождении прогиба точек срединной поверхности, как известно, приводит к определению двух голоморфных в области T функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ по контурным условиям

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = f_1(t) && \text{на } L_2 \\ &-\varkappa\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\,\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = f_1(t) + ic_1t + C && \text{на } L_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f_1(t)$ — заданная на полной границе пластинки функция длины дуги s, $\varkappa$ — известная действительная постоянная ($\varkappa > 1$), а c_1, C — соответственно действительная и комплексная постоянные, подлежащие определению. В дальнейшем будем предполагать, что $f_1(t)$ имеет вторую производную по дуге s, удовлетворяющую условию Липшица.

После преобразования данного кольца на круговое в плоскости ζ функцией

$$z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \qquad 2R = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{m}} \qquad (0 < m < 1) \tag{1.2}$$

контурные условия (1.1) примут вид: (1.3)

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \left(\frac{\rho^2}{\sigma} + \frac{m\sigma}{\rho^2}\right)\frac{\varphi'(\sigma)}{1 - (m/\sigma^2)} + \psi(\sigma) = f(\sigma) \qquad \text{на } \gamma_2$$

$$-\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} + \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right)\frac{\varphi'(\sigma)}{1 - (m/\sigma^2)} + \psi(\sigma) = f(\sigma) + ic\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right) + C \qquad \text{на } \gamma_1$$

причем γ_1, γ_2 — концентрические окружности на плоскости ζ радиусов соответственно 1 и ρ $(\rho > 1)$,

$$\varphi_1(z) = \varphi(\zeta), \qquad \psi_1(z) = \psi(\zeta), \qquad f_1(t) = f(\sigma)$$

$$c = c_1 R, \qquad \rho = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4mR^2}}{2R} \tag{1.4}$$

Функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ будем искать в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \qquad \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k \zeta^k \tag{1.5}$$

Следовательно $(\zeta = re^{i\vartheta})$,

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_k r^k e^{-ik\vartheta}, \qquad \varphi'(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} k a_k r^{k-1} e^{(k-1)\vartheta} \tag{1.6}$$

Положим также

$$\left(1 - \frac{m}{\sigma^2}\right) f(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A'_k e^{ik\vartheta} & \text{на } \gamma_1 \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A''_k e^{ik\vartheta} & \text{на } \gamma_2 \end{cases} \tag{1.7}$$

Внеся предыдущие ряды в (1.3), сравнивая коэффициенты при $e^{ik\vartheta}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ и исключая из полученных равенств a'_k, для определения неизвестных c, C, a_k получим следующую систему:

$$m(\varkappa + \rho^{-4})\bar{a}_{-2} + 2(1 - \rho^2) a_2 = B_0 + C \tag{1.8}$$

$$-(\varkappa + \rho^4)\bar{a}_2 + 2m(\rho^{-2} - 1) a_{-2} = B_{-2} - mC \tag{1.9}$$

$$m(\varkappa + \rho^{-2})\bar{a}_{-1} + (1 - \rho^2) a_1 - (\varkappa + \rho^2)\bar{a}_1 - m(1 - \rho^{-2}) a_{-1} = \\ = B_{-1} + i(1 - m^2)c \tag{1.10}$$

$$m(\varkappa + \rho^{-6})\bar{a}_{-3} + 3(1 - \rho^2) a_3 - (\varkappa + \rho^{-2})\bar{a}_{-1} + m(1 - \rho^{-2}) a_1 = \\ = B_1 + imc \tag{1.11}$$

$$-(\varkappa + \rho^6)\bar{a}_3 + 3m(\rho^{-2} - 1) a_{-3} + m(\varkappa + \rho^2)\bar{a}_1 - (1 - \rho^2) a_{-1} = \\ = B_{-3} - imc \tag{1.12}$$

$$m(\varkappa + \rho^{-2k})\bar{a}_{-k} + k(1 - \rho^2) a_k - (\varkappa + \rho^{-2k+4})\bar{a}_{-k+2} + m(k-2)(1 - \rho^{-2}) a_{k-2} = \\ = B_{k-2} \tag{1.13}$$

$$-(\varkappa + \rho^{2k})\bar{a}_k - mk(1 - \rho^{-2}) a_{-k} + m(\varkappa + \rho^{2k-4})\bar{a}_{k-2} - (k-2)(1 - \rho^2) a_{-k+2} = \\ = B_{-k} \qquad (k = 4, 5, \ldots) \tag{1.14}$$

$$B_k = A_k' - \rho^{-k} A_k'' \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.15}$$

Рекуррентные соотношения (1.8) — (1.14) дают возможность последовательно определить неизвестные a_{2k}, a_{-2k} посредством B_{2k}, B_{-2k} и C, а неизвестные a_{2k-1}, a_{-2k+1} $(k = 2, 3, \ldots)$ посредством B_{2k-1}, B_{-2k+1}, c и a_1, так что система эта имеет бесчисленное множество решений. Для наших же целей нам нужно будет искать лишь такие решения у системы (1.8) — (1.14), для которых ряды (1.6) будут сходящимися на γ_1 и γ_2. Ниже будет показано, что такое решение имеется и притом одно.

Положим

$$(\varkappa + \rho^{-2k})\,\bar{a}_{-k} + k\,\frac{1-\rho^2}{m}\,a_k = \Omega_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.16}$$

Тогда равенства (1.13) примут вид:

$$m\Omega_k - \Omega_{k-2} = B_{k-2} - (k-2)\,\frac{\lambda}{m}\,a_{k-2} \qquad (k = 4, 5, \ldots) \tag{1.17}$$

где

$$\lambda = (1-\rho^2)\left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \tag{1.18}$$

Рассмотрим равенства (1.17) с нечетными номерами вместе с равенством (1.11):

$$m\Omega_3 - \Omega_1 = B_1 + imc - \frac{\lambda}{m}\,a_1$$

$$m\Omega_{2k-1} - \Omega_{2k-3} = B_{2k-3} - (2k-3)\,\frac{\lambda}{m}\,a_{2k-3} \qquad (k = 3, 4, \ldots) \tag{1.19}$$

Решая предыдущую систему относительно Ω_{2k-1}, будем иметь

$$\Omega_{2k-1} = [\Omega_1 + imc]\,m^{-k+1} - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} m^{-k+s-1}(2s-1)\,a_{2s-1} + \sum_{s=1}^{k-1} m^{-k+s} B_{2s-1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots) \tag{1.20}$$

Введем в рассмотрение следующие коэффициенты Фурье:

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma^{k+1}} \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.21}$$

Тогда, как легко видеть из (1.7):

$$mA_k - A_{k-2} = B_{k-2} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots) \tag{1.22}$$

Отсюда находим

$$A_{2k-1} = A_1\,m^{-k+1} + \sum_{s=1}^{k-1} m^{-k+s} B_{2s-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Внеся это выражение в (1.20), получим

$$\Omega_{2k-1} + m^{-k}\left[\lambda \sum_{s=1}^{k-1} m^{s-1}(2s-1)\,a_{2s-1} - m\,(\Omega_1 + imc - A_1)\right] = A_{2k-1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots) \tag{1.23}$$

Так как ряд (1.5) для $\varphi(\zeta)$ должен быть сходящимся на γ_1 и γ_2, то последовательность Ω_k должна быть по крайней мере ограниченной.

Последнее требование в силу (1.23) даст (вспомним, что $0 < m < 1$)

$$m\,[\Omega_1 + imc - A_1] = \lambda \sum_{s=1}^{\infty} m^{s-1}(2s-1)\,a_{2s-1} \tag{1.24}$$

После этого упомянутые равенства примут вид:

$$\Omega_{2k-1}+\lambda m^{-k}\left[\sum_{s=1}^{k-1} m^{s-1}(2s-1)\,a_{2s-1}-A\right]=A_{2k-1} \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{1.25}$$

$$A=\sum_{s=1}^{\infty} m^{s-1}(2s-1)\,a_{2s-1} \tag{1.26}$$

Положим далее

$$(\varkappa+\rho^{2k})\overline{a}_k+mk(1-\rho^{-2})\,a_{-k}=\Omega_k^* \qquad (k=1,\,2,\ldots) \tag{1.27}$$

и равенства (1.14) перепишем в виде

$$\Omega_k^*-m\Omega_{k-2}^*=-B_{-k}-(k-2)\,\lambda a_{-k+2} \qquad (k=4,5,\ldots) \tag{1.28}$$

Рассмотрим систему уравнений из (1.10), (1.12) и (1.28) с нечетными номерами:

$$\begin{gathered}\Omega_1^*-m\Omega_1=-B_{-1}+i\,(m^2-1)\,c\\ \Omega_3^*-m\Omega_1^*=-B_{-3}+imc-\lambda a_{-1}\\ \Omega_{2k-1}^*-m\Omega_{2k-3}^*=-B_{-2k+1}-(2k-3)\,\lambda a_{-2k+3} \qquad (k=3,\,4,\ldots)\end{gathered} \tag{1.29}$$

Решая эту систему относительно Ω_{2k-1}^*, будем иметь (1.30)

$$\Omega_{2k-1}^*=m^k\left[\Omega_1+imc-\lambda\sum_{s=1}^{k-1} m^{-(s+1)}(2s-1)\,a_{-2s+1}-\sum_{s=1}^{k} m^{-s}B_{-2s+1}\right]$$

С другой стороны, из (1.22) легко получим $(k=2,\,3,\ldots)$

$$A_{-2k+1}=m^kA_1-\sum_{s=1}^{k} m^{k-s}B_{-2s+1} \qquad (k=1,\,2,\ldots)$$

Внеся это выражение в равенство (1.30) и заменяя в нем Ω_1 его значением из (1.24), получим

$$\Omega_{2k-1}^*+\lambda m^{k-1}\left[\sum_{s=1}^{k-1} m^{-s}(2s-1)\,a_{-2s+1}-A\right]=A_{-2k+1} \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{1.31}$$

Подставляя Ω_1 из (1.24) в первое равенство (1.29), получим еще

$$\Omega_1^*-\lambda A=A_{-1}-ic \tag{1.32}$$

Равенства (1.24), (1.25), (1.31), (1.32) и дают искомую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения c и a_{2k-1} $(k=0,\pm\,1,\ldots)$. Согласно (1.16) и (1.27) она запишется так:

$$\begin{gathered}(\varkappa+\rho^2)\,\overline{a}_1+m\,(1-\rho^{-2})\,a_{-1}-\lambda A=A_{-1}-ic\\ m\,(\varkappa+\rho^{-2})\,\overline{a}_{-1}+(1-\rho^2)\,a_1-\lambda A=m\,(A_1-imc)\end{gathered} \tag{1.33}$$

$$(\varkappa+\rho^{4k-2})\,\overline{a}_{2k-1}+(2k-1)\,m\,(1-\rho^{-2})\,a_{-2k+1}+$$
$$+\lambda m^{k-1}\left[\sum_{s=1}^{k-1} m^{-s}(2s-1)\,a_{-2s+1}-A\right]=A_{-2k+1} \qquad (k=2,\,3,\ldots)$$

$$(\varkappa+\rho^{-4k+2})\,\overline{a}_{-2k+1}+(2k-1)\,\frac{1-\rho^2}{m}\,a_{2k-1}+$$
$$+\lambda m^{-k}\left[\sum_{s=1}^{k-1} m^{s-1}(2s-1)\,a_{2s-1}-A\right]=A_{2k-1}$$

Рассматривая равенства (1.17) и (1.28) с четными номерами вместе с (1.8) и (1.9) соответственно, мы получим совершенно аналогичным рассуждением следующую систему относительно C и a_{2k} $(k = \pm 1, \ldots)$

$$C - \lambda B = A_0$$

$$(\varkappa + \rho^{4k})\,\overline{a}_{2k} + 2mk(1-\rho^{-2})\,a_{-2k} + \lambda m^k \left[2\sum_{s=1}^{k-1} m^{-(s+1)} s a_{-2s} - B\right] = A_{-2k}$$

$$(\varkappa + \rho^{-4k})\,\overline{a}_{-2k} + 2k\,\frac{1-\rho^2}{m}\,a_{2k} + \tag{1.34}$$

$$+ \lambda m^{-k}\left[2\sum_{s=1}^{k-1} m^{s-1} s a_{2s} - B\right] = A_{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

где

$$B = 2\sum_{s=1}^{\infty} m^{s-1} s a_{2s}$$

§ 2. Исследование систем алгебраических уравнений. Ниже будет доказано, что система (1.33), (1.34) имеет и притом единственное такое решение c, C, a_k $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, которое дает абсолютно и равномерно сходящиеся ряды для $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, и, следовательно, будет решением рассматриваемой краевой задачи[1]. Будет также указан способ решения этой системы.

Исключая из (1.33) a_{-2k+1}, получим систему относительно c и a_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$ вида:

$$\left[\varkappa + \rho^2 + \frac{(1-\rho^2)^2}{1+\varkappa\rho^2}\right] a_1 - \frac{\lambda(1-\rho^2)}{1+\varkappa\rho^2} A - \lambda \overline{A} + i\left[\frac{m^2(1-\rho^2)^2}{1+\varkappa\rho^2} - 1\right] c = \overset{*}{\overline{A}}_{1-}$$

$$\left[\varkappa + \rho^{4k-2} + \frac{(2k-1)^2 \alpha\beta}{\varkappa + \rho^{-4k+2}}\right] a_{2k-1} + \frac{(2k-1)\,\alpha\lambda}{\varkappa + \rho^{-4k+2}}\, m^{-k}\left[\sum_{s=1}^{k-1} m^{s-1}(2s-1) a_{2s-1} - A\right] -$$

$$- \lambda\beta \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-s-1}(2s-1)^2}{\varkappa + \rho^{-4s+2}}\, a_{2s-1} - \lambda^2 \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-2s-1}(2s-1)}{\varkappa + \rho^{-4s+2}} \times$$

$$\times \left[\sum_{\nu=1}^{s-1} m^{\nu-1}(2\nu-1)\, a_{2\nu-1} - A\right] - \lambda m^{k-1}\left[\overline{A} + \frac{ic}{\varkappa + \rho^{-2}}\right] = \overset{*}{A}_{-2k+1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

где

$$\alpha = -m(1-\rho^{-2}), \qquad \beta = \frac{1-\rho^2}{m} \tag{2.2}$$

$$\overset{*}{A}_{-2k+1} = \overline{A}_{-2k+1} + \frac{(2k-1)\,\alpha}{\varkappa + \rho^{-4k+2}}\, A_{2k-1} - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-s-1}(2s-1)}{\varkappa + \rho^{-4s+2}}\, A_{2s-1} \quad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

Ввиду того, что коэффициент при a_{2k-1} в равенствах предыдущей системы значительно превалирует над остальными при возрастании номе-

[1] После того как доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, аналогичное утверждение относительно ряда для $(1 - m\zeta^{-2})\,\psi(\zeta)$ непосредственно следует из краевых условий (1.3).

ра, то нетрудно установить порядок роста неизвестных в этой системе, если заранее предположить, что рассматриваемое решение ограничено.

Пусть c, a_{2k-1} $(k=1, 2, \ldots)$ — некоторое ограниченное решение системы (2.1). Положим

$$p_k = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-s-1}(2s-1)^2}{\varkappa - \rho^{-4s+2}} \, |a_{2s-1}|, \qquad q_k = (2k-1)\, m^{-k} \sum_{s=k}^{\infty} m^{s-1}(2s-1)|a_{2s-1}|$$

$$r_k = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-2s-1}(2s-1)}{\varkappa + \rho^{-4s+2}} \sum_{\nu=s}^{\infty} m^{\nu-1}(2\nu-1)\, |a_{2\nu-1}| \tag{2.4}$$

$$P_k = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-s-1}(2s-1)}{\varkappa + \rho^{-4s+2}} \, |A_{2s-1}| \tag{2.5}$$

легко видеть, что

$$p_k < Mk^2, \quad q_k < Mk^2, \quad r_k < Mk^2, \quad M = \mathrm{const} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Заметим теперь, что согласно нашему предположению относительно $f_1(t)$ для коэффициентов (1.21) будем иметь неравенства вида:

$$|A_k| < \frac{M}{k^3}, \qquad |\rho^{-k} A_{-k}| < \frac{M}{k^3} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

На основании этого имеем

$$P_k < \frac{M}{(k-1)^2} \left[1 + \left(\frac{k-1}{k-2}\right)^2 m + \left(\frac{k-1}{k-3}\right)^2 m^2 + \cdots + (k-1)^2 m^{k-2}\right]$$

и, значит [5],

$$P_k < \frac{M}{k^2} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

При помощи оценок (2.6), (2.7) и (2.8), если принять также во внимание равенство (1.26), из (2.1) находим

$$|\rho^{2k-1} a_{2k-1}| < \frac{M}{k^3} \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

Используя предыдущее неравенство и (2.7), из последнего равенства (1.33) находим также

$$|a_{-2k+1}| < \frac{M}{k^3} \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

Аналогичное рассуждение применительно к системе (1.34) даст, очевидно, такие же неравенства для ее решения a_{2k} $(k=\pm 1, \ldots)$, если попрежнему предположить, что последовательность a_{2k} ограничена.

Следовательно, если c, a_k $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$—некоторое решение системы (1.33), (1.34) такое, что последовательность a_1, a_2, ... ограничена, то

$$|\rho^k a_k| < \frac{M}{k^3}, \qquad |a_{-k}| < \frac{M}{k^3} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

Так как при условии (2.9) ряды (1.6) равномерно и абсолютно сходятся при $1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho$, то приведенное в начале параграфа утверждение относительно системы (1.33), (1.34) сводится к доказательству того, что система уравнений (2.1) (и аналогичная ей система, получаемая из (1.34)) имеет ограниченное решение. Последнее же утверждение без труда следует из теории квазирегулярных систем [6], если воспользоваться доказанным выше свойством решений системы (1.33), (1.34) и теоремой единственности решения рассматриваемой краевой задачи[1]. Таким образом, при условии (2.7) система уравнений (1.33), (1.34) имеет и притом единственное решение, обладающее свойством (2.9).

Перейдем к решению системы (2.1). Введем новые неизвестные b_k формулой

$$ka_k = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

и перепишем систему (2.1) в виде

$$\left[\varkappa + \rho^2 + \frac{(1-\rho^2)^2}{1+\varkappa\rho^2}\right] b_1 = \frac{\lambda(1-\rho^2)}{1+\varkappa\rho^2} A + \lambda\bar{A} + i\left[1 - \frac{m^2(1-\rho^2)}{1+\varkappa\rho^2}\right] c + A_{-1}^*$$

$$\gamma^*\left[\frac{\varkappa+\rho^{4k-2}}{2k-1} + \frac{(2k-1)(1-\rho^2)^2}{\rho^2(\varkappa+\rho^{-4k+2})}\right] b_{2k-1} + \left[\frac{2k-1}{\rho^2(\varkappa+\rho^{-4k+2})} - \frac{2k-3}{\varkappa+\rho^{-4k+6}}\right] b_{2k-3} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{k-2} m^{k-s-1}\left[\frac{(2k-1)\, m^{-2(k-s-1)}}{\rho^2(\varkappa+\rho^{-4k+2})} - \frac{2s-1}{\varkappa+\rho^{-4s+2}} - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \sum_{\nu=s}^{k-2} \frac{m^{-2(\nu-s+1)}(2\nu+1)}{\varkappa+\rho^{-2(2\nu+1)}}\right] b_{2s-1} = \left[\frac{(2k-1)\, m^{-k+2}}{\rho^2(\varkappa+\rho^{-4k+2})} - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-2s}(2s-1)}{\varkappa+\rho^{-4s+2}}\right] A + \frac{m^k}{1-\rho^2}\bar{A} + \frac{im^k c}{(1-\rho^2)(\varkappa+\rho^{-2})} + \lambda^* A_{-2k+1}^*$$

$$\lambda^* = \frac{m\rho^2}{(1-\rho^2)^2(\rho^2-m^2)} \qquad (k = 2, \ldots) \tag{2.11}$$

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} m^{s-1} b_{2s-1} \tag{2.12}$$

Если бы постоянные c и A были известны заранее, то предыдущая система, будучи треугольной относительно b_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$, дала бы возможность последовательно определить все b_{2k-1}, так как коэффициенты при последних отличны от нуля для любого k. В рассматриваемом же случае решение можно получить следующим образом.

Пренебрегая временно зависимостью (2.12), решим систему (2.1) при правых частях соответственно

$$\begin{array}{llll} A = \bar{A} = c = 0, & \bar{A} = c = \bar{A}_{-2k+1}^* = 0, & A = 1 & \\ A = c = A_{-2k+1}^* = 0, & \bar{A} = 1; & A = \bar{A} = A_{-2k+1}^* = 0, \quad c = 1 & (k=1, 2, \ldots) \end{array}$$

Пусть эти решения будут соответственно $b_{2k-1}^{(0)}$, $b_{2k-1}^{(1)}$, $b_{2k-1}^{(2)}$, $ib_{2k-1}^{(3)}$. Очевидно, что $b_{2k-1}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ — вещественные числа.

---

[1] Легко убедиться, что система уравнений (2.1) (и аналогичная ей система) квазирегулярная. В самом деле, для этого достаточно заметить, что неравенства (2.6) остаются верными, если в правых частях (2.4) положить $a_{2s-1} = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Тогда решение b_{2k-1} системы (2.11), очевидно, будет иметь вид:

$$b_{2k-1} = b_{2k-1}^{(0)} + A b_{2k-1}^{(1)} + \overline{A} b_{2k-1}^{(2)} + ic b_{2k-1}^{(3)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

Помножая эти равенства на m^{k-1}, суммируя по k от 1 до ∞ [1] и принимая во внимание (2.12), будем иметь (2.14)

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k-1}^{(0)} + A \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k-1}^{(1)} + \overline{A} \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k-1}^{(2)} + ic \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k-1}^{(3)}$$

Ввиду того что неизвестную b_1 можно без ограничения общности считать вещественной величиной, предыдущее равенство вместе с равенством (2.13) при $k = 1$ (или, что все равно, с первым равенством (2.11)) дает полную систему для определения b_1, c и A. Разрешимость этой системы вытекает из единственности решения нашей краевой задачи.

Определив таким образом b_1, c и A, из (2.13) найдем неизвестные b_{2k-1} $(k = 2, \ldots)$, после чего a_{-2k+1} находятся из вторых равенств (1.33).

Аналогичная (2.11) система уравнений для определения неизвестных b_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет вид:

$$\lambda^* \left[\frac{\varkappa + \rho^{4k}}{2k} + \frac{2k(1-\rho^2)^2}{\rho^2(\varkappa + \rho^{-4k})} \right] b_{2k} + \left[\frac{2k}{\rho^2(\varkappa + \rho^{-4k})} - \frac{2(k-1)}{\varkappa + \rho^{-4k+4}} \right] b_{2k-2} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{k-2} m^{k-s-1} \left[\frac{2km^{-2(k-s-1)}}{\rho^2(\varkappa + \rho^{-4k})} - \frac{2s}{\varkappa + \rho^{-4s}} - \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \sum_{\nu=s}^{k-2} \frac{m^{-2(\nu-s+1)} 2(\nu+1)}{\varkappa + \rho^{-4(\nu+1)}} \right] b_{2s} =$$
$$= \left[\frac{2km^{-k+2}}{\rho^2(\varkappa + \rho^{-4k})} - \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-2s}\, 2s}{\varkappa + \rho^{-4s}} \right] B + \frac{m^{k+1}}{1-\rho^2} \overline{B} + \lambda^* A_{-2k}^*$$
$$(k = 1, 2, \ldots) \tag{2.15}$$

$$A_{-2k}^* = \overline{A}_{-2k} + \frac{2k\alpha}{\varkappa + \rho^{-4k}} A_{2k} - 2\lambda \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{k-s-1} s}{\varkappa + \rho^{-4s}} A_{2s} \tag{2.16}$$

$$B = 2 \sum_{s=1}^{\infty} m^{s-1} b_{2s} \tag{2.17}$$

Решая, как и выше, треугольную систему вида (2.15) при специальных правых частях, представим решение этой системы следующим образом:

$$b_{2k} = b_{2k}^{(0)} + B b_{2k}^{(1)} + \overline{B} b_{2k}^{(2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.18}$$

Отсюда аналогично предыдущему находим равенство

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k}^{(0)} + B \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k}^{(1)} + \overline{B} \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} b_{2k}^{(2)} \tag{2.19}$$

определяющее постоянную B. Зная B, найдем из (2.18) все b_{2k}. Остальные неизвестные C, a_{-2k} сразу определяются посредством B, a_{2k} из соответствующих равенств (1.34).

---

[1] Легко заметить, что соответствующие ряды будут абсолютно сходящимися.

После того как найдено решение систем (1.33), (1.34), коэффициенты a_k' разложения функции $(1-m\zeta^{-2})\psi(\zeta)$ определяются непосредственно из контурных условий (1.3); подставляя ряды (1.5), (1.6), (1.7) в первое условие (1.3) и сравнивая коэффициенты при $e^{ik\vartheta}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, будем иметь

$$\overline{a}_{-k}\rho^{-2k} - m\overline{a}_{-k-2}\rho^{-2(k+2)} + (k+2)\rho^2 a_{k+2} + \frac{m}{\rho^2} k a_k + a_k' = \rho^{-k} A_k''$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.20}$$

Эти равенства однозначно определяют все a_k', если зафиксировать[1] a_0. Как видно из предыдущего, все неизвестные рассматриваемой задачи определяются посредством решений систем треугольного вида (2.11) и (2.15).

Вернемся теперь к системе (2.11). Ниже мы увидим, что указанный выше способ построения ее решения допускает при практическом ее решении значительное упрощение.

Запишем (2.11) в виде

$$\left[\frac{\varkappa + \rho^{4k-2}}{2k-1} + \frac{(2k-1)(1-\rho^2)^2}{\rho^2(\varkappa + \rho^{4k+2})}\right] b_{2k-1} +$$
$$+ F_{2k-1}(b_1, b_3, \cdots b_{2k-3}, c, A) = A^*_{-2k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.21}$$

На основании первого неравенства (2.9), характеризующего порядок роста ограниченного решения системы (2.11), нетрудно установить следующие оценки для правых частей (2.4):

$$p_k, r_k < \begin{cases} M m^k & \text{при } m\rho^2 > 1 \\ \dfrac{M}{k}\rho^{-2k} & \text{при } m\rho^2 < 1 \\ M\rho^{-2k}\ln k & \text{при } m\rho^2 = 1 \end{cases}$$

$$q_k < \frac{M}{k}\rho^{-2k} \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

В силу этих неравенств, очевидно, будем иметь

$$|F_{2k-1}(b_1, \cdots, b_{2k-3}, c, A)| < M m_0^k \ln k$$
$$m_0 = \max\left\{m, \frac{1}{\rho^2}\right\} \quad (k = 2, 3, \cdots) \tag{2.22}$$

С другой стороны, неравенства (2.6), (2.7) и (2.8) дают

$$\left|\left[\frac{\varkappa + \rho^{4k-2}}{2k-1} + \frac{(2k-1)(1-\rho^2)^2}{\rho^2(\varkappa + \rho^{-4k+2})}\right] b_{2k-1}\right| < \frac{M}{k^3}\rho^{2k}$$

$$|A^*_{-2k+1}| < \frac{M}{k^3}\rho^{2k} \quad (k = 2, 3, \cdots) \tag{2.23}$$

[1] В подобных случаях, после того как найдена функция $\varphi(\zeta)$, бывает иногда целесообразнее установить функцию $\psi(\zeta)$ из контурных условий посредством интеграла Коши. Этим путем нетрудно в нашем случае выразить коэффициенты разложения функции $\psi(\zeta)$ через a_k, a_{-k}, A, B, A_k $(k = 0, \pm 1, \cdots)$.

Предыдущие оценки дают возможность заменить равенства (2.21), начиная с некоторого дастаточно большого N, следующими[1]:

$$\left[\frac{\varkappa+\rho^{4k-2}}{2k-1}+\frac{(2k-1)(1-\rho^2)^2}{\rho^2(\varkappa+\rho^{-4k+2})}\right]b_{2k-1}=\overset{*}{A}_{-2k+1}\qquad(k=\mathrm{N},\mathrm{N}+1,\cdots)\tag{2.24}$$

Упрощенная таким образом система, состоящая из первых $N-1$ уравнений (2.11) и равенств (2.24), допускает решение в конечном виде. Здесь фактически приходится решать лишь конечную систему треугольного вида. Равенства (2.13), начиная с $k=N$, совпадут с (2.24).

Все сказанное выше относительно системы (2.11) относится в равной степени и к системе (2.15). Тем самым заканчивается решение задачи.

Если в (1.1) положить $\varkappa=-1$, $c_1=0$, то получим для рассматриваемой области первую основную задачу плоской теории упругости[2]. Разумеется, системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений (1.6) получатся здесь из соответствующих систем рассмотренного случая заменой в них $\varkappa=-1$, $c=0$.

Первое уравнение (2.11) будет иметь вид:

$$-\lambda\,[A+\overline{A}]=\overline{A}_{-1}+mA_1\tag{2.25}$$

Для возможности последнего необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{Im}\{\overline{A}_{-1}+mA_1\}=0$$

означающее, как легко видеть, равенство нулю главного момента всех внешних усилий.

В рассматриваемом случае равенства (2.13) примут вид:

$$b_{2k-1}=b_{2k-1}^{(0)}+Ab_{2k-1}^{(1)}+\overline{A}b_{2k-1}^{(2)}\qquad(k=2,3,\cdots)$$

причем, как и прежде, $b_{2k-1}^{(1)}$, $b_{2k-1}^{(2)}$ — действительные числа. Помножая эти равенства на m^{k-1} и суммируя, получим на основании (2.12)

$$A-b_1=\sum_{k=2}^{\infty}m^{k-1}b_{2k-1}^{(0)}+A\sum_{k=2}^{\infty}m^{k-1}b_{2k-1}^{(1)}+\overline{A}\sum_{k=2}^{\infty}m^{k-1}b_{2k-1}^{(2)}\tag{2.26}$$

---

[1] Такое упрощение нашей системы означает, что в неизвестных b_{2k-1}, начиная с некоторого номера, мы пренебрегаем величинами порядка $km_0{}^k\rho^{-4k}\ln k$.

Напомним, что при наличии (2.7) решение b_{2k-1} системы (2.11) может при возрастании k иметь порядок малости не выше, чем $k^{-2}\rho^{2k}$. Разумеется, то же самое можно сказать и о решении (2.24).

[2] В названной выше работе [1] автор приводит задачу несколько иным путем (комбинированием метода рядов с методом Н. И. Мусхелишвили) к бесконечной системе алгебраических уравнений, содержащих одновременно коэффициенты $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Не касаясь исследования полученной системы (что, повидимому, было бы затруднительным ввиду сложности ее структуры), автор предлагает усеченную систему для приближенного решения, опираясь при этом на теорему существования рассматриваемой краевой задачи. Как видно из приведенного автором расчета напряжений в одном частном случае, таким путем можно получить решение, довольно близкое к истинному. Однако нам кажется, что если ограничиться лишь нахождением приближенного решения задачи, то проще всего исходить из соответствующей (1.8) — (1.14) системы, получаемой непосредственно в результате подстановки рядов для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в контурные условия.

В виду того, что b_1 — вещественная величина, равенства (2.25), (2.26) однозначно определяют b_1 и A. После этого a_{-2k+1} $(k=1,2,\cdots)$ определятся из соответствующих равенств системы (1.33), первые два равенства которой в силу (2.25) будут тождественными.

Далее нужно еще показать, что первые коэффициенты в равенствах (2.11), (2.15), т. е. выражение вида (с точностью до постоянного множителя)

$$\frac{1-\rho^{2k}}{k}+\frac{k(1-\rho^2)^2}{\rho^2(1-\rho^{2k})} \qquad (k=2,3,\cdots)$$

отлично от нуля при $\rho>1$. Но это доказывается совершенно так же, как одно аналогичное утверждение Н. И. Мусхелишвили ([2], стр. 210).

Все остальное остается без изменения.

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка $p(x, y)$, распределенная по поверхности пластинки, постоянная. Тогда функция

$$w(z, \bar{z})=\frac{p}{64D}z^2\bar{z}^2 \qquad (2.27)$$

(где D — цилиндрическая жесткость) будет частным решением уравнения изгиба. Поэтому для прогиба точек срединной поверхности $u(x, y)$ получим:

$$u(x, y)=\bar{z}\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0(z)}+\chi_0(z)+\overline{\chi_0(z)}+w(\bar{z}, z)$$

Здесь $\varphi_0(z)$, $\chi_0(z)$ — аналитические функции от z в данной области, характеризующие упругое равновесие пластинки.

Положим

$$G(u)=-D\{\mu\Delta u+(1-\mu)[u_{xx}\cos^2\theta+u_{yy}\sin^2\theta+2u_{xy}\cos\theta\sin\theta]\}$$

$$H(u)=D\left\{\frac{d\Delta u}{d\nu}+(1-\mu)\frac{d}{ds}[(u_{yy}-u_{xx})\cos\theta\sin\theta+u_{xy}\cos 2\theta]\right\}$$

(на L; $L=L_1+L_2$)

Здесь ν — внешняя нормаль к контуру, Δ — оператор Лапласа, μ — коэффициент Пуассона, θ — угол между ν и осью x.

Контурные условия задачи (1.1) в функциях φ_0, ψ_0 запишутся в виде

$$\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=f_0(t) \qquad \text{на } L_2$$

$$-\varkappa\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=f_0(t)+ic_1\bar{t}+C \qquad \text{на } L_1 \qquad (2.28)$$

где

$$\psi_0(z)=\chi_0'(z)$$

$$f_0(t)=-\frac{\partial w}{\partial t} \text{ на } L_2,$$

$$f_0(t)=-\frac{1}{2D(1-\mu)}\int^{\bar{t}}\left[G(w)+i\int^{s}H(w)\,ds_1\right]\overline{dt} \qquad \text{на } L_1$$

Отсюда нетрудно заключить, что функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ имеют вид [3]

$$\varphi_0(z)=-\frac{1}{16D}\frac{1+m}{1-m}pb^2\left[\ln(1-m)+\ln\frac{z}{b}\right]z+\varphi_1(z), \quad \psi_0(z)=\psi_1(z) \qquad (2.29)$$

где $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ — голоморфные функции в данной области.

Внося (2.27), (2.29) в (2.28) и заменяя t по формуле (1.2), получим для правых частей (1.3) следующие выражения:

$$f(\sigma) = \frac{1}{32(1-m)^2}\left\{2(1+m)\left[\left(\frac{m\sigma}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{\sigma}\right)\left(1+2\ln\rho+\ln\left(1+\frac{m}{\sigma^2}\right)\left(1+\frac{m\sigma^2}{\rho^4}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-m}\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)\left(\frac{m\sigma}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{\sigma}\right)^2\right\}\frac{pb^3}{D} \qquad \text{на } \gamma_2$$

$$f(\sigma) = \frac{1}{16(1-m)^2}\left\{(1+m)\left(m\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)\left[1+\ln\left(1+\frac{m}{\sigma^2}\right)-\varkappa\ln(1+m\sigma^2)\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{1-m}\left[\frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{m^2\sigma^3}{3}+m^3\sigma+\frac{1}{\sigma}+\frac{m}{3\sigma^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m^2\sigma^3}{3}+(2m-m^3)\sigma+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{2m^2-1}{\sigma}+\frac{m}{3\sigma^3}\right)-\frac{4(1-m^2)}{1-\mu}\left(m\sigma-\frac{1}{\sigma}\right)\right]\right\}\frac{pb^3}{D} \qquad \text{на } \gamma_1 \qquad (2.30)$$

Разлагая (2.30) в ряды по степеням σ, получим по формуле (1.21) коэффициенты A_k $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

По изложенному выше искомые c, a_k нужно определить из системы (2.11), (2.15), после чего находятся и все остальные неизвестные. Как видно из (2.30), в нашем случае $A_{2k} = A_{2k}' = A_{2k}'' = 0$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ и поэтому $C = 0$, $a_{2k} = a_{2k}' = 0$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$. Кроме того, так как все A_k вещественные, то $c = 0$, $A = \bar{A}$, и система (2.11) упрощается.

Таким путем было проведено вычисление для кольца $a/b = d/b = 2$, причем в системе (2.11) были удержаны четыре первых уравнения; коэффициенты a_k, a_k' $(k = \pm 8, \pm 9, \cdots)$ были отброшены. В рассматриваемом здесь примере $m = {}^1/_3$, $\rho^2 = (11 + 4\sqrt{7})/9$. Кроме того, было принято $\mu = {}^1/_3$.

В результате этих вычислений для изгибающего момента G по контуру пластинки, имеющего в функциях $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ вид:

$$G(u) = \mathrm{Re}\left\{2(1-\mu)\frac{d}{dt}\left[-\varkappa\varphi_0(t)+t\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{p}{8}\left[(1+\mu)\,t\bar{t}-\frac{1-\mu}{2}\bar{t}^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right]\right\}$$

получаются на вершинах L_1 и L_2 следующие значения (в pb^2):

$$G = 0.0066 \quad \text{при } t = a, \qquad G = 0.0030 \quad \text{при } t = ib$$

$$G = -0.2000 \quad \text{при } t = l, \qquad G = -0.3681 \quad \text{при } t = id$$

Аналогично решается задача в случае, когда рассматриваемая область представляет собой круг с эксцентрическим круговым отверстием.

Поступила 18 VI 1953 Математический институт АН Груз. ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ, Т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М. — Л., 1949.
3. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теоремой изгиба тонких плит. ПММ, т. II, вып. 2, 1938.
4. Векуа И. Н. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщения АН Груз. ССР, т. III, № 7, 1942.
5. Каландия А. И. Решение некоторых задач об изгибе упругой пластинки. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
6. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л. — М., 1949.