Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИМЕЮЩИХ НЕСКОЛЬКО РЕГУЛИРУЮЩИХ ОРГАНОВ, ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

Задача о поведении динамических систем вблизи границы области устойчивости была поставлена и впервые решена Н. Н. Баутиным [1]. Им было показано, что вопрос о поведении системы вблизи ее границы устойчивости сводится к исследованию устойчивости системы в критических случаях пары чисто мнимых или одного нулевого корней характеристического уравнения соответствующей системы дифференциальных уравнений первого приближения, т. е. к вычислению ляпуновских величин g в этих критических случаях. Если рассматриваемая система при некоторых значениях ее параметров, лежащих на границе области устойчивости (построенной в этих параметрах), окажется устойчивой, то эту часть границы Н. Н. Баутин предложил называть *безопасной*, а в противном случае — *опасной*.

Решением аналогичной задачи для систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом занимался А. И. Лурье [2, 3], которым были получены критерии разделения границы области устойчивости на опасные и безопасные участки, справедливые для регулируемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка. Отметим, что такие критерии даны Н. Н. Баутиным для систем второго, третьего и четвертого порядков общего вида.

В работе мы будем пользоваться результатами исследования И. Г. Малкина [4], посвященного вычислению ляпуновских величин g в критическом случае пары чисто мнимых корней.

§ 1. Вычисление ляпуновских величин g в критическом случае пары чисто мнимых корней. В настоящем параграфе кратко изложен способ И. Г. Малкина [4] вычисления ляпуновских величин g в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения системы первого приближения с необходимыми изменениями, вытекающими из характера изучаемых задач, — мы будем всюду предполагать, что уравнения приведены к «каноническому виду» (см. [5], § 1).

Рассмотрим систему n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + X_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ — нелинейные функции, разложения которых в ряды по степеням их аргументов $x_1, \ldots, x_n$ не содержат слагаемых первой степени, и предположим, что она приведена к каноническому виду:

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + Z_\rho(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Такое приведение возможно всегда, если характеристическое уравнение линейной системы первого приближения, соответствующей (1.1), не имеет кратных корней [5].

Предположим теперь, что среди корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения системы первого приближения имеется одна пара чисто мнимых корней, тогда как остальные имеют отрицательные вещественные части

$$\lambda_{n-1} = i\omega, \qquad \lambda_n = -i\omega; \qquad \operatorname{Re}\lambda_\rho < 0 \quad (\rho = 1, \ldots, n-2) \tag{1.3}$$

И. Г. Малкин показал, что суждение об устойчивости динамической системы, описываемой уравнениями (1.1), или, что то же, (1.2), при условии (1.3), а следовательно, и о поведении ее вблизи границы области устойчивости, на которой обращается в нуль предпоследний определитель Гурвица, может быть получено из исследования дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= i\omega u + A_3u^2v + A_5u^3v^2 + \cdots \\ \dot{v} &= -i\omega v + \overline{A}_3uv^2 + \overline{A}_5u^2v^3 + \cdots \end{aligned} \tag{1.4}$$

переменные которых u и v связаны с исходными соотношениями

$$z_\rho(u, v) = z_\rho^{(1)}(u, v) + z_\rho^{(2)}(u, v) + \cdots \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Здесь $z_\rho^{(k)}(u, v)$ — однородные формы k-го порядка переменных u и v.

Если движение, описываемое уравнениями (1.4), окажется устойчивым, то и исследуемое движение будет также устойчивым. То же самое следует сказать и о неустойчивости. Но вопрос об устойчивости или неустойчивости системы (1.4), как нетрудно показать, решается знаком первой, не обращающейся в нуль вещественной части коэффициентов A_k или им сопряженных $\overline{A}_k$, причем для систем «первой степени негрубости», изучением которых мы будем заниматься в дальнейшем, не обращается в нуль вещественная часть первого коэффициента A_3 и, следовательно, в качестве критерия устойчивости имеем величину

$$g = \operatorname{Re} A_3 = \operatorname{Re} \overline{A}_3 \tag{1.6}$$

Если $g < 0$, то движение асимптотически устойчиво; в противном случае оно неустойчиво.

Переходим к вычислению ляпуновской величины g. Для этого составим уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_\rho}{\partial u}(i\omega u + A_3u^2v + \cdots) + \frac{\partial z_\rho}{\partial v}(-i\omega v + \overline{A}_3uv^2 + \cdots) = \\ &= \lambda_\rho z_\rho + Z_\rho(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.7}$$

в которых под z_ρ понимаются суммы (1.5). Сравнивая в (1.7) слагаемые первой степени относительно u и v, получим уравнения

$$i\omega\left(\frac{\partial z_\rho^{(1)}}{\partial u}u - \frac{\partial z_\rho^{(1)}}{\partial v}v\right) = \lambda_\rho z_\rho^{(1)} \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

решением которых будет

$$z_\rho^{(1)}(u, v) = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, n-2), \qquad z_{n-1} = u, \qquad z_n = v \tag{1.9}$$

Подставив найденные формы первой степени в (1.8) и приравняв слагаемое второй степени в левых и правых их частях, будем иметь

$$i\omega\left(\frac{\partial z_\rho^{(2)}}{\partial u}u-\frac{\partial z_\rho^{(2)}}{\partial v}v\right)=\lambda_\rho z_\rho^{(2)}+Z_\rho^{(2)}(u,\ v)\qquad(\rho=1,\ \ldots,\ n)\tag{1.10}$$

где $Z_\rho^{(2)}(u,\ v)$ — однородные формы второго порядка, получающиеся из $Z_\rho(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ после указанной подстановки и отбрасывания членов, содержащих u и v в степенях выше второй. Эти формы будут иметь следующий вид:

$$Z_\rho^{(2)}(u,\ v)=\sum_{p+q=2}A_\rho^{(pq)}u^p v^q\tag{1.11}$$

Здесь $A_\rho^{(pq)}$ — известные коэффициенты, а суммирование ведется по всем целым положительным p и q, в сумме равным двум. Для вычисления коэффициентов $A_\rho^{(pq)}$ могут быть получены формулы

$$A_\rho^{(pq)}=\frac{1}{p!\,q!}\,\frac{\partial^2}{\partial z_{n-1}^p\,\partial z_n^q}Z_\rho(z_1,\ \ldots,\ z_n)\Big|_{z_1=\ldots=z_n=0}\tag{1.12}$$

Разыскивая $z_\rho^{(2)}(u,\ v)$ в форме

$$z_\rho^{(2)}(u,\ v)=\sum_{p+q=2}\alpha_\rho^{(pq)}u^p v^q\tag{1.13}$$

найдем

$$\alpha_\rho^{(pq)}=\frac{A_\rho^{(pq)}}{\lambda_\rho-i\omega(p-q)}\qquad(p+q=2,\ \rho=1,\ \ldots,\ n)\tag{1.14}$$

Подставляя теперь в (1.7)

$$z_\rho(u,\ v)=z_\rho^{(1)}(u,\ v)+z_\rho^{(2)}(u,\ v)$$

и собирая слагаемые третьей степени, будем иметь

$$i\omega\left(\frac{\partial z_\rho^{(3)}}{\partial u}u-\frac{\partial z_\rho^{(3)}}{\partial v}v\right)=\lambda_\rho z_\rho^{(3)}+z_\rho^{(3)}(u,\ v)+\frac{dz_\rho^{(1)}}{\partial u}A_3u^2v+\frac{\partial z_\rho^{(1)}}{\partial v}\overline{A}_3uv^2\tag{1.15}$$

$$(\rho=1,\ \ldots,\ n)$$

причем формы третьего порядка $Z_\rho^{(3)}(u,\ v)$ могут быть представлены в виде

$$Z_\rho^{(3)}(u,\ v)=\sum_{p+q=3}A_\rho^{(pq)}u^p v^q\tag{1.16}$$

Разыскивая решение уравнений (1.15) в виде

$$z_\rho^{(3)}(u,\ v)=\sum_{p+q=3}\alpha_\rho^{(pq)}u^p v^q$$

из первых $n-2$ уравнений сравнением коэффициентов при одинаковых степенях u^pv^q можно вычислить $\alpha_\rho^{(pq)}$ $(p+q=3,\ \rho=1,\ \ldots,\ n-2)$, но последние два уравнения могут удовлетвориться только при $A_3=A_{n-1}^{(21)}$ и $\overline{A}_3=A_n^{(12)}$, и, следовательно, поставленная задача решается знаком вещественной части коэффициента $A_{n-1}^{(21)}$ или ему сопряженного $A_n^{(12)}$:

$$g=\operatorname{Re}A_{n-1}^{(21)}=\operatorname{Re}A_n^{(12)}\tag{1.17}$$

Если $g<0$, т. е. система будет устойчивой, то эта часть границы безопасна.

Предполагая, что разложения функций $Z_\rho(z_1, \ldots, z_n)$ в ряды по степеням их аргументов начинаются со слагаемых третьей степени, на основании (1.14) будем иметь

$$z_\rho^{(2)}(u, v) = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, n)$$

и поэтому вопрос о поведении системы вблизи границы области устойчивости в этом случае решается знаком вещественной части коэффициента $A_{n-1}^{(21)}$ при произведении $z_{n-1}^2 z_n$ в функции $Z_{n-1}(z_1, \ldots, z_n)$:

$$g = \operatorname{Re} A_{n-1}^{(21)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\partial^3}{\partial z_{n-1}^2 \partial z_n} Z_{n-1}(z_1, \ldots, z_n) \Big|_{z_1 = \ldots = z_n = 0} \tag{1.18}$$

и, следовательно, задача в значительной степени упрощается.

§ 2. Вычисление ляпуновских величин g в критическом случае одного нулевого корня. Этот параграф посвящен вычислению ляпуновской величины g в критическом случае одного нулевого корня характеристического уравнения соответствующей системы дифференциальных уравнений первого приближения. Все необходимые вычисления проводятся здесь методом Ляпунова [6].

Предположим, что исследуемая система дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.1) приведена к каноническому виду (1.2) и что среди корней характеристического уравнения ее линейной части имеется один нулевой корень, тогда как вещественная часть остальных корней отрицательна:

$$\lambda_n = 0, \qquad \operatorname{Re} \lambda_\rho < 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

Система (1.2), как нетрудно видеть, запишется в этом случае в виде

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + Z_\rho(z_1, \ldots, z_{n-1}, x) \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1)$$
$$\dot{x} = X(z_1, \ldots, z_{n-1}, x) \tag{2.2}$$

и поэтому, как было указано выше, для того чтобы выяснить характер поведения исследуемой динамической системы вблизи той части границы области устойчивости, на которой обращается в нуль свободный член характеристического уравнения, нам необходимо выяснить вопрос об устойчивости системы (2.2) в указанном критическом случае.

Согласно § 32 книги Ляпунова [6] для решения поставленной выше задачи следует найти выражение всех z_ρ $(\rho = 1, \ldots, n-1)$ через критическую переменную x из системы уравнений

$$\lambda_\rho z_\rho + Z_\rho(z_1, \ldots, z_{n-1}, x) = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1) \tag{2.3}$$

и после исключения из последнего уравнений (2.2) всех z_ρ исследовать устойчивость полученного уравнения по критической переменной.

Разыскивая решение системы (2.3) в форме рядов по степеням x

$$z_\rho = \alpha_{1\rho} x + \alpha_{2\rho} x^2 + \cdots \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1) \tag{2.4}$$

найдем после подстановки в (2.3)

$$z_\rho = -\frac{1}{\lambda_\rho} A_{2\rho} x^2 + \cdots \tag{2.5}$$

где $A_{2\rho}$ — коэффициент при x^2 в разложении функции $Z_\rho(z_1, \ldots, z_{n-1}, x)$ в ряд по степеням $z_1, \ldots, z_{n-1}, x$. Обозначив через B коэффициент при x^2 разложения функции $X(z_1, \ldots, z_{n-1}, x)$ в ряд по степеням переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}, x$, получим после подстановки (2.5) в (2.2) уравнение

$$\dot{x} = Bx^2 + \cdots \tag{2.6}$$

в котором невыписанные слагаемые содержат x в степени выше второй. Как показал Ляпунов, в этом случае будет иметь место неустойчивость.

Предположим теперь, что $B = 0$, но некоторые коэффициенты при произведениях $z_1, \ldots, z_{n-1}$ на критическую переменную x отличны от нуля, т. е. функция $X(z_1, \ldots, z_{n-1}, x)$ имеет вид:

$$X(z_1, \ldots, z_{n-1}, x) = x \sum_{k=1}^{n-1} B_k z_k + \cdots$$

В этом случае вопрос об устойчивости исследуемой системы решится знаком величины

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} B_k A_{2k}$$

и если $g < 0$, то этот участок границы области устойчивости будет безопасным; в противном случае он является опасным. Иными словами, в первом случае рассматриваемая система при нарушении границы области устойчивости будет совершать движения по траекториям, сколь угодно близким (в зависимости от изменений соответствующих параметров) к равновесному положению; в противном — может отойти на достаточное расстояние от равновесного состояния.

Аналогичным образом может быть исследован тот случай, когда функции $Z_\rho(z_1, \ldots, z_{n-1}, x)$ не содержат слагаемых второй степени относительно переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}, x$. В этом случае вопрос об устойчивости решается знаком коэффициента при кубе критической переменной x в выражении для функции $X(z_1, \ldots, z_{n-1}, x)$.

§ 3. Поведение систем автоматического регулирования, имеющих несколько регулирующих органов, вблизи границы области устойчивости. Поведение систем автоматического регулирования с несколькими регулирующими органами, как нетрудно показать, может быть описано дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (k = 1, \ldots, n) \\ \dot{\sigma}_\beta &= \sum_{k=1}^{n} j_{\beta k} x_k \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.1}$$

каноническая форма которых будет[5]

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} f_s(\sigma_s) \qquad (\rho = 1, \ldots, n)$$
$$\sigma_s = \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_{s\rho} z_\rho \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.2}$$

Соотношения, связывающие канонические переменные z_ρ с исходными x_k, даны в работе[5] [см. формулы (2.17)]; там же выписаны зависимости между коэффициентами канонической системы и коэффициентами исходных уравнений [формулы (2.14), (2.15) и (2.19)]. Для сокращения места они здесь не приводятся.

Предположим теперь, что функции $f_s(\sigma_s)$ не содержат слагаемых, линейных относительно σ_s, т. е. имеют вид:

$$f_s(\sigma_s) = c_{s2}\sigma_s^2 + c_{s3}\sigma_s^3 + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

и что среди корней характеристического уравнения соответствующей системы первого приближения имеется пара чисто мнимых $\lambda_{n-1} = -\lambda_n = i\omega$, и займемся исследованием поведения рассматриваемой системы автоматического регулирования вблизи той части границы области устойчивости, на которой обращается в нуль предпоследний определитель Гурвица. Подобная задача решалась в § 1 для систем общего вида; поэтому мы здесь воспользуемся полученными в нем результатами. Повторив соответствующие выкладки, найдем

$$z_\rho^{(1)} = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, n-2), \qquad z_{n-1} = u, \qquad z_n = v$$

Аналогичным образом получим выражение для коэффициентов $\alpha_\rho^{(pq)}$ (1.14) квадратичных форм (1.13), причем в рассматриваемом случае будем иметь

$$A_\rho^{(20)} = \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} c_{s2} \gamma_{s,n-1}^2, \qquad A_\rho^{(11)} = 2\sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} c_{s2} \gamma_{s,n-1}\gamma_{sn}, \qquad A_\rho^{(02)} = \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} c_{s2} \gamma_{sn}^2 \tag{3.3}$$

Для нужной нам функции $Z_{n-1}(z_1, \ldots, z_n)$ при помощи метода, изложенного выше в § 1 а также результатов работы [5], составим выражение

$$Z_{n-1}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1} \left[c_{s2}\sigma_s^2 + c_{s3}\sigma_s^3 + \ldots\right]$$

которое после подстановки σ_s из (3.2) приводится к виду

$$Z_{n-1}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1} \left[c_{s2}\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}z_\rho\Big)^2 + c_{s3}\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}z_\rho\Big)^3 + \ldots\right]$$

или

$$Z_{n-1}(u, v) = \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1} \Big[c_{s2}\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}\left(z_\rho^{(1)}(u,v) + z_\rho^{(2)}(u,v)\right)\Big)^2 +$$
$$+ c_{s3}\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}\left(z_\rho^{(1)}(u,v) + z_\rho^{(2)}(u,v)\right)\Big)^3 + \ldots\Big]$$

так как в данном случае следует подставить

$$z_\rho(u,v) = z_\rho^{(1)}(u,v) + z_\rho^{(2)}(u,v)$$

Обращаясь к формулам (1.13) и (1.19), можно найти теперь и выражение для интересующего нас коэффициента $A_{n-1}^{(21)}$. Для этого подставим в предыдущее равенство $z_\rho^{(1)}(u,v)$ и $z_\rho^{(2)}(u,v)$ и соберем слагаемые третьей степени относительно u и v, после чего будем иметь

$$Z_{n-1}^{(3)}(u,v) = \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1}\Big[2c_{s2}\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}\gamma_{s,n-1}\sum_{p+q=2}\alpha_\rho^{(pq)}u^{p+1}v^q + \sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}\gamma_{sn}\sum_{p+q=2}\alpha_\rho^{(pq)}u^p v^{q+1}\Big) + c_{s3}(\gamma_{s,n-1}u+\gamma_{sn}v)^3\Big]$$

Отсюда видно, что коэффициент $A_{n-1}^{(21)}$ вычисляется по формуле

$$A_{n-1}^{(21)} \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1}\Big(2c_{s2}\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}(\gamma_{s,n-1}\alpha_\rho^{(11)} + \gamma_{sn}\alpha_\rho^{(20)}) + \quad + 3c_{s3}\gamma_{s,n-1}^2\gamma_{sn}\Big) \quad (3.4)$$

Все дальнейшие выкладки имеют целью привести выражение (3.4) к более удобному виду. Подставив $\alpha_\rho^{(11)}$ и $\alpha_\rho^{(20)}$ из (1.14), а затем $A_\rho^{(11)}$ и $A_\rho^{(20)}$ из (3.3), получим

$$A_{n-1}^{(21)} = \sum_{s=1}^{m} a_{s,n-1}\Big[\sum_{k=1}^{m} c_{s2}c_{k2}\gamma_{k,n-1}\Big(-4\gamma_{kn}\gamma_{s,n-1}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\gamma_{s\rho}a_{k\rho}}{\lambda_\rho} - 2\gamma_{sn}\gamma_{k,n-1}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\gamma_{s\rho}a_{k\rho}}{\lambda_\rho - 2i\omega}\Big) + 3c_{s3}\gamma_{s,n-1}^2\gamma_{sn}\Big]$$

Отсюда после подстановки $\gamma_{s\rho}$ и $a_{s\rho}$ согласно формуле (2.29) работы[5] имеем

$$A_{n-1}^{(21)} = -\frac{H_{1n}(i\omega)H_{1n}(-i\omega)}{D'(i\omega)D'(-i\omega)}\sum_{s=1}^{m}\Big[\sum_{k=1}^{m} c_{s2}c_{kz}\Big(4\frac{M_{ss}(i\omega)M_{kk}(i\omega)}{D'(i\omega)H_{kn}(i\omega)} \times \frac{M_{kk}(-i\omega)}{H_{kn}(-i\omega)}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{M_{sk}(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho)} + 2\frac{M_{ks}(i\omega)M_{ss}(-i\omega)M_{kk}(i\omega)}{D'(i\omega)H_{s,n}(-i\omega)H_{kn}(i\omega)} \times \sum_{\rho=1}^{n}\frac{M_{sk}(\lambda_\rho)}{(\lambda_\rho - 2i\omega)D'(\lambda_\rho)}\Big) - 3c_{s3}\frac{M_{ss}(i\omega)M_{ss}(i\omega)M_{ss}(-i\omega)}{D'(i\omega)H_{sn}(i\omega)H_{sn}(-i\omega)}\Big]$$

Вычислив суммы

$$\sum_{\rho=1}^{n}\frac{M_{sk}(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho)} = -\frac{M_{sk}(0)}{D(0)}, \quad \sum_{\rho=1}^{n}\frac{M_{sk}(\lambda_\rho)}{(\lambda_\rho - 2i\omega)D'(\lambda_\rho)} = -\frac{M_{sk}(2i\omega)}{D(2i\omega)}$$

и отбросив несущественный положительный множитель

$$\frac{H_{1n}(i\omega)H_{1n}(-i\omega)}{D'(i\omega)D'(-i\omega)}$$

вопрос об устойчивости рассматриваемой системы регулирования в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения соответствующей системы первого приближения приводим к рассмотрению знака величины

$$g = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{m} \Big[\sum_{k=1}^{m} c_{s2} c_{k2} \Big(4 \frac{M_{ss}(i\omega)}{D'(i\omega)} \left| \frac{M_{kk}(i\omega)}{H_{kn}(i\omega)} \right|^2 \frac{M_{sk}(0)}{D(0)} +$$

$$+ 2 \frac{M_{ks}(i\omega)}{D'(i\omega)} \frac{M_{ss}(-i\omega)}{H_{sn}(-i\omega)} \frac{M_{kk}(i\omega)}{H_{kn}(i\omega)} \frac{M_{sk}(2i\omega)}{D(2i\omega)} \Big) + 3c_{s3} \frac{M_{ss}(i\omega)}{D'(i\omega)} \left| \frac{M_{ss}(i\omega)}{H_{sn}(i\omega)} \right|^2 \Big] \tag{3.5}$$

Если $g < 0$, то система устойчива асимптотически и, следовательно, эта часть границы области устойчивости является безопасной; в противном случае граница будет опасной.

При получении критерия разделения границы области устойчивости на опасные и безопасные участки мы пользовались наиболее простыми формулами (2.29) работы [5]. Следует отметить, что к тому же результату мы пришли при использовании общих соотношений (2.14) и (2.15) той же работы. Однако вычисления в этом случае значительно усложняются и приходится использовать тот факт, что коэффициенты $\gamma_{s,n-1}$ и γ_{sn} обязательно должны быть комплексными сопряженными. Следует отметить также, что при $m = 1$ из соотношения (3.5) сразу же получается критерий разделения границы области устойчивости на опасные и безопасные участки, полученный А. И. Лурье для систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом [2].

Если все c_{s2} равны нулю, как это часто имеет место, то, как нетрудно видеть, критерий (3.5) значительно упрощается и принимает вид:

$$g = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{m} c_{s3} \frac{M_{ss}(i\omega)}{D'(i\omega)} \left| \frac{M_{ss}(i\omega)}{H_{sn}(i\omega)} \right|^2 \tag{3.6}$$

Проведя соответствующие выкладки для системы в критическом случае одного нулевого корня характеристического уравнения системы первого приближения, найдем, что если хотя бы одно из чисел c_{s2} отлично от нуля, то граница будет всегда опасной. Если же все c_{s2} равны нулю, то при

$$g = \sum_{s=1}^{m} a_{sn} \gamma_{sn}^3 c_{s3} < 0 \tag{3.7}$$

она будет безопасной, если же $g > 0$, то граница области устойчивости является опасной.

§ 4. Примеры. Для иллюстрации разработанных выше способов исследования динамических систем вблизи границы области устойчивости рассмотрим несколько примеров, заимствованных нами из монографии Н. Н. Баутина [1].

Простейшим примером может служить генератор (см. [1], стр. 80), уравнения которого приводятся к виду:

$$\dot{x}_1 = -px_1 - qx_2 - rx_3 + X_1(x_2, x_3), \qquad \dot{x}_2 = x_1, \qquad \dot{x}_3 = x_2 \tag{4.1}$$

Здесь

$$X_1(x_2, x_3) = -\frac{2\mu}{\sigma} x_2^2 x_3 - \frac{\mu^2\rho}{\sigma} x_2 x_3^2 \tag{4.2}$$

$$p = \frac{\mu(\rho - 1)}{\sigma}, \qquad q = \frac{1 - \rho\mu^2}{\sigma}, \qquad r = \frac{\rho\mu}{\sigma}$$

Причем положительные величины μ, ρ и σ выражаются через параметры генератора.

Составив характеристический определитель линейной части системы (4.1), получим

$$D(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r \tag{4.3}$$

Следовательно, граница области устойчивости определится равенством

$$pq - r = 0$$

При этом мнимые корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ связаны с его коэффициентами зависимостями

$$\omega^2 = q = \frac{r}{p} \tag{4.4}$$

которые легко получатся, если подставить в характеристическое уравнение $\lambda = i\omega$.

Следуя общему способу, изложенному в первой части работы, составим функцию $Z_{n-1}(z_1, z_2, z_3)$. Составление этой функции значительно облегчается тем обстоятельством, что $X_1(x_2, x_3)$ не содержит слагаемых второй степени. Поэтому x_2 и x_3 следует заменить соотношениями (см. (1.23) из работы [5])

$$x_2 = \frac{\lambda_2}{D'(\lambda_2)} u + \frac{\lambda_3}{D'(\lambda_3)} v, \; x_3 = \frac{1}{D'(\lambda_2)} u + \frac{1}{D'(\lambda_3)} v \tag{4.5}$$

так как $H_2(\lambda) = \lambda$, $H_3(\lambda) = 1$.

Подставляя теперь (4.5) в (4.2), получим

$$Z_{n-1}(u, v) = -\frac{\mu}{\sigma} \frac{\lambda_2\lambda_3}{[D'(\lambda_2)]^2 D'(\lambda_3)} \left[2\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + 4 + \mu\rho\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_3}\right)\right] u^2 v + \ldots$$

и, следовательно,

$$A_{n-1}{}^{(21)} = \frac{\mu}{\sigma} \frac{\omega^2}{[D'(i\omega)]^2 D'(-i\omega)} \left(2 + i\,\frac{\mu\rho}{\omega}\right) \tag{4.6}$$

Если отделить вещественную часть $A_{n-1}{}^{(21)}$ и отбросить несущественный положительный множитель и, кроме того, подставить ω^2 из (4.4), то критерий разделения границы на опасные и безопасные участки может быть приведен к виду:

$$g = 2q - \mu\rho p \tag{4.7}$$

причем, если опять воспользоваться (4.4) и исключить из (4.7) p, то будем иметь

$$g^* = 2q^2 - \mu\rho r \tag{4.8}$$

В этой форме критерий был получен Н. Н. Баутиным.

Граница области устойчивости будет безопасной при выполнении неравенства $g < 0$, в противном случае она является опасной.

Несколько более сложным примером является генератор, описываемый системой дифференциальных уравнений ([1], стр. 155)

$$\dot{x}_1 = -px_1 - qx_2 - rx_3 - sx_4 + X_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$\dot{x}_2 = x_1, \qquad \dot{x}_3 = x_2, \qquad \dot{x}_4 = x_3 \tag{4.9}$$

где функция (нами использованы обозначения Н. Н. Баутина)

$$X_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \tag{4.10}$$
$$= -\frac{2\delta}{\sigma}x_3^3 - \frac{2\delta^2\varepsilon}{\sigma}x_3^2x_4 - \frac{\delta}{\sigma}x_1x_4^2 - \frac{\delta^2\varepsilon}{\sigma}x^2x_4^2 - \frac{\rho\delta}{\sigma}x_3x_4^2 - 6\frac{\delta}{\sigma}x_2x_3x_4$$

$$p = \frac{\delta(\varepsilon - 1)}{\sigma}, \qquad q = \frac{1 + \rho - \delta^2\varepsilon}{\sigma}, \qquad r = \frac{\delta(\varepsilon - \rho)}{\sigma}, \; s = \frac{\rho}{\sigma} \tag{4.11}$$

Характеристическое уравнение линейной части системы (4.9) запишется в форме

$$D(\lambda) = \lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0 \tag{4.12}$$

а граница области устойчивости определится равенством

$$pqr - p^2s - r^2 = 0$$

тогда как значения мнимых корней могут быть найдены из уравнений

$$\omega^4 - q\omega^2 + s = 0, \qquad p\omega^2 - r = 0 \tag{4.13}$$

Составляя полиномы $H_k(\lambda)$, получим

$$H_1(\lambda) = \lambda^3, \quad H_2(\lambda) = \lambda^2, \quad H_3(\lambda) = \lambda, \quad H_4(\lambda) = 1$$

и поэтому соотношения, связывающие исходные переменные x_k с каноническими $z_{n-1} = u$ и $z_n = v$, примут вид:

$$x_1 = \frac{\lambda_3^3}{D'(\lambda_3)}u + \frac{\lambda_4^3}{D'(\lambda_4)}v, \qquad x_2 = \frac{\lambda_3^2}{D'(\lambda_3)}u + \frac{\lambda_4^2}{D'(\lambda_4)}v$$
$$x_3 = \frac{\lambda_3}{D'(\lambda_3)}u + \frac{\lambda_4}{D'(\lambda_4)}v, \qquad x_4 = \frac{1}{D'(\lambda_3)}u + \frac{1}{D'(\lambda_4)}v$$

Подставив x_k из (4.14) в (4.10) и собрав коэффициенты при произведении u^2v, будем иметь

$$A_{n-1}^{(21)} = \frac{\delta}{\sigma}\frac{1}{[D'(i\omega)]^2 D'(-i\omega)}\{i\omega(\omega^2 - \rho) + \delta\varepsilon\omega^2\}$$

и, следовательно (отброшен положительный множитель),

$$g = \delta\varepsilon\omega^2(-3p\omega^2 + r) - 2\omega^2(\omega^2 - \rho)(-2\omega^2 + q)$$

что после подстановки ω^2 из (4.13) дает

$$g = \frac{2r}{p}\left\{-\delta\varepsilon r + \left[q - 2\frac{r}{p}\left(\frac{r}{p} - \rho\right)\right]\right\} \tag{4.15}$$

причем, воспользовавшись соотношением

$$q = \frac{sp}{r} + \frac{r}{p}$$

вытекающим из (4.13), можно представить (4.15) в форме

$$g = \frac{2}{p^3}\left\{-\delta\varepsilon r^2p^2 + (sp^2 - r^2)(r - p\rho)\right\} \tag{4.16}$$

полученной Н. Н. Баутиным. При $g < 0$ участок границы будет безопасным, а при $g > 0$ — опасным.

В предыдущих примерах дифференциальные уравнения, описывающие поведение обоих генераторов, содержали только одну нелинейную функцию. В качестве третьего примера рассмотрим динамическую систему, уравнения движения которой имеют вид:

$$\dot{x}_1 = x_3, \qquad \dot{x}_3 = -x_1 - \alpha x_2 - \delta x_3 - \gamma X_3(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \qquad \dot{x}_4 = \alpha x_1 - x_2 - \delta x_4 + \gamma X_4(x_1, x_2) \tag{4.17}$$

и содержат две различные функции:

$$X_3(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 + x_2^2), \qquad X_4(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2) \tag{4.18}$$

Составив характеристическое уравнение линейной части этой системы, будем иметь

$$D(\lambda) = \lambda^4 + 2\delta\lambda^3 + (2 + \delta^2)\lambda^2 + 2\delta\lambda + 1 + \alpha^2 = 0 \tag{4.19}$$

Подставляя в это уравнение $\lambda = i\omega$ и отделяя вещественную и мнимую части, найдем

$$\omega^4 - (2 + \delta^2)\omega^2 + 1 + \alpha^2 = 0, \qquad \omega^2 - 1 = 0$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_3 = i, \qquad \lambda_4 = -i \tag{4.20}$$

причем граница области устойчивости определяется равенством

$$\delta^2 - \alpha^2 = 0$$

При переходе к каноническим переменным воспользуемся соотношениями (1.28) работы [5]. Для рассматриваемого случая получим

$$x_1 = \frac{H_{11}(\lambda_3)}{D'(\lambda_3)}u + \frac{H_{11}(\lambda_4)}{D'(\lambda_4)}v, \qquad x_2 = \frac{H_{12}(\lambda_3)}{D'(\lambda_3)}u + \frac{H_{12}(\lambda_4)}{D'(\lambda_4)}v \tag{4.21}$$

Составляя функцию $Z_{n-1}(u, v)$ и собирая коэффициенты при u^2v, найдем выражение

$$A_{n-1}^{(21)} = \frac{1}{[D'(\lambda_3)]^2 D'(\lambda_4)}\left\{2\left[H_{11}(\lambda_3) + \frac{H_{23}(\lambda_3)}{H_{13}(\lambda_3)}H_{12}(\lambda_3)\right] \times\right.$$
$$\times [H_{11}(\lambda_3)H_{11}(\lambda_4) + H_{12}(\lambda_3)H_{12}(\lambda_4)] + \left[H_{11}(\lambda_4) +\right.$$
$$\left.+ \frac{H_{23}(\lambda_3)}{H_{13}(\lambda_3)}H_{12}(\lambda_4)\right]\left\{[H_{11}(\lambda_3)]^2 + [H_{12}(\lambda_3)]^2\right\}$$

которое после подстановки полиномов

$$H_{11}(\lambda) = -\gamma\alpha, \qquad H_{12}(\lambda) = \gamma[\lambda(\lambda + \delta) + 1]$$

$$H_{13}(\lambda) = -\gamma\alpha\lambda, \qquad H_{23}(\lambda) = -\gamma\lambda[\lambda(\lambda + \delta) + 1]$$

можно представить в виде

$$A_{n-1}^{(21)} = \frac{(2+i\delta)\gamma}{8\delta^3(4+\delta^2)\alpha}(\alpha^2+\delta^2)^2$$

Отсюда следует, что

$$g = -\frac{\gamma\alpha(\alpha^2+\delta^2)^2}{2\alpha^2\delta^3(4+\delta^2)^2} \tag{4.22}$$

т. е., если $\gamma\alpha < 0$, то граница области устойчивости безопасная, а если $\gamma\alpha > 0$, то граница опасная.

Поступила 3 VII 1953 Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. Гостехиздат, 1949.
2. Лурье А. И. О характере границ области устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
3. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1950.
4. Малкин И. Г. Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, т. XV, вып. 4, 1951.
5. Троицкий В. А. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.