Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

Р. Э. Виноград
(Алма-Ата)

Правильные системы линейных дифференциальных уравнений были выделены Ляпуновым в особый класс в связи с тем, что их решения в известном смысле слабо реагируют на добавление малых членов к правым частям уравнений, в то время как неправильные системы, вообще говоря, таким свойством не обладают.

Эта особенность правильных систем, а также некоторые простые свойства, присущие их решениям [1], создают сходство между ними и системами с постоянными коэффициентами или, говоря шире, приводимыми системами.

Однако до последнего времени оставалось неизвестным, распространяется ли такое сходство на одно из важнейших свойств — устойчивость характеристических показателей. Строго сформулировать этот этот вопрос можно следующим образом.

Пусть даны две системы уравнений:

$$z' = A(t)\, z \tag{0.1}$$

$$z' = A(t)\, z + F(t, z) \tag{0.2}$$

у которых коэффициенты матрицы $A(t)$ ограничены, а

$$(Ft, 0) \equiv 0, \quad |F(t, z_1), \qquad (-Ft, z_2)| \leqslant g(t)\, |z_1 - z_2|,$$

где $g(t)$ — ограниченная функция; пусть дано некоторое число $\varepsilon > 0$. Существует ли такое число $\delta > 0$, что для любых $F(t, z)$ при условии $g(t) < \delta$ характеристические показатели системы (0.2) будут отличаться от показателей системы (0.1) менее, чем на ε?

Известно[2,3], что если $A(t)$ тождественно постоянна, или в более общем случае, если система (0.1) приводима, то вопрос решается утвердительно, а если система (0.1) неправильна, то, вообще говоря, решение будет отрицательным[4].

Что же касается правильных систем, то здесь вопрос оставался открытым[1], и настоящая работа имеет целью построение примера, показывающего, что, несмотря на большую аналогию между приводимыми и правильными системами, для последних поставленная задача в общем случае имеет отрицательное решение.

§ 1. Возьмем в качестве системы (0.1) систему

$$x' = 0, \qquad y' = f(t)\, y \tag{1.1}$$

где $f(t)$ определим ниже, а в качестве системы (0.2) возьмем систему

$$x' = \delta y, \qquad y' = \delta x + f(t)\, y \tag{1.2}$$

где $\delta > 0$ — постоянное число. Интересуясь в дальнейшем лишь тем решением (1.2), начальные условия которого суть $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, заме-

---

[1] При дополнительных ограничениях положительное решение дается в[5] и [6].

ним (1.2) равносильной системой интегральных уравнений с теми же начальными условиями:

$$x(t) = 1 + \delta \int_0^t y(\tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

$$y(t) = \delta \exp\left(\int_0^t f(\xi)\, d\xi\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau f(\xi)\, d\xi\right) x(\tau)\, d\tau = \delta \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f\, d\xi\right) x(\tau)\, d\tau$$

Будем решать (1.3) обычным методом последовательных приближений, полагая

$$x_{k+1}(t) = 1 + \delta \int_0^t y_k(\tau)\, d\tau, \qquad y_{k+1}(t) = \delta \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f\, d\xi\right) x_k(\tau)\, d\tau$$

Замечая, что x_{k+1} выражается только через y_k, а y_{k+1} только через x_k, видим, что если окажется $x_{k+1} = x_k$, то будет также $y_{k+2} = y_{k+1}$, а при $y_{k+1} = y_k$ получим $x_{k+2} = x_{k+1}$.

Строим приближения. Пусть

$$x_0(t) \equiv 1 \qquad y_0(t) \equiv 0$$

тогда

$$x_1(t) = 1 = x_0(t)$$

$$y_1(t) = \delta \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f\, d\xi\right) d\tau = \delta \int_0^t \left(\exp \int_{t_0}^t e\, d\xi\right) dt_0$$

Здесь и в дальнейшем переменную интеграции τ удобно обозначать через t с некоторым индексом (в данном случае t_0); далее

$$x_2(t) = 1 + \delta \int_0^t y_1(\tau)\, d\tau =$$

$$= 1 + \delta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left(\exp \int_{t_0}^\tau f\, d\xi\right) dt_0\, d\tau = 1 + \delta^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \left(\exp \int_{t_0}^{t_1} f\, d\xi\right) dt_0\, dt_1$$

Так как $x_1(t) = x_0(t)$, то $y_2(t) = y_1(t)$. Покажем при помощи индукции, что

$$x_{2n-1}(t) = x_{2n-2}(t), \qquad y_{2n}(t) = y_{2n-1}(t) \tag{1.4}$$

$$x_{2n}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \delta^{2k} I_k(t), \qquad y_{2n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \delta^{2k-1} J_k(t) \tag{1.5}$$

где

$$I_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-1}} \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left(\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f d\xi + \int_{t_{2k-4}}^{t_{2k-3}} f d\xi + \ldots + \int_{t_0}^{t_1} f d\xi\right) dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-1}$$

$$J_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left(\int_{t_{2k-2}}^{t} f d\xi + \int_{t_{2k-4}}^{t_{2k-3}} f d\xi + \ldots + \int_{t^0}^{t_1} f d\xi\right) dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-2}$$

Если формулы (1.4) — (1.5) верны для n (для $n=1$ они уже доказаны), то из (1.4) следует

$$x_{2n+1}(t) = x_{2n}(t) \tag{1.6}$$

а для $y_{2n+1}(t)$ получаем из (1.5)

$$y_{2n+1}(t) = \delta \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f\,d\xi\right) x_{2n}(\tau)\,d\tau = \delta \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f d\xi\right) \left[1 + \sum_{k=1}^n \delta^{2k} I_k(\tau)\right] d\tau =$$

$$= \delta J_1(t) + \sum_{k=1}^n \delta^{2k+1} \int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f\,d\xi\right) I_k(\tau)\,d\tau$$

Внося здесь множитель, стоящий в скобках, под знак $2k$-кратного интеграла $I_k(t)$ и обозначая τ через t_{2k}, находим

$$\int_0^t \left(\exp \int_\tau^t f d\xi\right) I_k(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^{t_{2k}} \int_0^{t_{2k-1}} \cdots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left(\int_{t_{2k}}^t f d\xi + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-2}} f\,d\xi + \ldots + \int_{t_0}^{t_1} f\,d\xi\right) dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k} = J_{k+1}(t)$$

Поэтому, заменяя индекс суммирования $k+1$ снова на k, получим

$$y_{2n+1}(t) = \delta J_1(t) + \sum_{k=1}^n \delta^{2k+1} J_{k+1}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \delta^{2k-1} J_k(t) \tag{1.7}$$

Отсюда

$$x_{2n+2}(t) = 1 + \delta \int_0^t y_{2n+1}(\tau)\,d\tau = 1 + \delta \int_0^t \sum_{k=1}^{n+1} \delta^{2k-1} J_k(\tau)\,d\tau =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \delta^{2k} \int_0^t J_k(\tau)\,d\tau$$

Так как при обозначении $\tau = t_{2k-1}$ имеем

$$\int_0^t J_k(\tau)\,d\tau = I_k(t)$$

то

$$x_{2n+2}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \delta^{2k} I_k(t) \tag{1.8}$$

и, наконец, из (1.6) вытекает

$$y_{2n+2}(t) = y_{2n+1}(t) \tag{1.9}$$

Равенства (1.6) — (1.9) показывают, что формулы (1.4) — (1.5) остаются справедливыми при переходе от n к $n+1$ и, значит, верны для любого n.

Доказательство сходимости приближений $x_i(t)$, $y_i(t)$ к решению $x(t)$, $y(t)$ системы (1.3) проводится обычным методом.

Дадим для простоты грубую оценку. Пусть $f(t)$ ограничена, $|f(t)| \leqslant C$; рассмотрим отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда

$$\left|\int_b^a f\,d\xi\right| \leqslant CT \quad \text{для} \quad 0 \leqslant a < b \leqslant T$$

Следовательно, подинтегральная (положительная) функция в выражении для $I_k(t)$ не более, чем e^{kCT}, откуда

$$0 < I_k(t) \leqslant e^{kCT}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

Аналогично оценивается $J_k(t)$ и равномерная на отрезке $[0, T]$ сходимость рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{i\to\infty} x_i(t) = \lim_{n\to\infty} x_{2n}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{2k} I_k(t) \\ y(t) &= \lim_{i\to\infty} y_i(t) = \lim_{n\to\infty} y_{2n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{2k-1} J_k(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

становится очевидной, после чего легко проверяется, что они действительно являются решением (1.3). Так как $I_k(t) > 0$ и $J_k(t) > 0$, то

$$x(t) > \delta^{2n} I_n(t), \qquad y(t) > \delta^{2n-1} J_n(t) \tag{1.11}$$

каково бы ни было n.

§ 2. Подберем функцию $f(t)$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi)\,d\xi = 0 \tag{2.1}$$

что будет означать правильность системы (1.1) и равенство нулю ее характеристических показателей, но чтобы в то же время характеристический показатель функции $x(t)$ из (1.10) при любом $\delta > 0$ оставался больше некоторого $\varepsilon_0 > 0$, откуда будет следовать, что характеристический показатель решения (1.10) системы (1.2) и подавно больше ε_0.

Заметим здесь же, что среди разнообразных функций $f(t)$, пригодных для этой цели, имеются, в частности, голоморфные на всей полуоси $0 < t < \infty$; так, например, можно было бы взять $f(t) = \sin\sqrt{t}$. (Эта функция сверх того обладает слабой вариацией в смысле К. П. Персидского [2].) Однако для наибольшего упрощения и раскрытия конструкции примера полезнее воспользоваться кусочнопостоянной функцией $f(t)$, что мы и сделаем.

Приводимые ниже рассуждения с небольшими и вполне очевидными изменениями могут быть перенесены на случай $f(t) = \sin\sqrt{t}$.

Положим

$$f(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } (2n)^2 \leqslant t < (2n+1)^2 \\ 1 \text{ при } (2n+1)^2 \leqslant t < (2n+2)^2 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Проверим выполнение условия (2.1). Пусть $k^2 \leqslant t \leqslant (k+1)^2$; для определенности возьмем четное $k = 2n$.

Поскольку вообще

$$\int\limits_{(2m-1)^2}^{(2m)^2} f\,d\xi = \int\limits_{(2m-1)^2}^{(2m)^2} 1\,d\xi = (2m)^2 - (2m-1)^2$$

$$\int\limits_{(2m-2)^2}^{(2m-1)^2} f\,d\xi = \int\limits_{(2m-2)^2}^{(2m-1)^2} (-1)\,d\xi = -\left[(2m-1)^2 - (2m-2)^2\right]$$

то

$$\int\limits_0^t f\,d\xi = \int\limits_0^{(2n)^2} f\,d\xi + \int\limits_{(2n)^2}^{t} f\,d\xi = \sum_{m=1}^{n} \{[(2m)^2 - (2m-1)^2] -$$

$$-\left[(2m-1)^2 - (2m-2)^2\right] + \int\limits_{(2n)^2}^{t} (-1)\,d\xi = 2n - [t-(2n)^2]$$

и так как $t-(2n)^2 \leqslant (2n+1)^2 - (2n)^2 = 4n+1$, то

$$\frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t f\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{(2n)^2}(2n+4n+1) = \frac{6n+1}{4n^2} \to 0$$

Аналогично проверяется случай нечетного k, а тем самым и полностью условие (2.1). Следовательно, система (1.1) правильная, а ее характеристические показатели оба равны нулю. Покажем, что характеристический показатель $x(t)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln x(t)}{t} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{при} \quad \delta > 0$$

Для этого укажем такую последовательность $T_n \to \infty$, при которой заведомо будет

$$\overline{\lim_{T_n\to\infty}} \frac{\ln x(T_n)}{T_n} \geqslant \frac{1}{2}$$

Возьмем $T_n = (2n)^2$ и рассмотрим интеграл $I_n(t)$ при значении $t = T_n$. Для вычисления $I_n(t)$ нужно положительную подинтегральную функцию

$$\exp\Big(\int\limits_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} f\,d\xi + \int\limits_{t_{2n-4}}^{t_{2n-3}} f\,d\xi + \cdots + \int\limits_{t_0}^{t_1} f\,d\xi\Big) = \exp\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\,d\xi$$

проинтегрировать по $2n$-мерной области, определяемой неравенствами $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{2n-1} \leqslant t = T_n$. Поэтому интеграл $I_n(t)$ только уменьшается, если сузить область интегрирования, задав ее неравенствами

$$\begin{array}{ll} 1 \leqslant t_0 \leqslant 2, & 3 \leqslant t_1 \leqslant 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (2k-1)^2 \leqslant t_{2k-2} \leqslant (2k-1)^2 + 1, & (2k)^2 - 1 \leqslant t_{2k-1} \leqslant (2k)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (2n-1)^2 \leqslant t_{n2-2} \leqslant (2k-1)^2 + 1, & (2n)^2 - 1 \leqslant t_{2n-1} \leqslant (2n)^2 = T_n \end{array}$$

Так как здесь промежутки изменения всех переменных суть отрезки единичной длины, то новая область интегрирования есть $2n$-мерный куб с ребром длины 1, а значит, его объем $V_{2n} = 1$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\,d\xi \tag{2.2}$$

фигурирующий в подинтегральном выражении для $I_n(t)$.

Так как теперь пределы t_{2k-2} и t_{2k-1} изменяются внутри промежутка $[(2k-1)^2, (2k)^2]$, в котором $f(t)=1$, то

$$\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\,d\xi \geqslant \int_{\max t_{2k-2}}^{\min t_{2k-1}} f\,d\xi = \int_{(2k-1)^2+1}^{(2k)^2-1} 1\,d\xi = (2k)^2 - 1 - [(2k-1)^2+1] = 4k-3 \tag{2.3}$$

Таким образом,

$$\exp \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\,d\xi \geqslant \exp \sum_{k=1}^{n} (4k-3) = e^{2n^2-n}$$

Отсюда

$$I_n(T_n) > e^{2n^2-n} V_{2n} = e^{2n^2-n}$$

Обратимся к функции $x(t)$ при значениях $t = T_n = (2n)^2 = 4n^2$. Согласно (1.11)

$$x(T_n) > \delta^{2n} I_n(T_n) > \delta^{2n} e^{2n^2-n}$$

Поэтому для последовательности T_n имеем

$$\lim_{T_n \to \infty} \frac{\ln x(T_n)}{T_n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \delta^{2n} e^{2n^2-n}}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \ln \delta + 2n^2 - n}{4n^2} = \frac{1}{2}$$

чем и заканчивается доказательство.

В случае $f(t) = \sin\sqrt{t}$ или, для удобства записи, $f(t) = \sin \pi \sqrt{t}$, следует взять $T_n = (2n+1)^2$, а $2n$-мерный куб определить неравенствами

$$(2k)^2 \leqslant t_{2k-2} \leqslant (2k)^2 + 1, \qquad (2k+1)^2 - 1 \leqslant t_{2k-1} \leqslant (2k)^2$$

Тогда для интеграла (2.2) легко устанавливается оценка, аналогичная (2.3), после чего доказательство завершается, как выше.

Отметим еще, что если вместо функции $f(t)$, рассмотренной в примере, взять $f(t)+\lambda$, где $0<\lambda<1$, то, повторяя те же вычисления, найдем, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln x(t)}{t} \geqslant \frac{1+\lambda}{2} > \lambda$$

в то время как характеристические показатели системы (1.1) в этом случае суть 0 и λ. Таким образом, неустойчивость характеристических показателей может наблюдаться и в том случае, когда они различны.

Поступила 17 V 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноград Р. Э. Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем. УМН, т. VIII, вып. 1 (53), 1953.
2. Персидский К. П. О характеристических числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, вып. 1, 1947.
3. Гробман Д. М. Характеристические показатели систем, близких к линейным. Мат. сб., нов. серия, т. 30 (72), № 1, 1952.
4. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. Math. Zeitschr., Nr. 31, 1930.
5. Былов Б. Ф. О характеристических числах решений систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГТТИ, 1952.