Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВЯЗИ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ОДНИМ ОСОБЫМ СЛУЧАЕМ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ

Д. И. Шерман
(Москва)

Нахождение двух гармонических в некоторой области функций по заданным граничным значениям суммы и разности их разноименных и соответственно различных производных (при нулевых свободных членах эти предельные равенства приводятся к условиям Коши — Римана) является вырожденным и в то же время особым случаем задачи Пуанкаре, не укладывающимся в рамки ее обычной трактовки. Названная задача принципиально не приводима к эквивалентному уравнению Фредгольма. С другой стороны, насколько нам известно, существующие многообразные приемы сведéния к уравнению Фредгольма различных краевых задач зиждутся, как правило, на принципе сохранения взаимной эквивалентности, либо по крайней мере таковы, что уравнение Фредгольма вбирает в себя в числе прочих все решения отвечающей ей по замыслу краевой задачи. В связи с этим любопытно выяснить, возможно ли каким-либо обходным путем построить интегральное уравнение, имеющее единственное решение, совпадающее с некоторым решением (если только оно существует) интересующей нас задачи. На поставленный вопрос, как на первый взгляд ни кажется странным, удается ответить в положительном смысле. В настоящей заметке и будет показано, каким образом при помощи уравнения Фредгольма для хорошо изученной основной статической задачи теории упругости может быть (при несколько модифицированном процессе его построения) получено в том случае, когда таковое имеется, некоторое решение упомянутой особой задачи теории потенциала. Это обстоятельство позволяет думать, что, поступая таким же образом, можно прийти к положительному результату и в ряде других аналогичных случаев [1].

Приведение к уравнению Фредгольма основной плоской статической задачи здесь дается, исходя из представления для вектора смещения, отличного от общепринятого и внешне сходного с обычно используемым в динамической теории упругости.

§ 1. Предположим, что упругая изотропная и однородная среда заполняет в плоскости $z = x + iy$ конечную многосвязную область S, ограниченную контуром L, состоящим из совокупности не имеющих общих точек простых замкнутых кривых L_j $(j=0, 1,\ldots, m)$; из них пусть L_0 — внешняя граница области, охватывающая все внутренние границы L_j $(j=1,\ldots, m)$. За начало координат возьмем точку, принадлежащую S. Односвязные области, ограниченные отдельными кривыми L_j, обозначим через S_j $(j=0, 1,\ldots, m)$. При этом, очевидно, область S_0 является бесконечной, а остальные — S_j $(j=1,\ldots, m)$ конечными. Обход контура L условимся вести в положительном направлении относительно S. Наконец, будем считать, что координаты точек каждой из кривых L_j имеют требуемое число производных по дуге s.

---

[1] Одна из наиболее важных особых задач теории потенциала (не сводящаяся к исследуемой частной задаче) в достаточно общей постановке изучена И. Н. Векуа [1].

В статье [2] было построено и подробно изучено интегральное уравнение Фредгольма для так называемой второй основной задачи теории упругости, когда на границе заданы компоненты вектора смещения.

К этому же уравнению можно прийти, поступая иным образом, как увидим, непосредственно приводящим к интересующему нас результату.

Компоненты смещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по координатным осям x и y будем искать в виде

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — некоторые функции; они определяются по известным в области S составляющим $u(x, y)$ и $v(x, y)$ с точностью до любых сопряженных между собой [при отрицательном знаке, приписанном $\psi(x, y)$] гармонических функций; от последних мы здесь отвлекаемся.

Уравнения равновесия в перемещениях вместе с (1.1), как нетрудно проверить, дают

$$\begin{aligned} &\Delta\left\{(\varkappa+1)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\varkappa-1)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\} = 0 \\ &\Delta\left\{(\varkappa+1)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - (\varkappa-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} = 0 \end{aligned} \qquad \left(\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right) \tag{1.2}$$

где λ и μ — упругие постоянные.

Возьмем $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в форме следующих потенциалов, удовлетворяющих (1.2) (они не лежат, вообще говоря, в классе гармонических функций):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int\limits_L \{\nu_1(s) K_{11}(x, y; s) + \nu_2(s) K_{21}(x, y; s)\}\, ds + \\ &\qquad + \frac{(\varkappa-1)}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} A_j \chi_j(z, \bar z) \\ \psi(x, y) &= \int\limits_L \{\nu_1(s) K_{12}(x, y; s) + \nu_2(s) K_{22}(x, y; s)\}\, ds + \\ &\qquad + \frac{(\varkappa+1)}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} i A_j \chi_j(z, \bar z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\nu_1(s)$ и $\nu_2(s)$ — плотности, подлежащие определению, и введены обозначения

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{\pi}\{kp(x, y; s) - (1-k)\cos(n, \xi)\ln r\} \\ K_{21} &= \frac{1}{\pi}\{kq(x, y; s) - (1-k)\cos(n, \eta)\ln r\} \\ K_{12} &= \frac{1}{\pi}\{(1-k)\, q(x, y; s) - k\cos(n, \eta)\ln r\} \\ K_{22} &= \frac{1}{\pi}\{-(1-k)\, p(x, y; s) + k\cos(n, \xi)\ln r\} \\ \chi_j &= \bar z\{\ln(z - z_j) + \ln(\bar z - \bar z_j)\} - \bar z_j \ln(\bar z - \bar z_j) - \bar z, \\ r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$p(x, y; s) = (x-\xi)\frac{\partial \ln r}{\partial n}, \quad q(x, y; s) = (y-\eta)\frac{\partial \ln r}{\partial n}, \quad A_j = \int\limits_{L_j} \omega(t)\, ds$$

При этом $t = \xi + i\eta$ — аффикс точки контура L и n — нормаль к нему, направленная в область, внешнюю к S; точка z_j произвольно фиксируется в области S, и постоянная $k = \varkappa - 1/2\varkappa$; далее $\nu(t) = \nu_1(s) + i\nu_2(s)$ и для удобства положено $\nu(t) = \varkappa\omega(t)$.

На основании формул (1.1) и (1.3) после элементарных преобразований получим

$$u + iv = \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \omega(t)\, d\ln\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega(t)}\, d\,\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\left[\varkappa A_j\{\ln(z-z_j) + \ln(\bar{z}-\bar{z}_j)\} - \bar{A}_j\frac{z}{\bar{z}-\bar{z}_j}\right] \tag{1.5}$$

Пусть на полной границе L вектор смещения $u + iv$ равен известной функции дуги $f(t)$, удовлетворяющей условию Гельдера. В этом случае, переходя в (1.5) к пределу $z \to t_0$, где t_0 — аффикс точки L, получим для определения $\omega(t)$ уравнение Фредгольма

$$\varkappa\omega(t_0) + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int \omega(t)\, d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega(t)}\, d\,\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\left[\varkappa A_j\{\ln(t_0-z_j) + \ln(\bar{t}_0-\bar{z}_j)\} - \bar{A}_j\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right] = f(t_0) \tag{1.6}$$

Оно точно совпадает с уравнением, содержащимся в упомянутой статье. В ней доказано, что это уравнение всегда имеет единственное решение.

При помощи аналитических в области S функций

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-z}\, dt + \sum_{j=1}^{m} A_j \ln(z-z_j)$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varkappa\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t)}{t-z}\, dt - \sum_{j=1}^{m}\varkappa\bar{A}_j\ln(z-z_j) \tag{1.7}$$

уравнение (1.6) записывается так:

$$\varkappa\Phi(t_0) - t_0\overline{\Phi'(t_0)} - \overline{\Psi(t_0)} = f(t_0) \tag{1.8}$$

При изучении основной задачи теории упругости, о которой шла здесь речь, обычно принято исходить из записи граничных условий [3] в форме (1.8).

§ 2. Перейдем теперь к задаче (представляется естественным называть ее особым случаем задачи Пуанкаре) об отыскании гармонических в области S функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ с непрерывными частными производными первого порядка вплоть до границы L, при следующих на ней условиях:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = f_1(s), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = f_2(s) \tag{2.1}$$

где $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — заданные функции дуги, непрерывные в смысле Гельдера.

Пусть $\Omega_1(x, y)$ и $\Omega_2(x, y)$ — гармонические в той же области S функции, принимающие на L соответственно значения $f_1(s)$ и $f_2(s)$. Тогда в силу (2.1) будем иметь в области S

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\Omega_1(x, y), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\Omega_2(x, y) \tag{2.2}$$

Последние же равенства дают

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\Omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}=0 \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что для того чтобы существовало решение поставленной задачи, функция $F(z)=\Omega_1-i\Omega_2$ должна быть однозначной и регулярной в S. Сейчас мы увидим, что это условие является не только необходимым, но и достаточным. В самом деле, допустим, что вещественная и мнимая части свободного члена в (1.8) совпадают со значениями правых частей равенств (2.1). В этом случае, полагая

$$T(z)=\Psi(z)+F(z)$$

[при соблюдении условий (2.3)] придадим предельному соотношению (1.8) вид:

$$\varkappa\Phi(t)-t\overline{\Phi'(t)}-\overline{T(t)}=0 \tag{2.4}$$

Из него на основании теоремы единственности вытекает, что

$$\Phi(z)=C_1, \qquad T(z)=\varkappa\overline{C}_1, \qquad A_j=0 \qquad (j=1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

где $C_1=C_1^{(1)}+iC_1^{(2)}$ — некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная. Первое из этих равенств по отделении вещественной и мнимой частей приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_L\left\{\nu_1(s)\frac{\partial\ln r}{\partial n}+\nu_2(s)\frac{\partial\ln r}{\partial s}\right\}ds=\varkappa C_1^{(1)}\\ \frac{1}{\pi}\int_L\left\{\nu_1(s)\frac{\partial\ln r}{\partial s}-\nu_2(s)\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right\}ds=\varkappa C_1^{(2)}\end{aligned} \tag{2.6}$$

Далее, учитывая третье из равенств (2.5), возьмем оператор Лапласа от выражений (1.3). Будем иметь

$$\begin{aligned}\triangle\varphi(x, y)=\frac{k}{\pi}\int_L\left\{\nu_1(s)\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\ln r}{dn}+\nu_2(s)\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\ln r}{dn}\right\}ds\\ \triangle\psi(x, y)=\frac{(1-k)}{\pi}\int_L\left\{\nu_1(s)\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\ln r}{dn}-\nu_2(s)\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\ln r}{dn}\right\}ds\end{aligned} \tag{2.7}$$

Дифференцируя теперь каждое из равенств (2.6) по координате x, легко убедимся, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ действительно гармонические. Таким образом, в том случае, когда свободный член в интегральном уравнении (1.6) является предельным значением некоторой функции, регулярной в области S от переменного $\overline{z}$, формулы (1.3) дают [при плотности, определяемой из (1.6)] решение указанной задачи теории потенциала.

Между прочим из формул (2.5) имеем на L

$$\omega(t) = \delta(t) + C_1, \qquad \varkappa\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t) - F(t) = -\chi(t) - \varkappa C_1 \tag{2.8}$$

где функции $\delta(z)$ и $\chi(z)$ регулярны вне L и равны нулю на бесконечности. Они связаны используемым ниже соотношением

$$\varkappa\overline{\delta(t)} + \bar{t}\delta'(t) + \chi(t) = F(t) - 2\varkappa C_1 \quad \text{на } L \tag{2.9}$$

Примечание 1. Функцию $\Omega(x, y)$, гармоническую в многосвязной области S и непрерывную вплоть до контура L, можно по заданным граничным значениям искать в форме

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{\partial \ln r}{\partial n}\,ds + \sum_{j=1}^{m} B_j \ln r_j, \qquad B_j = \int\limits_{L_j} \nu(s)\,ds \tag{2.10}$$

где плотность $\nu(s)$ вещественна и $r_j = |z - z_j|$. Интегральное уравнение, которое мы при этом получим для плотности $\nu(s)$ (оно выписывается сразу), всегда единственным образом разрешимо. В самом деле, пусть $\nu_0(s)$ — какое-либо решение соответствующего однородного интегрального уравнения; отвечающая ему согласно (2.10) гармоническая функция $\Omega_0(x, y)$ тождественно равна нулю в S. Аналитическая функция, имеющая $\Omega_0(x, y)$ своей вещественной частью, будет равна чисто мнимой постоянной, так что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \nu_0(s)\frac{dt}{t - z} + \sum_{j=1}^{m} B_j^{(0)} \ln(z - z_j) = iC, \qquad B_j^{(0)} = \int\limits_{L_j} \nu_0(s)\,ds$$

где постоянная C вещественна. Левая часть этого равенства, остающаяся по самому его смыслу неизменной при всяком z, принадлежащем S, не может испытывать приращения при обходе кривой L_j. Поэтому функционалы $B_j^{(0)}$ необходимо равны нулю и на границе L справедливы соотношения

$$\nu_0(s) = \lambda(t) + iC, \qquad \operatorname{Im}\lambda(t) = -C$$

при некоей функции $\lambda(z)$, регулярной в областях S_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ и обращающейся в нуль на бесконечности. Рассматривая второе из этих соотношений на границе L_0 области S_0, легко заключаем, что $C = 0$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $\nu_0(s) = C_j$ на кривой L $(j=0, 1, \ldots, m)$, где C_j — постоянные, причем $C_0 = 0$; из обращения же в нуль величин $B_j^{(0)}$ находим, что и все остальные $C_j = 0$ $(j=1, \ldots, m)$. Итак, гармоническая в S функция допускает представление (2.10); на наш взгляд оно является простейшим из возможных.

Нетрудно усмотреть, что для бесконечной многосвязной области S, ограниченной контуром $L = L_1 + \cdots + L_m$, формулу (2.10) нужно заменить следующей:

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{\partial \ln r}{\partial n}\,ds + {\sum_{j=1}^{m}}'_{e} B_j \ln\frac{r_j}{r_e} + B_e \tag{2.11}$$

где штрих над символом суммы указывает на пропуск слагаемого, отвечающего $k = e$, причем e — любое фиксированное из чисел $j = 1, \ldots, m$. Гармоническая функция, определяемая (2.11), ограничена на бесконечности. Доказательство разрешимости интегрального уравнения для плотности [при заданных предельных значениях $\Omega(x, y)$] здесь проводится почти так же, как выше; в дополнение к сказанному следует лишь учесть очевидное предложение, что гармоническая функция, обращающаяся в нуль на границе и в постоянную на бесконечности и за вычетом этой постоянной стремящаяся к нулю с удалением на бесконечность не медленней, нежели величина обратная модулю радиуса-вектора, тождественно равна нулю в области.

Сделаем попутно еще одно замечание. Если задаются граничные значения нормальной производной от гармонической функции, то последняя, как известно, ищется в форме потенциала простого слоя. Можно получить и в этом случае уравнение, всегда разрешимое относительно плотности и одновременно приводящее к цели, взяв

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s) \ln r\, ds + B \ln \rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad B = \int\limits_L \nu(s)\, ds$$

Эта функция при любом значении $\nu(s)$ имеет, вообще говоря, особенность в начале координат; однако, как легко убедиться, вытекающее отсюда интегральное уравнение для плотности $\nu(s)$ таково, что соблюдение условия разрешимости задачи автоматически обеспечивает обращение в нуль функционала B и вместе с тем непрерывность $\Omega(x, y)$. Изучение союзного уравнения,— его можно записать так (точка z стремится к t_0 извне области):

$$\lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s) \frac{d \ln r}{dn}\, ds + \int\limits_L \nu(s) \left(\frac{d \ln \rho}{dn}\right)_0 ds = 0$$

проводится здесь вполне элементарными средствами[1] и позволяет установить, что, упомянутое уравнение для плотности имеет единственное решение.

Примечание 2. В статье [4] гармоническая функция в бесконечной трехмерной области V, ограниченной простой замкнутой поверхностью, ищется в виде суммы потенциала двойного слоя и слагаемого вида A / r_1, где r_1 — расстояние текущей точки области V до произвольно фиксированной точки, лежащей вне V, и A — некоторая постоянная. Последняя, в отличие от (2.11), берется не в виде специально подобранного зависящего, от плотности функционала, а находится (слагаемое A / r_1 вначале приписывается к свободному члену) из соответствующего условия ортогональности. Такой способ решения принципиально не улучшает внутренней структуры интегрального уравнения, оставляя его на характеристическом числе; кроме того, он вносит, по сравнению с указанным выше, значительное усложнение в расчетный процесс, требуя знания фундаментальной функции союзного ядра.

Вопрос о преобразовании уравнения Фредгольма (удовлетворяющего условиям разрешимости) в новое уравнение с так называемой обобщенной резольвентой, для которого значение параметра Фредгольма уже не является характеристическим числом, в достаточно общей постановке рассмотрен Гурвицем. Обобщенная резольвента автора (способ ее построения воспроизведен в монографии Н. И. Мусхелишвили [5]) дает, в числе возможных прочих, также искомое решение. Однако это ценное свойство достигается за счет довольно сложной модификации ядра, требующей знания фундаментальных функций заданного и сопряженного уравнений, что, как правило, мало пригодно[2] для приложений.

Примечание 3. Искомое решение задачи (2.1) может быть выражено в легко обозримой замкнутой форме (в квадратурах) непосредственно через функцию $F(z)$. К ней можно прийти, поступая двояким образом.

Первоначально разберем простейший случай, когда область S является кругом с центром в начале координат. В этом предположении функции $\delta(z)$ и $\chi(z)$ без труда находятся из условия (2.9), и затем на основании формулы Коши вычисляются интегралы, входящие в (1.3). В результате мы получим некоторое решение $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, содержащее интегралы от функции $F(z)$ и с ней сопряженной (взятые по кривой, не выходящей за пределы круга) и другие элементарные слагаемые.

---

[1] Второй интеграл в этом равенстве при постоянном значении плотности $\nu(s)$ равен произведению π на плотность.

[2] Некоторые полезные советы по тому же вопросу в свое время были мне даны В. И. Смирновым в связи с работой [6].

Далее из функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удалим части их значений, дающие решение однородной задачи (2.1). Соответственные слагаемые в каждой из них [при изменении знака на обратный у изымаемых из $\psi(x, y)$] образуют сопряженные гармонические функции. После их выделения и устранения получим новые предельно упрощенные выражения для искомых функций, являющиеся требуемыми:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left[\int_0^z F(z)\,dz + \int_0^{\bar z} \overline{F(z)}\,d\bar z\right], \quad \psi(x, y) = 0 \tag{2.12}$$

По своей внешней структуре они зависят от контура L неявно,— посредством функции $F(z)$; на величине же последней форма L, разумеется, сказывается существенным образом. Поэтому при надлежаще определенной $F(z)$ решение (2.12) остается справедливым для любой конечной односвязной области.

Дополнительные данные, наводящие на путь построения решения для произвольной многосвязной области, мы получим, рассмотрев еще случай, когда область S занимает внешность круга. Предполагая при этом функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ однозначными, а их первые частные производные непрерывными вплоть до контура и ограниченными на бесконечности, введем в первую и вторую формулы (1.3) добавочные слагаемые Ax и Bx, где A и B — вещественные функционалы, связанные с плотностью соотношением

$$A - iB = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t}\,dt \tag{2.13}$$

Рассуждения, вполне адэкватные использованным при выводе формул (2.9) и (2.12), позволяют убедиться, что такое слегка видоизмененное представление для искомых функций пригодно, точнее говоря, допустимо для разбираемого случая. По выполнении всех вычислений придем к некоторым выражениям для $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Убрав из них, как прежде, слагаемые, комплексная комбинация которых (по умножении на $-i$ слагаемых, взятых из $\psi(x, y)$) является функцией, аналитической от z, получим решение вида:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left[\int_{z_0}^{z}\left\{F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right\}dz + \int_{\bar z_0}^{\bar z}\left\{\overline{F(z)} - \bar a_0 - \frac{\bar a_1}{\bar z}\right\}d\bar z\right] + $$
$$+ \frac{1}{4}(a_1 + \bar a_1)\ln z\bar z + \operatorname{Re} a_0 x \tag{2.14}$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4}\, i\,(a_1 - \bar a_1)\ln z\bar z + \operatorname{Im} a_0 x$$

Здесь z_0 — произвольно фиксированная точка области S; a_0 и a_1 — свободный член и коэффициент при первой отрицательной степени в разложении $F(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Так же как (2.12), формулы (2.14) явно [при заданной $F(z)$] не зависят от очертания контура L; следовательно, при должном значении $F(z)$ они дают решение для любой бесконечной односвязной области.

Анализируя формулы (2.12) и (2.14), и отмечая, наряду со сходными типическими чертами, своеобразие, присущее каждой из них (обусловленное главным образом характером рассматриваемой области), легко сообразим, каким образом построить решение для общего случая конечной многосвязной области. Положив (при условленном направлении обхода L_j)

$$w(z) = \frac{1}{2}\int_0^z\left[F(z) - \sum_{j=1}^m a_j\frac{1}{z - z_j}\right]dz, \qquad a_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} F(t)\,dt \tag{2.15}$$

возьмем искомые функции равными

$$\varphi(x, y) = w(z) + \overline{w(z)} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^m (a_j + \bar a_j)\ln(z - z_j)(\bar z - \bar z_j)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4} i \sum_{j=1}^{m} (\overline{a_j} - a_j) \ln (z - z_j)(\overline{z} - \overline{z_j}) \tag{2.16}$$

Непосредственная проверка убеждает, что эти функции обладают всеми требуемыми свойствами и удовлетворяют условиям (2.1).

Наконец, нетрудно видеть какие изменения нужно внести в формулу (2.16) для случая любой бесконечной многосвязной области.

В заключение не излишне отметить, что найденное решение (выраженное через функцию $F(z)$, предполагаемую предварительно определенной) может быть получено иным, в известном смысле более прямым путем. Формулы (2.12) для конечной односвязной области следуют из (2.1) на основании условий (2.3); привлекая сюда еще некоторые вспомогательные рассуждения, можно получить и общие формулы (2.16) для многосвязной области.

Поступила 27 VIII 1953

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Математический сборник, т. 31 (73), № 2, 1952.
2. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. ДАН СССР, т. XXVII, № 9, 1940.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
4. Lauricella G. Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla Fisica — Matematica. Il Nuovo Cimento. Ser. V, т. III, 1907.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
6. Шерман Д. И. Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Труды Сейсмического института АН СССР, № 54, 1935.