Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

§ 1. В этой статье рассматриваются вопросы устойчивости в целом решений системы двух дифференциальных уравнений некоторых специальных типов.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = h_{11}x_1 + h_{12}x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 \tag{1.1}$$

Как известно, для того чтобы решение $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.1) было асимптотически устойчивым в целом (т. е. при любых начальных возмущениях), достаточно (и необходимо) выполнения условий Рауза-Гурвица

$$h_{11} + h_{22} < 0, \qquad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0 \tag{1.2}$$

Здесь рассматриваются системы уравнений, которые получаются из (1.1), если какие-либо два линейных члена $h_{ij}x_j$, входящие в (1.1), заменить произвольными непрерывными функциями $f_{ij}(x_j)$.

Везде в дальнейшем предполагается, что правые части рассматриваемых систем обращаются в начале координат в нуль и удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решений при всех начальных данных[1].

В статье исследуется вопрос, в какой мере выполнение условий

$$h_{11}(x_1) + h_{22}(x_2) < 0, \qquad h_{11}(x_1)\, h_{22}(x_2) - h_{12}(x_2)\, h_{21}(x_1) > 0 \tag{1.3}$$

аналогичных неравенствам (1.2), обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом решения $x_1 = x_2 = 0$ системы

$$\frac{dx_1}{dt} = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) \tag{1.4}$$

в случае, когда лишь две из величин

$$h_{ij}(x_j) = \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} \qquad (x_j \neq 0)$$

являются постоянными. Очевидно, рассматриваемая здесь задача является обобщением задачи, рассмотренной Н. П. Еругиным [1,2,3] и И. Г. Малкиным [4], исследовавшими систему с одной нелинейной функцией.

---

[1] Все полученные в статье результаты путем некоторого усложнения доказательств могут быть обобщены на случай, когда последнее требование не выполняется.

§ 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by \tag{2.1}$$

Обозначим

$$h_i(x) = \frac{f_i(x)}{x} \quad \text{при } x \neq 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

В дальнейшем предполагаем $a \neq 0$, так как в случае $a = 0$ вопрос об устойчивости решается непосредственным интегрированием уравнений (2.1). Предполагается также выполнение условия

$$h_1(x)\, b - h_2(x)\, a > 0 \quad \text{при всех } x \neq 0 \tag{2.3}$$

так как иначе система (2.1) имела бы точки равновесия, отличные от $x = 0$, $y = 0$. Обозначим

$$u = u(x) = \left(\int_0^x (f_1(x)\, b - f_2(x)\, a)\, dx\right) \operatorname{sign} x \tag{2.4}$$

В силу (2.3) функция $u(x)$ является монотонной функцией $x$. Следовательно, обратно, можно рассматривать $x$ как функцию от $u$. Обозначим

$$\varphi(u) = f_1(x(u)) + bx(u) \tag{2.5}$$

$$-N_1 = \lim u(x) \quad \text{при } x \to -\infty, \qquad N_2 = \lim u(x) \quad \text{при } x \to \infty \tag{2.6}$$

$$m_1 = \overline{\lim}\, \varphi(u) \quad \text{при } u \to -N_1, \qquad m_2 = \overline{\lim}\, (-\varphi(u)) \quad \text{при } u \to N_2 \tag{2.7}$$

*Теорема 2.1.* Пусть выполняются условия (2.3) и

$$\varphi(u) - \varphi(-u) < 0 \tag{2.8}$$

для всех $u$ из интервала $0 < u < \min(N_1, N_2)$. Тогда для того чтобы всякое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (2.1) обладало свойством

$$x(t) \to 0, \qquad y(t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{2.9}$$

достаточно выполнения условий

$$\underline{\lim} \left(\varphi(u) \operatorname{sign} u - \int_0^u \frac{\operatorname{sign} u\, du}{c + \varphi(u) \operatorname{sign} u}\right) = -\infty \tag{2.10}$$

(при $u \to -N_1$ и всех $c > \max(0, m_1)$, при $u \to N_2$ и всех $c > \max(0, m_2)$; в случае $m_1 = \infty$ или $m_2 = \infty$ следует положить в условиях (2.10) интеграл равным нулю).

*Доказательство.* Заменяя переменные $x, y$ по формулам (2.4) и

$$z = ay - bx \tag{2.11}$$

приведем систему (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (f_1(x)\, b - f_2(x)\, a)(\varphi(u) + z) \operatorname{sign} u \\ \frac{dz}{dt} &= -(f_1(x)\, b - f_2(x)\, a) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Пусть для определенности $N_2 \leqslant N_1$. Покажем, что при условиях (2.10) всякая траектория системы (2.12) при возрастании времени либо примыкает к началу координат, либо пересекает полуось $u=0$, $z>0$. Знак $f_1(x)b-f_2(x)a$ вследствие (2.3) и (2.4) совпадает со знаком $u$, поэтому при $u>0$ будет $dz/dt<0$, при $u<0$, напротив, $dz/dt>0$.

Выше кривой

$$\varphi(u)+z=0 \tag{2.13}$$

имеем $du/dt>0$, ниже кривой (2.13) $du/dt<0$.

Обозначим символом $f(p, t)$ траекторию системы (2.12), проходящую через точку $p(u_p, z_p)$ при $t=0$. Не уменьшая общности, примем $u_p>0$ и $z_p>-\varphi(u_p)$. Покажем, что наступит момент $t=t_1$, когда $f(p, t)$ пересечет кривую (2.13).

Предположим, что при $t>0$ точка $f(p, t)$ лежит выше кривой (2.13). Это возможно лишь при $m_2<\infty$. Из (2.12) имеем

$$\frac{dz}{du}=-\frac{\operatorname{sign} u}{\varphi(u)+z} \tag{2.14}$$

При нашем предположении $du/dt>0$, поэтому, интегрируя (2.14), получим

$$z(t)-z_p=-\int_{u_p}^{u}\frac{du}{\varphi(u)+z(t)}$$

[через $u(t)$ и $z(t)$ обозначены координаты точки $f(p, t)$].

Прибавляя к обеим частям последнего равенства $\varphi(u)$ и заменяя в правой части $z(t)$ любым положительным числом $c>z_p>z(t)$ при $t>0$, получим оценку

$$z(t)+\varphi(u)<-\int_{u_p}^{u}\frac{du}{\varphi(u)+c}+\varphi(u)+z_p \tag{2.15}$$

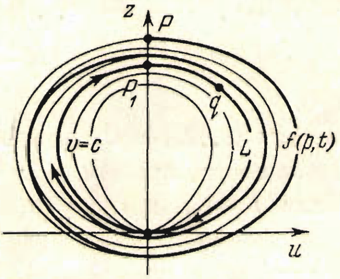
Так как вследствие (2.10) и (2.15) выражение $z(t)+\varphi(u(t))$ не может оставаться положительным при $u\to N_2$, т. е. при $x\to\infty$, то приходим к выводу, что траектория $f(p, t)$ пересекается с кривой (2.13).

При дальнейшем движении, как нетрудно видеть, траектория $f(p, t)$ либо примыкает к началу координат $u=0$, $z=0$, либо пересекается с полуосью $u=0$, $z<0$. Рассматривая поведение $f(p, t)$ в области $u<0$, аналогично предыдущему убедимся, что либо $f(p, t)$ при $t\to\infty$ примыкает к началу координат, либо пересекает полуось $u=0$, $z>0$.

Итак, достаточно доказать справедливость (2.9) лишь для траекторий, начинающихся на полуоси $u=0$, $z>0$.

Обозначим через $V$ семейство отрезков таких траекторий, лежащих в области $u\geqslant 0$. Построим в области $u<0$ семейство кривых, симметричных кривым семейства $V$ относительно оси $u=0$. Примем построенные замкнутые линии за линии уровня некоторой функции $v(u, z)$, которую определим равенством $v(0, z_p)=z_p$. Тот факт, что в точке $(0,0)$ функция $v(u, z)$ может оказаться не однозначной, не имеет значения. В области $u>0$ функция $v(t)=v(u(t), z(t))$ постоянна по времени, так как линии $v(u, z)=c$ совпадают с траекториями системы (2.12).

Покажем, что при $u<0$ функция $v(u(t), z(t))$ убывает по $t$ вдоль траекторий (2.12), проходящих в области определения $v(u, z)$. Так как линии уровня $v(u, z) = c$, $u < 0$ есть кривые $u = u^*(z)$, симметричные траекториям (2.12), лежащим в правой полуплоскости, то они удовлетворяют уравнению




Фиг. 1

$$\frac{du^*}{dz} = \varphi(-u^*) + z \tag{2.16}$$

Сравнивая (2.14) и (2.16), получим в некоторой точке $q$ $(u_q < 0)$

$$\frac{d(u - u^*)}{dz} = -\varphi(-u_q) + \varphi(u_q) > 0$$

вследствие (2.8). Таким образом, при возрастании $z$, что при $u < 0$ соответствует возрастанию $t$, величина $u - u^*$ возрастает, т. е. траектории (2.12) пересекают линии $v(u, z) = c$ в сторону увеличения $u$, т. е. снаружи внутрь, что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь некоторую траекторию $f(p, t)$ $(u_p = 0,\ z_p > 0)$. Функция $v(t) = v(u(t), z(t))$ не возрастает со временем вдоль $f(p, t)$. Неотрицательная, не возрастающая по $t$ функция $v(t)$ должна иметь предел $v = v_0$ при $t \to \infty$.

Обозначим через $L$ $\omega$-предельное множество $f(p, t)$. Траектория $f(p, t)$ при $t > 0$ лежит в ограниченной области $v(u, z) \leqslant v_p$. Следовательно, множество $L$ замкнуто, ограничено и состоит из целых траекторий [5]. Очевидно, значение $v(u, z)$ на $L$ будет равно $v_0$. Пусть $L$ содержит траекторию $f(q, t)$, отличную от $u = 0$, $z = 0$. Часть этой траектории лежит в области $u < 0$. Действительно, пусть $q$ лежит в области $u > 0$. Через точку $q$ проходит линия уровня $v(u, z) = v_0$, т. е. некоторая интегральная кривая (2.12), пересекающая полуось $u = 0$, $z > 0$ в точке $p_1$ (фиг. 1).

Если на $f(q, t)$ точке $p_1$ соответствует время $t_1$, то при $t < t_1$ траектория $f(q, t)$ попадает в область $u < 0$. Однако в этом случае при $u < 0$ $f(q, t)$ была бы одновременно и линией уровня $v(u, z) = v_0$, что, как показано выше, невозможно. Противоречие показывает, что $\omega$-предельное множество $f(p, t)$ состоит из одной точки $u = 0$, $z = 0$, или, что то же самое, $x = 0$, $y = 0$. Теорема доказана.

*Замечание.* Условия теоремы не обеспечивают устойчивости решения $x = y = 0$ в целом. Действительно, непосредственным интегрированием системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + y, \qquad \frac{dy}{dt} = -3x$$

где функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -8x & \text{при} \quad x > 0 \\ 4x & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ -x - 5 & \text{при} \quad x \leqslant -1 \end{cases}$$

и, очевидно, удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, убедимся, что эта система имеет траекторию

$$x(t) = -\frac{3}{8}\left(e^t - \frac{1}{3}e^{3t}\right), \qquad y(t) = \frac{9}{8}\left(e^t - \frac{1}{9}e^{3t}\right)$$

примыкающую к точке $x = y = 0$ при $t \to -\infty$, что исключает устойчивость решения $x = y = 0$ по Ляпунову [1].

*Теорема 2.2.* Для того чтобы решение $x = y = 0$ системы (2.1) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно выполнения условий (2.3), (2.8), (2.10) и

$$h_1(x) + b < 0 \quad \text{при } |x| < \delta \tag{2.17}$$

где $\delta$ — достаточно малое положительное число.

*Доказательство.* При условиях (2.3) и (2.17) в окрестности начала координат существует определенно-положительная функция, имеющая в силу (2.1) знакоотрицательную производную по времени [6]; этого достаточно для устойчивости решения $x = y = 0$ по Ляпунову. Но в таком случае справедливость теоремы 2.2 следует непосредственно из теоремы 2.1.

Из результатов этого параграфа следует, что при нарушении хотя бы одного из условий теоремы 2.2 теорема может быть неверной.

*Теорема 2.3.* Если выполняется условие (2.3) и существует постоянное число $c > 0$ такое, что

$$\underline{\lim}\,(\varphi(u) - cu)\operatorname{sign} u > -M \quad \text{при } u \to N_2 \text{ или } u \to -N_1 \tag{2.18}$$

где $M$ — постоянная, то система (2.1) имеет траекторию, уходящую в бесконечность при возрастании времени.

*Доказательство.* Пусть для определенности (2.18) выполняется при $u > 0$. Приведем систему (2.1) к виду (2.12). Рассмотрим траекторию $f(p, t)$ $(u_p = 0,\ z_p > 0)$. При всех $t > 0$, при которых $z(t) > \varphi(u(t))$, получим, как и выше:

$$z(t) + \varphi(u(t)) = z_p + \varphi(u) - \int_{u_p}^{u} \frac{du}{\varphi(u) + z(u)}$$

Выбирая величину $z_p$ достаточно большой, можно добиться того, чтобы на некотором интервале $0 < t < t_1$ было

$$z(t) + \varphi(u(t)) > \frac{1}{c} \tag{2.19}$$

Для значений $t$ из этого интервала получим оценку

$$z(t) + \varphi(u(t)) > z_p + \varphi(u) - c\int_0^u du > -M_1 + z_p \tag{2.20}$$

где $M_1$ — постоянная.

Из (2.20) видно, что если $z_p > M_1 + 1 + c^{-1}$, то неравенство (2.19) не нарушится ни при каких $t > 0$, т. е. траектория $f(p, t)$ не пересекается с кривой (2.13) при возрастании времени, а это и доказывает теорему, так как выше кривой $du/dt > 0$.

Следствием теорем 2.2 и 2.3 является следующая теорема.

*Теорема 2.4.* Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ удовлетворяют условиям (2.3) и

$$h_1(x) + b < 0 \quad \text{при } x \neq 0 \tag{2.21}$$

Тогда для того чтобы решение $x = y = 0$ системы (2.1) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\underline{\lim}\left[(f_1(x) + bx)\operatorname{sign} x - \int_0^x (f_1(x)\,b - f_2(x)\,a)\,dx\right] = -\infty \quad \text{при } x \to \pm\infty \tag{2.22}$$

Действительно, нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.22) выполняются все условия теоремы 2.2, напротив, при нарушении условий (2.22) выполняются условия теоремы 2.3.

В заключение этого параграфа отметим следующее. Для выполнения (2.22) достаточно, очевидно, одно из условий (2.3) или (2.21) заменить более сильным неравенством

$$h_1(x) + b < -\varepsilon \quad \text{или} \quad h_1(x)\, b - h_2(x)\, a > \varepsilon \tag{2.23}$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число.

Таким образом, для того чтобы решение $x = 0$, $y = 0$ системы (2.1) при условиях (2.3) и (2.21) не было устойчивым в целом, необходимо, чтобы при $|x| \to \infty$ функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ неограниченно близко приближались к обеим границам условий Рауза-Гурвица для соответствующей линейной системы.

§ 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + f_2(y) \tag{3.1}$$

Обозначим

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x}, \qquad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{y} \quad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{3.2}$$

В дальнейшем предполагаем $ab \neq 0$, так как в случае $ab = 0$ вопрос об устойчивости решается непосредственным интегрированием системы (3.1).

Рассмотрим сначала один частный случай.

*Теорема 3.1.* Пусть $ab < 0$ и функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ удовлетворяют неравенствам

$$xf_1(x) \leqslant 0, \qquad yf_2(y) \leqslant 0 \quad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{3.3}$$

причем по крайней мере в одном из условий выполняется строгое неравенство. Тогда решение $x = y = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Пусть для определенности $b > 0$. Тогда функция $v(x, y) = \frac{1}{2}(bx^2 - ay^2)$ будет определенно-положительной функцией, неограниченно возрастающей при $r^2 = x^2 + y^2 \to \infty$. Ее производная по времени

$$\frac{dv}{dt} = bxf_1(x) - ayf_2(y)$$

есть знакоотрицательная функция. Производная $dv/dt$ может обращаться в нуль лишь на одной из осей $x = 0$ или $y = 0$, которые вследствие $a \neq 0$ и $b \neq 0$ не содержат на себе целиком положительных полутраекторий (3.1).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4 из статьи [7]. Теорема доказана.

*Лемма 3.1.* Пусть $ab \neq 0$ и выполняются условия

$$h_1(x) + h_2(y) < 0 \qquad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{3.4}$$

$$h_1(x)\, h_2(y) - ab > 0 \qquad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{3.5}$$

Тогда во всех случаях, за исключением (3.3), можно указать постоянные числа $c_1$ и $c_2$, удовлетворяющие условиям $c_1c_2 = ab$:

$$h_1(x) + c_2 \leqslant 0, \quad h_1(x)c_2 - ab \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0 \tag{3.6}$$

$$h_2(y) + c_1 \leqslant 0, \quad h_2(y)c_1 - ab \geqslant 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0 \tag{3.7}$$

причем по крайней мере в одном из условий (3.6) или (3.7) выполняются строгие неравенства.

*Доказательство.* Пусть сначала $ab < 0$. Случай (3.3), когда $h_1(x)$, $h_2(y)$ принимают только неположительные значения, согласно замечанию в условиях леммы, оставим в стороне. Пусть для определенности положительные значения принимает функция $h_2(y)$. Обозначим через $c_2$ точную верхнюю грань $h_2(y)$ при $y \neq 0$. Очевидно, $0 < c_2 < \infty$. Действительно, если $c_2 = \infty$, то, выбирая последовательность $y_1, \ldots, y_n$ такую, что $\lim h_2(y_n) = \infty$ при $n \to \infty$, и принимая для $x$ постоянное значение $x = x_0$, получили бы $\lim(h_2(y_n) + h_1(x_0)) = \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит (3.4).

Обозначим $c_1 = ab / c_2$. Вследствие $ab < 0$ и $c_2 > 0$ будет $c_1 < 0$. Справедливость (3.6) устанавливается переходом к пределу в (3.4) и (3.5), так как $c_2$ есть точная грань $h_2(y)$.

Докажем (3.7). Из (3.6) следует, что $h_1(x) \geqslant ab / c_2 = c_1$. Но в таком случае

$$c_1 + h_2(y) \leqslant h_1(x) + h_2(y) < 0 \tag{3.8}$$

что и доказывает первое из неравенств (3.7). По определению $c_2 \geqslant h_2(y)$, т. е. $h_2(y) \leqslant ab / c_1$, или, вследствие $c_1 < 0$, будет $h_2(y)c_1 \geqslant ab$, что равносильно второму неравенству (3.7).

Если $h_2(y)$ не принимает значений, равных ее верхней грани $c_2$, то, вследствие (3.8) и $c_1c_2 = ab$, в условиях (3.7) имеет место при всех $y \neq 0$ строгое неравенство. Если, напротив, функция $h_2(y)$ при некотором значении $y = y_0 \neq 0$ принимает значение $c_2$, то в условиях (3.6) имеет место строгое неравенство при всех $x \neq 0$. Действительно, если предположить, что при $x = x_0$ в одном из условий (3.6) наблюдается равенство, то в точке $x = x_0$, $y = y_0$ нарушались бы условия (3.4) или (3.5) леммы. Итак, в случае $ab < 0$ лемма доказана.

Аналогичным образом при $ab > 0$ нетрудно показать, что отрицательные числа $c_2$ и $c_1 = ab / c_2$, где $c_2$ — верхняя грань функции $h_2(y)$, при $y \neq 0$ удовлетворяют всем условиям леммы.

*Лемма 3.2.* Если обе функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ нелинейны и удовлетворяют условиям (3.4) и (3.5), то выполняется по крайней мере одно из условий:

$$\underline{\lim}\left[-\int_0^x (f_1(x)c_2 - abx)\,dx + (h_1(x) + c_2)\,|x|\right] = -\infty \quad \text{при } x \to \pm\infty \tag{3.9}$$

$$\underline{\lim}\left[-\int_0^y (f_2(y)c_1 - aby)\,dy + (h_2(y) + c_1)\,|y|\right] = -\infty \quad \text{при } y \to \pm\infty \tag{3.10}$$

Мы оставляем в стороне и здесь указанный выше исключительный случай (3.3).

*Доказательство.* Пусть сначала $ab > 0$. Из (3.6) и (3.7) вследствие отрицательности $c_1$ и $c_2$ имеем

$$h_1(x) \leqslant \frac{ab}{c_2} = c_1 < 0, \qquad h_2(y) \leqslant \frac{ab}{c_1} = c_2 < 0$$

Но тогда, очевидно, будет

$$h_1(x) + c_2 \leqslant c_1 + c_2 < -\varepsilon, \qquad h_2(y) + c_1 \leqslant c_1 + c_2 < -\varepsilon$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная. Следовательно, в условиях (3.9) и (3.10) вторые слагаемые в левых частях стремятся к $-\infty$ при $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$. Так как вследствие вторых неравенств (3.6) и (3.7)

$$\int_0^x (f_1(x) c_2 - abx)\, dx \geqslant 0 \qquad \int_0^y (f_2(y) c_1 - aby)\, dy \geqslant 0$$

то в случае $ab > 0$ можно считать лемму доказанной.

Пусть теперь $ab < 0$. Как и при доказательстве леммы 3.1, примем, не нарушая общности, что функция $h_2(y)$ принимает положительные значения. Обозначим через $c_2$ точную верхнюю грань $h_2(y)$ при $y \neq 0$ и $c_1 = ab / c_2$. Переходя к пределу в (3.7), получим $c_2 + c_1 \leqslant 0$, что вследствие $c_2 > 0$, $c_1 < 0$ означает $|c_1| \geqslant |c_2|$.

Пусть $|c_1| = |c_2|$, т. е. $c_1 = -c_2$. Тогда вследствие (3.6) будет $h_1(x) \leqslant -c_2 = c_1$ и $h_1(x) \geqslant ab / c_2 = c_1$, т. е. $h_1(x) \equiv c_1$ при всех $x \neq 0$. Но это исключается условиями леммы, ибо функция $f_1(x)$ была бы тогда линейной.

Пусть $|c_1| > |c_2|$. Рассмотрим для определенности случай $x > 0$ (при $x < 0$ рассуждения аналогичны). Предположим, что

$$\lim \int_0^x (f_1(x) c_2 - abx)\, dx = M < \infty \qquad \text{при } |x| \to \infty$$

Это возможно лишь в том случае, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать последовательность чисел $x_1, \ldots, x_n \to \infty$ такую, что $x_n > 0$ и

$$c_2 h_1(x_n) - ab < \varepsilon c_2 \qquad \text{при всех } n \tag{3.11}$$

Оценим величины $h_1(x_n) + c_2$. Вследствие (3.11) будет

$$h_1(x_n) < \frac{ab}{c_2} + \varepsilon = c_1 + \varepsilon \tag{3.12}$$

Полагая $\varepsilon = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ и прибавляя к обеим частям (3.12) по $c_2$, получим

$$h_1(x_n) + c_2 < c_1 + c_2 - \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2} = -\varepsilon \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что

$$\lim (h_1(x_n) + c_2)\, |x_n| = -\infty \qquad \text{при } n \to \infty \tag{3.14}$$

Итак, при условиях леммы либо

$$\lim \int_0^x (f_1(x) c_2 - abx)\, dx = \infty \qquad \text{при } x \to \infty \tag{3.15}$$

либо выполняется условие (3.14). Вследствие неположительности обоих слагаемых в (3.9) из (3.14) или (3.15) следует справедливость (3.9). Аналогичным образом можно показать, что при $ab<0$ в случае, если положительные значения может принимать функция $h_1(x)$, выполняется условие (3.10). Лемма доказана.

*Теорема 3.2.* Рассмотрим систему уравнений (3.1). Пусть обе функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ не являются линейными. Тогда для того, чтобы решение $x=y=0$ системы (3.1) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно выполнения условий (3.4) и (3.5).

*Доказательство.* Вследствие теоремы 3.1 и леммы 3.1 достаточно рассмотреть лишь случаи, когда выполняются условия (3.6) и (3.7), и в случае $ab<0$ можно принять $c_2>0$. Рассмотрим функцию [6]

$$2v(x, y)=(c_2^2-ab)\,x^2+\left(a^2-\frac{a^3b}{c_1^2}\right)y^2+2c_2\int_0^x f_1(x)\,dx+2\,\frac{a^2}{c_1}\int_0^y f_2(y)\,dy-2ac_2xy$$

где $c_1, c_2$ — числа, удовлетворяющие условиям (3.6), (3.7), и $ab=c_1c_2$. Очевидно, вследствие (3.6) и (3.7) $v(x, y)$ есть определенно-положительная функция. Вычислим $dv/dt$ в силу уравнений (3.1):

$$\frac{dv}{dt}=(h_1(x)+c_2)(h_1(x)c_2-ab)\,x_2+\frac{a^2}{c_1^2}(h_2(y)+c_1)(h_2(y)c_1-ab)\,y^2$$

Нетрудно видеть, что $dv/dt$ есть знакоотрицательная функция, обращающаяся в нуль, может быть, лишь на одной из осей $x=0$ или $y=0$. Рассмотрим траекторию $f(p, t)$ системы (3.1). Функцию $v(x, y)$ можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$2v_1(x, y)=(ay-c_2x)^2\geqslant 0$$

$$v_2(x)=\int_0^x (c_2f_1(x)-abx)\,dx\geqslant 0$$

$$v_3(y)=\frac{a^2}{c_1^2}\int_0^y (c_1f_2(y)-aby)\,dy\geqslant 0$$

Пусть значение $2v(x, y)$ в точке $p$ будет $v_p$. Вследствие $dv/dt\leqslant 0$ траектория $f(p, t)$ при $t>0$ лежит в области $2v(\ , y)\leqslant v_p$. Следовательно, вдоль $f(p, t)$ при $t>0$ будет выполняться неравенство

$$(ay-c_2x)^2\leqslant 2v(x, y)\leqslant v_p \tag{3.16}$$

т. е. траектория $f(p, t)$ не выходит из полосы $(ay-c_2x)^2\leqslant v_p$, которая, вследствие $c_2\neq 0$, не параллельна оси $x=0$. Вследствие (3.9) можно указать такое число $x_0>x_p$, $x_0>0$, что будет выполняться

либо
$$v_2(x_0)>v_p \tag{3.17}$$
либо
$$(h_1(x_0)+c_2)\,x_0<-2\sqrt{v_p} \tag{3.18}$$

Но в случае (3.17) траектория $f(p, t)$ не может пересечь прямую $x=x_0$ при $t>0$, ибо там $v(x, y)\geqslant v_2>v_p$.

В случае (3.18) имеем

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay = f_1(x) + c_2 x + ay - c_2 x$$

и внутри полосы $(ay - c_2 x)^2 \leqslant v_p$ будет

$$\frac{dx}{dt} < -\sqrt{v_p} < 0$$

т. е. траектории системы (3.1) пересекают прямую $x = x_0$ внутри полосы $(ay - c_2 x)^2 \leqslant v_p$ справа налево. Аналогичным образом можно показать, что существует такое число $x_0^* < x_p$, $x_0^* < 0$, что траектория $f(p, t)$ при $t > 0$ не может попасть на прямую $x = x_0^*$. Таким образом, при всех $t > 0$ траектория $f(p, t)$ остается внутри параллелограмма $x_0^* < x < x_0$, $(ay - c_2 x)^2 \leqslant v_p$, т. е. она ограничена при $t > 0$. На оси $x = 0$ или $y = 0$ не содержится целиком положительных полутраекторий системы (3.1), кроме $x = y = 0$, так как

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = ay \neq 0 \quad \text{при } y \neq 0, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = bx \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0$$

Таким образом, выполняются все условия [7] теоремы 4, за исключением требования, чтобы функция $v(x, y)$ была бесконечно большой. Однако из доказательства теоремы 4 нетрудно видеть [7], что это требование нужно лишь для того, чтобы доказать ограниченность решений при $t > 0$. Так как этот факт был установлен в данном случае непосредственно, то можно считать теорему 3.2 доказанной.

**§ 4.** Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + f_2(y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x) + by \tag{4.1}$$

*Лемма 4.1.* Пусть выполняются условия, аналогичные неравенствам Рауза-Гурвица:

$$a + b < 0 \tag{4.2}$$

$$ab - h_1(x)\, h_2(y) > 0 \tag{4.3}$$

Если всякая положительная полутраектория системы (4.1) лежит в конечной части плоскости $xy$, то решение $x = y = 0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую траекторию $f(p, t)$ системы (4.1). Ограниченная при $t > 0$ траектория $f(p, t)$ имеет ограниченное $\omega$-предельное множество $L$, которое состоит из целых траекторий [5]. Это множество содержит по крайней мере одну устойчивую по Пуассону траекторию [8]. По признаку Бендиксона [1] вследствие (4.2) система (4.1) не имеет периодических решений. Вследствие (4.3) система (4.1) не имеет особых точек, отличных от начала координат.

Следовательно, система (4.1) имеет единственную устойчивую по Пуассону траекторию — начало координат [5].

Итак, точка $x = y = 0$ является $\omega$-предельной точкой для $f(p, t)$.

Покажем, что начало координат не может быть $\alpha$-предельной точкой для траектории $f(p, t)$. Действительно, если предположить противное, можно указать две последовательности чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ ($t_n \to \infty$ при $n \to \infty$) и $t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-n}, \ldots$ ($t_{-n} \to -\infty$ при $n \to \infty$) такие, что $f(p, t_n) \to O$, $f(p, t_{-n}) \to O$ при $n \to \infty$. Здесь через $O$ обозначена точка $x = 0$, $y = 0$. Опишем вокруг начала координат окружность радиуса $\varepsilon$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $n_\varepsilon$, что точки $f(p, t_{n_\varepsilon})$ и $f(p, t_{-n_\varepsilon})$ будут лежать внутри этой окружности. Обозначим через $l_\varepsilon$ все замкнутые контуры, которые образуются дугами окружности и отрезками траектории $f(p, t)$, лежащими вне ее при $t_{-n_\varepsilon} < t < t_{n_\varepsilon}$. Вычислим интеграл

$$\oint (ax + f_2(y))\, dy - (f_1(x) + by)\, dx \qquad \text{по } l_\varepsilon \tag{4.4}$$

в направлении против часовой стрелки. Вдоль $f(p, t)$ интеграл равен нулю. Сумма интегралов, взятых вдоль дуг окружности, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, выбирая $\varepsilon$ достаточно малым, получим

$$\left| \oint_{l_\varepsilon} (ax + f_2(y))\, dy - (f_1(x) + by)\, dx \right| < \varepsilon_1 \tag{4.5}$$

где $\varepsilon_1$ — произвольно малое число. С другой стороны[1],

$$\oint_{l_\varepsilon} (ax + f_2(y))\, dy - (f_1(x) + by)\, dx = \iint_\Gamma (a + b)\, dx\, dy = S_\varepsilon (a + b) \tag{4.6}$$

где $S_\varepsilon$ — площадь, ограниченная $l_\varepsilon$. Так как при $\varepsilon \to 0$ величина $S_\varepsilon > \delta$, где $\delta > 0$, то (4.5) и (4.6) приводят к противоречию. Итак, траектория $f(p, t)$ не может примыкать к точке $x = 0$, $y = 0$ при $t \to \infty$.

Предположим, что решение $x = y = 0$ системы (4.1) неустойчиво по Ляпунову. Тогда можно указать число $r > 0$ и последовательность точек $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ таких, что $\lim q_n = 0$ при $n \to \infty$ и траектории $f(q_n, t)$ при $t > 0$ попадают на окружность

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.7}$$

Пусть $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ точки, в которых траектории $f(q_n, t)$ впервые при $t = t_n > 0$ попадают на эту окружность.

Последовательность точек $p_n$ имеет на окружности (4.7) предельную точку $P$. Рассмотрим траекторию $f(P, t)$. Отрицательная полутраектория $f(P, t)$ не может лежать целиком внутри (4.7), так как тогда ее $\alpha$-предельное множество содержало бы устойчивую по Пуассону траекторию, т. е. в данном случае начало координат, что невозможно.

Таким образом, существует такое число $\tau < 0$, что точка $f(P, \tau)$ лежит вне окружности (4.7). Но по свойству интегральной непрерывности вне окружности (4.7) должны лежать и точки $f(p_n, \tau)$ при достаточно больших значениях $n$, что, очевидно, противоречит выбору последовательности точек $q_n$. Противоречие доказывает устойчивость решения $x = y = 0$ по Ляпунову. Лемма доказана.

Рассмотрим два частных случая системы (4.1).

---

[1] Обоснование возможности применения формулы (4.6) см. в работе Н. П. Еругина[1].

*Теорема 4.1.* Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x) + f_2(y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x) \tag{4.8}$$

Если функции

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x}, \qquad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{y}, \qquad g(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

удовлетворяют неравенствам

$$g(x) < 0, \qquad h_1(x)\, h_2(y) < 0 \qquad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{4.9}$$

то для устойчивости решения $x = y = 0$ системы (4.9) в целом достаточно выполнения условий

$$\lim \left| \int_0^y f_2(y)\, dy \right| = \infty \qquad \text{при } |y| \to \infty \tag{4.10}$$

$$\underline{\lim} \left( \varphi(x) \operatorname{sign} x - \left| \int_0^x f_1(x)\, dx \right| \right) = -\infty \qquad \text{при } |x| \to \infty \tag{4.11}$$

*Доказательство.* Вследствие (4.9) функции $h_1(x)$ и $h_2(y)$ сохраняют знак. Пусть для определенности

$$h_1(x) < 0, \qquad h_2(y) > 0 \qquad \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{4.12}$$

При этих условиях функция

$$v(x, y) = \int_0^y f_2(y)\, dy - \int_0^x f_1(x)\, dx$$

будет определенно-положительной. Вычислим $dv / dt$ в силу (4.8):

$$\frac{dv}{dt} = -g(x)\, h_1(x)\, x^2 \tag{4.13}$$

Производная $dv / dt$ отрицательна всюду, кроме оси $x = 0$, где $dv / dt = 0$. При $x = 0$ имеем $dx / dt = f_2(y) \neq 0$ при $y \neq 0$, и, следовательно, на оси $x = 0$ не содержится целиком положительных полутраекторий системы (4.8). Вследствие (4.10) и $dv / dt \leqslant 0$ траектория $f(p, t)$ системы (4.8) лежит внутри некоторой полосы $-M < y < M$, где $M$ — достаточно большое число. Используя (4.11), нетрудно показать, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.2, что траектория $f(p, t)$ не может уходить в бесконечность вдоль этой полосы при возрастании времени. Но в таком случае выполнены все условия, при которых обеспечивается устойчивость решения $x = y = 0$ системы (4.8) в целом (см. стр. 660). Теорема доказана.

Следствием теоремы 4.1 является следующая теорема.

*Теорема 4.2.* Рассмотрим систему (4.1). Пусть $b = 0$ и выполнены условия (4.2) и (4.3). Тогда для устойчивости решения $x = y = 0$ в целом достаточно выполнения (4.10).

Действительно, при $b = 0$ система (4.1) имеет вид (4.8), где $\varphi(x)$ — линейная функция $ax$. Но в таком случае условие (4.11) есть очевидное следствие условий (4.2) и (4.3).

*Теорема 4.3.* Пусть $a<0$ и $b<0$

$$h_1(x)\leqslant 0, \qquad h_2(y)\geqslant 0 \qquad \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0 \tag{4.14}$$

тогда решение $x=y=0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом.

Вследствие леммы 4.1 для доказательства теоремы достаточно показать, что всякая положительная полутраектория системы (4.1) при условиях теоремы ограничена. Этот факт в данном случае устанавливается применением знакоположительной функции

$$v(x,\ y)=\int_0^y f_2(y)\,dy-\int_0^x f_1(x)\,dx$$

имеющей знакоотрицательную производную по времени

$$\frac{dv}{dt}=-ah_1(x)\,x^2+bh_2(y)\,y^2$$

Рассмотрим теперь общий случай системы (4.1). В дальнейшем предполагается $ab\neq 0$.

*Лемма 4.2.* Пусть функции $h_1(x)$, $h_2(y)$ удовлетворяют условиям (4.3) и $ab\neq 0$. Тогда, за исключением частного случая (4.14), можно указать постоянные числа $c_1$, $c_2$, удовлетворяющие условиям

$$c_1c_2=ab \tag{4.15}$$

$$c_1(h_1(x)-c_1)\leqslant 0, \quad c_2(h_2(y)-c_2)\leqslant 0 \quad \text{при } ab>0\ x\neq 0,\ y\neq 0 \tag{4.16}$$

или

$$c_1(h_1(x)-c_1)\geqslant 0, \quad c_2(h_2(y)-c_2)\geqslant 0 \quad \text{при } ab<0,\ x\neq 0,\ y\neq 0 \tag{4.17}$$

причем для каждого из условий (4.16) или (4.17) по крайней мере одно из неравенств является строгим.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.2. За числа $c_1$ или $c_2$ достаточно взять одну из точных границ функций $h_1(x)$ или $h_2(y)$. Заметим лишь следующее. Можно показать, что в случае $ab>0$, если обе функции $h_1(x)$ и $h_2(y)$ принимают значения разных знаков, то существуют две пары чисел $c_1$, $c_2$ и $c_1{}^*$, $c_2{}^*$, удовлетворяющие условиям (4.15) и (4.16), причем $c_1<0$, $c_1{}^*>0$.

*Теорема 4.4.* Рассмотрим систему уравнений (4.1). Пусть $ab>0$ и выполняются условия (4.2) и (4.3). Если по крайней мере одна из функций $f_1(z)$ или $f_2(z)$ не меняет знака при $z>M$ или $z<-M$, где $M$ — достаточно большое число, то решение $x=y=0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Покажем, что при условиях теоремы всякая траектория системы (4.1) ограничена при $t>0$. Вследствие теоремы 4.3 достаточно рассмотреть случай, когда по крайней мере одна из функций $h_1(x)$ или $h_2(y)$ меняет знак. Пусть сначала обе функции $h_1(x)$, $h_2(y)$ принимают значения обоих знаков. Как указывалось выше, в этом случае существуют две пары чисел $c_1$, $c_2$ и $c_1{}^*$, $c_2{}^*$, удовлетворяющих (4.15) и (4.16), причем $c_1<0$, $c_1{}^*>0$.

Рассмотрим функцию $2v(x, y) = (ay - c_1 x)^2$. В силу (4.1) имеем

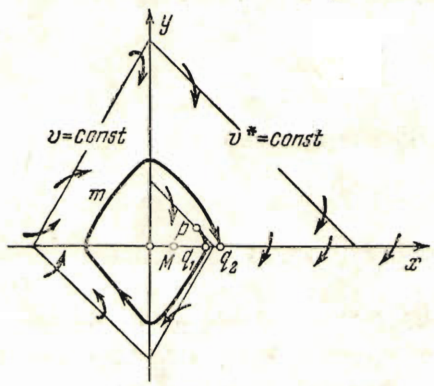
$$\frac{dv}{dt} = (ay - c_1 x)\ [(h_1 - c_1)\, ax - c_1 (h_2 - c_2)\, y] \tag{4.18}$$

Очевидно, вследствие (4.16) и $c_1 < 0$ в области $xy \leqslant 0$ будет $dv / dt \leqslant 0$. Аналогичным образом для функции $2v^* = (ay - c_1^* x)^2$

$$\frac{dv^*}{dt} = (ay - c_1^* x)\ [(h_1 - c_1^*)\, ax - c_1^* (h_2 - c_2^*)\, y] \tag{4.19}$$

и вследствие (4.16) и $c_1^* > 0$ в области $xy \geqslant 0$ будет $dv / dt \leqslant 0$. Таким образом, траектории системы (4.1) пересекают линии уровня функций $v(x, y)$ и $v^*(x, y)$ в соответствующих областях плоскости $xy$ в направлении к началу координат.

Итак, неограниченная траектория $f(p, t)$ может уходить в бесконечность при возрастании времени лишь внутри коридора (фиг. 2), образованного спиралью[1] из линий уровня $v(x, y) = c$ и $v^*(x, y) = c$.




Фиг. 2

Пусть для определенности функция $f_1(x)$ при $x > M$ не меняет знака. Уходящая в бесконечность траектория $f(p, t)$ должна образовать виток $q_1 m q_2$ раскручивающейся спирали. Так как отрезок $q_1 q_2$ пересекается траекториями (4.1) в одном направлении, так как производная $dy / dt = f_1(x)$ при $y = 0$ не меняет знака на отрезке $q_1 q_2$, то поток вектора $(ax + f_2(y))\,\mathbf{i} + (f_1(x) + by)\,\mathbf{j}$ через контур $q_1 q_2 m q_1$

$$\oint\limits_{l} (ax + f_2(y))\, dy - (f_1(x) + by)\, dx \tag{4.20}$$

был бы положительным, что вследствие

$$\oint\limits_{l} (ax + f_2(y))\, dy - (f_1(x) + by)\, dx = \iint\limits_{\Gamma} \left( \frac{\partial (ax + f_2(y))}{\partial x} + \frac{\partial (f_1(x) + by)}{\partial y} \right) dx\, dy \tag{4.21}$$

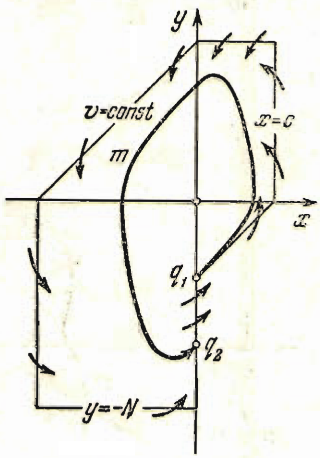
противоречит (4.2). Противоречие показывает, что траектория $f(p, t)$ ограничена при $t > 0$. Пусть теперь для определенности функция $h_2(y)$ не принимает положительных значений при $y \neq 0$. Это не нарушает общности, так как переменные $x$, $y$ в системе (4.1) при $ab > 0$ равноправны, а случай $h_2(y) \geqslant 0$ сводится к рассматриваемому заменой переменных $x_1 = -x$, $y_1 = y$. При $h_2(y) \leqslant 0$ числа $c_1$, $c_2$ отрицательны. Вследствие (4.18) в области $xy \leqslant 0$ траектории (4.1) пересекают линии уровня функции $v(x, y) = c$ в направлении к началу координат.

Вычислим $d(x^2) / dt$ в силу (4.1):

$$\frac{d(x^2)}{dt} = 2(ax^2 + h_2(y)\, xy) \tag{4.22}$$

[1] Метод исследования траекторий на плоскости при помощи спиралей предложен в работе С. А. Стебакова [9].

Так как $a < 0$ и $h_2(y) \leqslant 0$, то в области $xy \geqslant 0$ будет $d(x^2)/dt \leqslant 0$, т. е. прямые $x = c$ пересекаются траекториями (4.1) в направлении к оси $x = 0$. Вследствие $b < 0$ и непрерывности $f_1(x)$ можно указать столь большое число $N$, что прямые $|y| = N$ будут пересекаться траекториями (4.1) внутри полосы $|x| < c$ в направлении к оси $y = 0$. Итак, рассмотренные прямые образуют спирали, ограничивающие поведение траектории $f(p, t)$ (фиг. 3).




Фиг. 3

Таким образом, и в этом случае уходящая в бесконечность при возрастании $t$ траектория $f(p, t)$ должна образовать спираль (фиг. 3).

Рассматривая интеграл (4.20) по контуру $q_2q_1mq_2$, видим, что вследствие $dx/dt = h_2y > 0$ при $x = 0$, $y < 0$, он должен быть положителен, если траектория $f(p, t)$ образует виток $q_2q_1mq_2$ развертывающейся спирали. Но это вследствие (4.21) противоречит условию (4.2).

Итак, действительно всякая траектория $f(p, t)$ (4.1) при $t > 0$ ограничена, т. е. выполняются все условия леммы 4.1, что и доказывает теорему.

*Теорема 4.5.* Пусть $ab < 0$ и выполняются условия (4.2) и (4.3). Тогда решение $x = y = 0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Пусть $c_1$, $c_2$ — числа, удовлетворяющие условиям (4.15) и (4.17). Не уменьшая общности, примем $a > 0$.

Возможны два случая: $c_1 > 0$ и $c_1 < 0$. Однако заменой переменных $y_1 = -y$, $x_1 = x$ один случай сводится к другому. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $a > 0$, $c_1 > 0$.

В области $xy \leqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{dt} = h_1(x)xy + by^2 \leqslant 0 \tag{4.23}$$

ибо вследствие $c_1 > 0$ и (4.17) $h_1(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Таким образом, в области $xy < 0$ прямые $y = c$ пересекаются траекториями (4.1) в направлении оси $y = 0$.

Рассмотрим функцию $2u(x, y) = (kx - ay)^2$, где $k$ — постоянное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < k < c_1$.

Вычислим $du/dt$ в силу (4.1):

$$\frac{du}{dt} = ak(k - h_1)x^2 + a^2h_1xy + R(x, y) \tag{4.24}$$

где $R(x, y)$ состоит из членов, содержащих $x$, $y$, $h_2$. Очевидно, для всякого $y = y_0 > 0$ можно указать столь большое $x = x_0$, что при $|x| > x_0$ внутри полосы $|y| < y_0$ будет $du/dt < 0$. Таким образом, в области $xy \leqslant 0$ траектории (4.1) при $t > 0$ не могут выйти из области $H$, которая будет ограничена соответствующим образом подобранными прямыми $y=c$ и $u=c$ (фиг. 4).

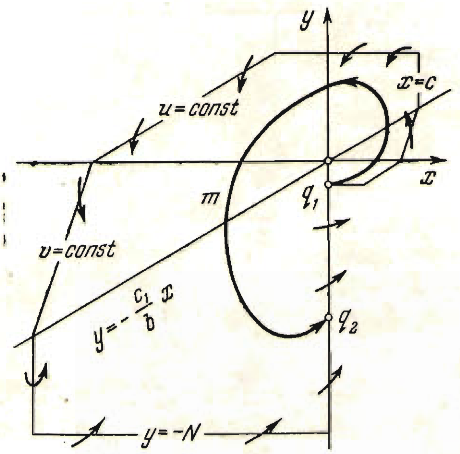
Рассмотрим поведение траектории $f(p, t)$ в области $x>0$, $y>0$. Вследствие (4.17) и (4.18) в области $y \leqslant -(c_1 / b) x$ будет $dv / dt \leqslant 0$ для функции $2v = (ay - c_1 x)^2$. Действительно, $a + b < 0$, и так как $a > 0$, то

$$|b| > |a| \tag{4.25}$$

и, следовательно,

$$(ay - c_1 x) < (-by - c_1 x) \qquad \text{при } x>0,\ y>0$$

что и доказывает утверждение вследствие (4.17), (4.18) $c_1 > 0$, $a > 0$. Имеем



Фиг. 4

$$\frac{dx}{dt} = ax + f_2(y) =$$

$$= ax + \frac{ab}{c_1} y + (h_2(y) - c_2) y =$$

$$= \frac{a}{c_1}(c_1 x + by) + (h_2 - c_2) y$$

и в области $y \geqslant -(c_1 / b) x$ вследствие (4.17) производная $dx / dt \leqslant 0$, т. е. при $x>0$, $y>0$ прямые $x=c$ пересекаются траекториями (4.1) при $y \geqslant -(c_1 / b) x$ справа налево. Но при $b<0$ можно указать столь большое число $N$, что в полосе $|x|<c$ на прямой $y=N$ будем иметь, что производная $dy / dt = f_1(x) + bN < 0$, т. е. траектории (4.1) будут пересекать эту прямую сверху вниз. Рассматривая аналогичным образом поведение траекторий (4.1) при $x<0$, $y<0$, убедимся, что траектория $f(p, t)$ может уходить в бесконечность при $t>0$ лишь вдоль коридора, образованного спиралью, составленной из рассмотренных выше ограничивающих кривых (фиг. 4).

Вследствие (4.17) и $c_2 = ab / c_1 < 0$, $h_2(y) < 0$, т. е. траектории (4.1) пересекают полуось $x=0$, $y=0$ в одном направлении. Дальнейшее доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 4.4.

*Теорема 4.6.* Пусть $ab>0$ и выполняются условия (4.2) и (4.3). Тогда для асимптотической устойчивости в целом решения $x=y=0$ системы (4.1) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$|h_1(x) - c_1|\, |h_2(y) - c_2| \leqslant 4ab \tag{4.26}$$

где $c_1$, $c_2$ — числа, удовлетворяющие (4.16) и (4.15).

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$2v_1(x, y) = (ay - c_1 x)^2 - 2c_1 \int_0^y (f_2(y) - c_2 y)\, dy - 2\frac{a^2}{c_2} \int_0^x (f_1(x) - c_1 x)\, dx \tag{4.27}$$

На основании леммы 4.2 по крайней мере в одном из условий (4.16) выполняется строгое неравенство.

Пусть для определенности

$$c_1(h_1(x)-c_1)<0 \quad \text{при } x\neq 0 \tag{4.28}$$

Вследствие (4.16) $v_1(x, y)$ есть определенно-положительная функция, причем благодаря (4.28) имеем

$$v_1(x_1, 0)<v_1(x_2, 0) \quad \text{при } 0<x_1<x_2 \tag{4.29}$$

Вычислим производную $dv_1/dt$ в силу уравнений (4.1):

$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{a}{c_2}(a+b)\;[(h_1-c_1)\,ax^2+(h_2-c_2)\,by^2+(h_1-c_1)\,(h_2-c_2)\,xy] \tag{4.30}$$

Вследствие (4.16) неравенство (4.26) есть условие знакоотрицательности функции $dv_1/dt$, т. е. функция $v_1(x, y)$ убывает вдоль траектории $f(p, t)$ системы (4.1) при возрастании времени. Однако, как показано при доказательстве теоремы 4.4, траектория $f(p, t)$ может уходить в бесконечность при возрастании времени лишь вдоль коридора, образованного прямыми $v(x, y)=c$, $v^*(x, y)=c^*$ (фиг. 2), т. е. она должна пересекать при этом полуось $y=0$, $x>0$ в точках $x_1, \ldots, x_n, \ldots\to\infty$, что невозможно вследствие (4.29) и $dv_1/dt\leqslant 0$. Таким образом, траектория $f(p, t)$ ограничена при $t>0$, а это, вследствие леммы 4.1, и доказывает теорему.

Заметим, что условия (4.26) являются следствием условий (4.3), если

$$\sup\left(\frac{f_i(z)}{z}\right)=-\inf\left(\frac{f_i(z)}{z}\right) \quad \text{при } z\neq 0 \ (i=1,\ i=2)$$

т. е., в частности, если одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(y)$ будет четной.

§ 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(y), \qquad \frac{dy}{dt}=ax+by \tag{5.1}$$

В дальнейшем полагаем $ab<0$. В случае $a=0$ вопрос об устойчивости решается непосредственным интегрированием уравнений (5.1), а в случае $b=0$ достаточные условия устойчивости в целом для (5.1) даются теоремой 4.1. Случай $ab>0$ сводится к рассматриваемому заменой переменных $x_1=x$, $-y_1=y$.

*Лемма 5.1.* Пусть функции $h_1=x^{-1}f(x)$, $h_2=y^{-1}f_2(y)$ удовлетворяют условиям

$$h_1(x)+b<0, \qquad x\neq 0 \tag{5.2}$$

$$h_1(x)\,b-h_2(y)\,a>0, \qquad x\neq 0,\ y\neq 0 \tag{5.3}$$

Тогда существуют числа $c_1$, $c_2$, удовлетворяющие условиям

$$c_1b-c_2a=0 \tag{5.4}$$

$$h_1(x)-c_1\geqslant 0, \qquad h_2(y)-c_2\geqslant 0 \qquad \text{в случае } b>0 \tag{5.5}$$

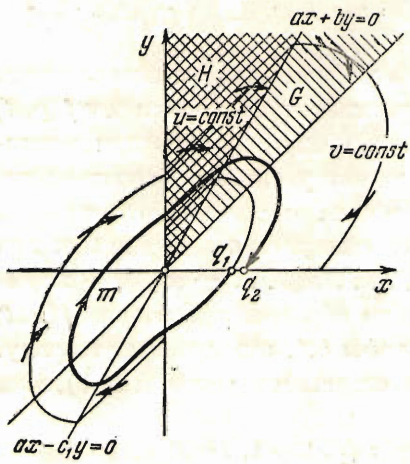
$$h_1(x)-c_1\leqslant 0, \qquad h_2(y)-c_2\leqslant 0 \qquad \text{в случае } b<0 \tag{5.6}$$

$$c_2\geqslant-\frac{b^2}{a} \tag{5.7}$$

причем по крайней мере в одном из условий (5.5) и (5.6) выполняется строгое неравенство.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.1. В качестве числа $c_2$ следует принять в случае $b>0$ точную нижнюю грань функции $h_2(y)$ при $y\neq 0$. В случае $b<0$, если точная верхняя грань $h_2(y)$ при $y\neq 0$ больше $-b^2/a$, ее следует принять за $c_2$, в противном случае следует за $c_2$ принять число $-b^2/a$. Заметим еще, что в случае $b>0$ в условии (5.7) выполняется строгое неравенство.

*Теорема 5.1.* Пусть $b>0$, $a<0$. Если выполняются условия (5.3) и $\varphi(x)=f_1(x)+bx$ убывает монотонно по $x$, то решение $x=y=0$ системы (5.1) асимптотически устойчиво в целом.




Фиг. 5

*Доказательство.* Так как условие теоремы является, очевидно, более сильным, чем (5.2), то существуют числа $c_1$, $c_2$, удовлетворяющие (5.4), (5.6) и (5.7). Рассмотрим функцию

$$v(x, y)= \frac{1}{2}(ax+by)^2-a\int_0^y\left(f_2(y)+\frac{b^2}{a}y\right)dy$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^y\left(f_2(y)+\frac{b^2}{a}y\right)dy\geqslant\frac{\varepsilon}{2}y^2 \qquad (\varepsilon>0) \tag{5.8}$$

В самом деле, как указано, при $b>0$ имеет место $c_2>-b^2/a$, т. е. существует такое число $\varepsilon>0$, что $c_2+b^2/a\geqslant\varepsilon$, но тогда справедливость (5.8) следует из неравенства (5.5) применением к интегралу

$$\int_0^y\left[\left(\frac{f_2(y)}{y}-c_2\right)+\left(c_2+\frac{b^2}{a}\right)\right]y\,dy=\int_0^y\left(f_2(y)+y\frac{b^2}{a}\right)dy$$

теоремы о среднем. Следовательно, $v(x, y)\to\infty$ при $x^2+y^2\to\infty$, т. е. линии уровня функции $v(x, y)=c$ есть замкнутые кривые.

Вычислим $dv/dt$ в силу (5.1):

$$\frac{dv}{dt}=ax\,(h_1(x)+b)\;(ax+by) \tag{5.9}$$

Из (5.2) и (5.9) следует, что в области $(ax+by)\,x<0$ траектории (5.1) пересекают линии уровня функции $v(x, y)=c$ снаружи внутрь. Вычислим теперь $du/dt$ в силу (5.1) для функции $2u=(ax-c_1y)^2$:

$$\frac{du}{dt}=a\,(ax-c_1y)\,[(h_1(x)-c_1)\,x+(h_2(y)-c_2)\,y] \tag{5.10}$$

Вследствие (5.5) и (5.2) $c_1<-b$, поэтому область $G\,(ax-c_1y)\,x>0$, $xy>0$ содержит в себе область $H\,(ax+by)\,x>0$, $xy>0$. Но в области $G$, очевидно, $du/dt<0$, т. е. и в области $H$ траектории (5.1) пересекают линии уровня $u=c$ в сторону убывания функции $u(x, y)$. Следовательно, из линий уровня $u=c$, $v=c$ можно построить спирали, ограничивающие поведение траекторий (5.1), подобно тому как это было сделано при доказательстве теорем 4.4 и 4.5 (фиг. 5).

Пусть траектория $f(p, t)$ пересекает ось $y = 0$ в точках $q_1$, $q_2$. Заменим в системе (5.1) переменные по формулам

$$x_1 = -ax - by, \qquad y_1 = y$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -x_1$$

Вычислим

$$\oint_l (-a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1)\, dy_1 + x_1 dx_1 \tag{5.11}$$

где $l$ — контур $q_1 q_2 m q_1$, проходимый против часовой стрелки. Если точка $q_2$ лежит правее $q_1$, то

$$\oint_l (-a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1)\, dy_1 + x_1 dx_1 = \int_{x_{q_1}}^{x_{q_2}} x_1 dx_1 > 0 \tag{5.12}$$

Однако, применяя для вычисления интеграла (5.11) формулу[1]

$$\oint_l (-a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1)\, dy_1 + x_1\, dx_1 =$$

$$= \iint_\Gamma d_{x_1}(-a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1) + d_{y_1} x_1 dx_1 \tag{5.13}$$

получим

$$\oint_l (-a(f_1(x) + f_2(y)) + bx_1)\, dy_1 + x_1 dx_1 = -a \iint_\Gamma d_{x_1} \varphi\left(-\frac{by_1 + x_1}{a}\right) dy \tag{5.14}$$

Так как функция $\varphi$, вследствие условий теоремы, монотонно убывает по $x_1$, то последний интеграл в (5.14) должен быть отрицательным, что противоречит (5.12). Таким образом, траектория $f(p, t)$ не может образовать виток $q_1 m q_2$ раскручивающейся спирали, т. е. она ограничена при $t > 0$. Используя (5.11), монотонность $\varphi(x)$ и формулу (5.13), можно так же, как в § 4, доказать для системы (5.1) утверждения, аналогичные лемме 4.1, что и доказывает теорему.

*Теорема 5.2.* Пусть $b < 0$, $a > 0$. Если выполняются условия (5.3)

$$f_1(x_1) + bx_1 > f_1(x_2) + bx_2 \qquad \text{при } x_2 > x_1 \tag{5.15}$$

$$\lim \left| \int_0^y (f_2(y) - c_2 y)\, dy \right| = \infty \qquad \text{при } |y| \to \infty \tag{5.16}$$

то решение $x = y = 0$ системы (5.1) асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$2v(x, y) = (bx - c_2 y)^2 - 2\frac{b^2}{a}\int_0^y (f_2(y) - c_2 y)\, dy$$

Вследствие $ab < 0$ имеем

$$-\frac{b^2}{a}\int_0^y (f_2(y) - c_2 y)\, dy \geqslant 0 \qquad \text{при } y \neq 0 \tag{5.17}$$

так как $y^{-1} f_2(y) - c_2 \leqslant 0$ вследствие (5.6). Кроме того, при $x^2 + y^2 \to \infty$ имеем $v(x, y) \to \infty$ в силу (5.16). Таким образом, $v(x, y)$ есть знакоположительная функция и линии $v(x, y) = c$ суть замкнутые кривые.

Вычислим $dv/dt$ согласно (5.1):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b^2}{a}(h_2 - c_2)(b + c_1)y^2 + (h_1 - c_1)(bx - c_2y)bx \tag{5.18}$$

Вследствие (5.4) и (5.7) $c_1 + b \leqslant 0$ и, следовательно, в области $(bx - c_2y)x < 0$ будет при условиях (5.6) и (5.7) $dv/dt \leqslant 0$. Так как $c_2 \geqslant -b^2/a$, то при $y > 0$ прямая $bx - c_2y = 0$ образует больший угол с осью $y = 0$, чем прямая $by + ax = 0$. Следовательно, в области $H$ (фиг. 6) имеем $dv/dt \leqslant 0$, т. е. линии уровня $v(x, y) = c$ пересекаются траекториями системы (5.1) снаружи внутрь (фиг. 6).

Но в области $G$ будет $d(y^2)/dt = 2(ax + by)y < 0$, т. е. прямые $y = c$ пересекаются в этой области траекториями (5.1) в направлении к оси $y = 0$. Таким образом, из линий уровня $v = c$ и $y = c$ можно построить спирали, ограничивающие поведение траекторий системы (5.1) (фиг. 6).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1.

В заключение параграфа покажем, что, в отличие от уравнений (2.1), (3.1), (4.1), выполнение условий (1.3) и даже более сильных условий

$$h_1(x) + b < -\varepsilon, \qquad h_1(x)b - h_2(y)a > \varepsilon \tag{5.19}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, недостаточно для того, чтобы решение $x = y = 0$ системы (5.1) было асимптотически устойчивым по Ляпунову. Рассмотрим систему уравнений с разрывными правыми частями:

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + \varphi_1(x) + \varphi_2(y), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + y \tag{5.20}$$

Сначала определим функции $g_1(x) = x^{-1}\varphi_1(x)$, $g_2(y) = y^{-1}\varphi_2(y)$ при $|x| < 1$, $|y| > 1$. Пусть

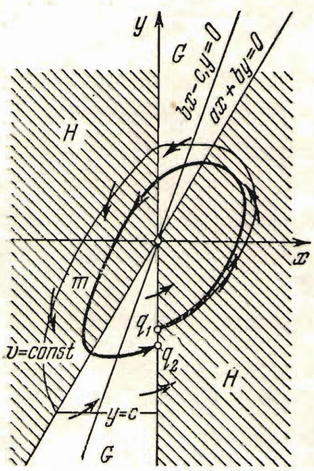
$$g_2(y) = 1 \text{ при } |y| > 1, \qquad g_2(y) = M \text{ при } |y| < 1,$$

где число $M \gg 1$ будет определено ниже (5.21)

$$g_1(x) = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{при } |x| < 1 \tag{5.22}$$

Очевидно, для (5.20) условия (5.19) в области $|x| < 1$ выполнены. Рассмотрим функцию

$$2v(x, y) = (x - y)^2 + 2\int_0^y \varphi_2(y)\,dy$$




Фиг. 6

Очевидно, линии уровня $v(x, y) = c$ имеют вид, представленный на фиг. 7. Вдоль траекторий (5.20) имеем

$$\frac{dv}{dy} = -\varphi_1(x) \tag{5.23}$$

Рассмотрим траекторию $f(p_0, t)$ системы (5.20), проходящую при $t = 0$ через точку $p_0(0, 1)$. Вследствие (5.23) и $dy/dt > 0$ на отрезке траектории $p_0p_1$ будет $dv/dt > 0$. Обозначим значения функции $v(x, y)$ в точках $p_i$ через $v_i$. Рассмотрим отрезки кривых $v(x, y) = c$ для $v_0 \leqslant c \leqslant v_1$, лежащие в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \geqslant 1$. Угловой коэффициент касательных к этим кривым имеет положительный минимум $m$. Выберем теперь число

$M$ столь большим, чтобы угловой коэффициент касательных к отрезкам этих кривых $v = c$, $v_0 \leqslant c \leqslant v_1$, лежащих в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y < 0$, имел максимум, меньший чем $\frac{1}{4}m$, что всегда возможно.

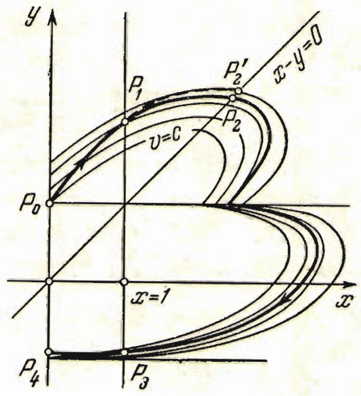
Обозначим через $N_1$ наибольшее значение $x$ на кривой $v(x, y) = v(x_{p_2}', y_{p_2}')$, где $p_2'$ — та точка, в которую пришла бы траектория $f(p_0, t)$ если бы и при $x > 1$ было $g_1(x) = -\frac{1}{2}$; $N_2 = y_{p_2}' + 1$.

Выберем теперь $\varepsilon_1 > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$N_1 N_2 \varepsilon_1 < (v_1 - v_0)\frac{1}{4} \tag{5.24}$$

Определим функцию $g_1(x)$ при $1 < |x| < N_1$ следующим образом:

$$g_1(x) = -\varepsilon_1 \tag{5.25}$$




Фиг. 7

Оценим изменение функции $v(x, y)$ вдоль $f(p_0, t)$ на пути от точки $p_1$ до точки $p_3$:

$$v_3 - v_1 > \int\limits_{y_1}^{y_3} -\varphi_1(x)\, dy > -\varepsilon_1 N_1 N_2 > -\frac{1}{4}(v_1 - v_0) \tag{5.26}$$

Предположим, что при дальнейшем движении точка $f(p_0, t)$ остается в области $y \geqslant -1$. Оценим изменение функции $v(x, y)$ вдоль $f(p_0, t)$ на пути $p_3 p_4$. На этом участке в силу $dy/dt < 0$ и (5.23) $dv/dt < 0$, т. е. траектория $f(p_0, t)$, пересекает линии уровня $v = c$ внутрь. Но вследствие выбора $M$ угловой коэффициент касательной к кривой $p_3 p_4$ по крайней мере в четыре раза меньше, чем угловой коэффициент касательной к кривой $p_0 p_1$, при том же значении $x$. Таким образом,

$$|v_1 - v_0| = \left| \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\, y_{01}'(x)\, dx \right| \quad \text{где} \quad y_{01}'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{на } p_0 p_1$$

$$|v_4 - v_3| = \left| \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\, y_{34}'(x)\, dx \right| \quad \text{где} \quad y_{34}'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{на } p_3 p_4$$

и вследствие $y_{01}' > 4y_{34}'$

$$|v_4 - v_3| < \frac{1}{4}(v_1 - v_0) \tag{5.27}$$

Следовательно, учитывая (5.26) и (5.27), получим

$$v_4 - v_0 > \frac{1}{2}(v_1 - v_0) > 0 \tag{5.28}$$

т. е. предположение $y(t) \geqslant 1$ неверно, ибо траектория $f(p_0, t)$ пересекает ось $x = 0$ в точке $p_4$, где $v_4 > v_0$, т. е. ниже точки $x = 0$, $y = -1$. В силу четности $g_1(x)$ и $g_2(y)$ аналогичную картину поведения получим и для траектории $f(q_0, t)$, выходящей из точки $x = 0$, $y = -1$.

Заметим, что поведение траекторий $f(p_0, t)$ и $f(q_0, t)$ существенно не изменится при произвольном изменении $g_1(x)$ и $g_2(y)$ внутри полос

$$|y-1| < \delta, \quad |y+1| < \delta, \quad |y| < \delta, \quad |x| < \delta, \quad |x-1| < \delta, \quad |x+1| < \delta$$

(где $\delta$ — достаточно малое положительное число) при условии, что $|g_1(x)| \leqslant M$ и $|g_2(y)| \leqslant M$; другими словами, и для измененных уравнений эти траектории будут образовывать раскручивающиеся спирали.

Это следует из свойства интегральной непрерывности для рассматриваемых систем уравнений. Однако функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ можно так изменить внутри указанных выше полос, что они будут непрерывны в точках $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ и будут удовлетворять условиям (5.19)

Определим внутри квадрата $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ функции $g_1(x)$ и $g_2(y)$ аналогично тому, как это было сделано выше в квадрате $|x| < N$, $|y| < N$, где $N = 2\max(N_1, N_2)$, изменяя все размеры в одно и то же число раз $k = \delta / N$, т. е.

$$g_1(x) = -\varepsilon_1 \quad \text{при} \quad \frac{\delta}{N} < |x| < \delta, \qquad g_1(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{при} \, |x| < \frac{\delta}{N}$$

$$g_2(y) = 1 \quad \text{при} \quad \frac{\delta}{N} < |y| < \delta, \qquad g_2(y) = M \quad \text{при} \, |y| < \frac{\delta}{N}$$

Траектория $f(p_{01}, t)$, проходящая через точку $p_{01}(0, \delta / N)$, получается из траектории $f(p_0, t)$, если координаты точек этой последней $x = x(t)$, $y = y(t)$ подвергнуть подобному преобразованию $x_1 = x(\delta / N)$, $y_1 = y(\delta / N)$. Таким образом, траектории $f(p_{01}, t)$, $f(q_{01}, t)$ будут, подобно траекториям $f(p_0, t)$, $f(q_0, t)$, ограничивать область вокруг начала координат, куда не может проникнуть ни одна траектория системы (5.1). Продолжая поступать аналогичным образом дальше, определим функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ так, что будет существовать система замкнутых кривых, построенных из траекторий $f(p_{0i}, t)$, $f(q_{0i}, t)$ $(i = 1, \ldots, n, \ldots)$ и отрезков оси $x = 0$, стягивающихся к началу координат, и таких, что траектории (5.1) не могут пересекать эти кривые в направлении к началу координат. А это доказывает, что в этом случае точка $x = y = 0$ не может быть асимптотически устойчивой по Ляпунову.

Поступила 9 III 1953 Уральский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
2. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.
3. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
4. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2. Гостехиздат, М. — Л., 1949.
6. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
7. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, вып. 3, 1952.
8. Барбашин Е. А. К теории обобщенных динамических систем. Ученые записки МГУ, т. II, вып. 135, 1949.
9. Стебаков С. А. Качественное исследование системы $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$ при помощи изоклин ДАН СССР. т. LXXXII, № 5, 1952.