Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО МЕТОДА ВЫДЕЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТИ

Е. И. Бертова, Я. Т. Кузнецов, И. П. Натансон, Х. А. Цареградский

(Ленинград)

1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \tag{1.1}$$

в котором $p(x)$ — интегрируемая и положительная, а $f(x)$ непрерывная функции. Для этой цели можно поступить так: выбрать на отрезке $[a, b]$ какие-нибудь n точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и построить многочлен $L_n(x)$, совпадающий с $f(x)$ в этих точках. Как известно, $L_n(x)$ будет иметь вид:

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} f(x_k) \tag{1.2}$$

где

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \tag{1.3}$$

Если принять $L_n(x)$ за приближенное выражение функции $f(x)$ и в (1.1) заменить $f(x)$ на $L_n(x)$, то придем к приближенной формуле

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad \left(A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}\, dx\right) \tag{1.4}$$

Формула (1.4) называется формулой механических квадратур, числа x_k называются узлами этой формулы, а числа A_k ее коэффициентами. Подобные формулы широко применяются в вычислительной практике. Они особенно удобны тогда, когда бывает нужно вычислить большое количество интегралов (1.1), у которых один и тот же промежуток интегрирования $[a, b]$. В этом случае нужно выбрать по. произволу функцию $p(x)$ и узлы x_k, что позволит найти и коэффициенты A_k. Проделав это предварительное вычисление, можно затем применять формулу (1.4) к весьма разнообразным интегралам.

2. Из самого вывода формулы (1.4) ясно, что она будет точной всякий раз, когда функция $f(x)$ является многочленом степени ниже n. Возникает идущая еще от Гаусса [1] мысль о таком специальном подборе узлов $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, чтобы формула (1.4) оказалась точной всегда, когда $f(x)$ будет многочленом степени ниже $2n$. Гаусс разрешил задачу о таком подборе узлов для случая $p(x) = 1$. Общий случай был затем исследован К. А. Поссе [2]. В результате этих исследований была доказана следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы формула (1.4) была точной всякий раз, когда функция $f(x)$ является многочленом степени ниже $2n$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен (1.3), имеющий узлы формулы своими корнями, был на отрезке $[a, b]$ ортогонален по весу $p(x)$ ко всем степеням x^i, в которых $i < n$, т. е. чтобы имели место равенства

$$\int_a^b p(x)\, x^i \omega(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

Для таких систем узлов А. А. Марков [3] еще в 1885 г. установил вид остаточного члена формулы (1.4). Именно, он показал, что если у $f(x)$ существуют непрерывные производные до порядка $2n$ (включительно), то

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b p(x)\,\omega^2(x)\,dx \tag{2.2}$$

Из этой формулы видно, что в тех случаях, когда $f(x)$ есть функция достаточно высокой степени гладкости, формула (1.4) будет обладать хорошей точностью. Это обстоятельство следует сопоставить с тем, что подинтегральная функция интеграла (1.1), т. е. произведение $p(x)\,f(x)$, может быть не только не гладкой, но даже разрывной. Допустим теперь, что нам требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx \tag{2.3}$$

в котором подинтегральная функция $F(x)$ обладает некоторыми особенностями (т. е. она сама или ее производные терпят разрывы непрерывности в отдельных точках). Из сказанного выше следует, что для решения задачи можно поступать так: представить $F(x)$ в форме произведения $F(x) = p(x)\,f(x)$, в котором множитель $p(x)$ положителен и включает в себя все особенности функции $F(x)$, а множитель $f(x)$ обладает достаточной гладкостью. Сделав это, надо найти многочлен $\omega(x)$ степени n (эту степень можно выбрать заранее), удовлетворяющий соотношениям ортогональности (2.1). Если принять за узлы x_k корни этого многочлена и по ним составить коэффициенты (1.4), то соответствующая формула (1.4) позволит вычислить интеграл (2.3) с хорошей точностью (при условии, что и n было выбрано достаточно большим). Этот способ вычисления интеграла (2.3) называем мультипликативным методом выделения особенностей [1].

3. Весьма частым видом особенности функции, заданной на отрезке $[-1, +1]$, является наличие в ее составе множителя

$$|x|^{\alpha} \qquad (-1 < \alpha < 0)$$

(Условие $\alpha > -1$ нужно для интегрируемости веса $|x|^{\alpha}$.) Для того чтобы применить мультипликативный метод выделения особенности к вычислению интегралов вида

$$\int_{-1}^{+1} |x|^{\alpha} f(x)\,dx \tag{3.1}$$

надо знать корни $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ многочлена $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$, имеющего степень n и ортогонального на $[-1, +1]$ по весу $|x|^{\alpha}$ к низшим степеням x, а также коэффициенты $A_k^{(n)}$, вычисляемые по формулам (1.4). В настоящей работе эти величины приводятся для значений [2]

$$\alpha = -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}$$

и для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

---

[1] Изучению этого метода в его общей форме была недавно посвящена работа К. В. Лащенова. Предметом же настоящей статьи являются некоторые частные вопросы, связанные с указанным методом.

[2] Вычисления производились на машинах Ленинградского отделения Математического института Академии наук СССР. Большую помощь при этом оказали любезные консультации К. Е. Чернина, которому авторы выражают свою искреннюю признательность. Для случая $\alpha = -1/2$ вычисления были произведены Е. И. Бертовой, для $\alpha = -1/3$ и $\alpha = -1/4$ Я. Т. Кузнецовым, а для $\alpha = -3/4$ и $\alpha = -2/3$ Х. А. Цареградским.

4. Чтобы найти в общем виде явное выражение многочленов $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$, можно воспользоваться тем обстоятельством (впервые установленным Г. Сеге [4]), что они весьма просто выражаются через классические многочлены Якоби. Поскольку, однако, в этой работе нас интересуют лишь значения n, не превосходящие $n = 8$, можно поступить иначе и показать, как построить эти многочлены, исходя непосредственно из соотношений ортогональности (2.1).

Для этой цели нам понадобятся два вспомогательных предложения.

Лемма 1. Если $p(-x) = p(x)$, то многочлен $\omega_n(x)$ степени n, ортогональный на отрезке $[-a, +a]$ по весу $p(x)$ к низшим степеням x, есть функция четная при четном n и нечетная при нечетном n.

В самом деле, заменяя в соотношениях (2.1) b, a и x соответственно на a, $-a$ и $-x$, легко убедиться, что $\omega_n(-x)$ также есть многочлен степени n, ортогональный на $[-a, +a]$ по весу $p(x)$ к низшим степеням x. Так как такой многочлен с точностью до постоянного множителя единственен, то $\omega_n(-x) = c\omega_n(x)$. Полагая $x = +\infty$, находим $c = (-1)^n$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. Справедлива формула

$$\varepsilon_{n+2}^{(\alpha)}(x) = x\varepsilon_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \lambda_n^{(\alpha)}\varepsilon_n^{(\alpha)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

где $\lambda_n^{(\alpha)}$ — число постоянное. (Существенно, что у всех многочленов $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$ старший коэффициент равен единице.)

Из общей теории ортогональных многочленов вытекает, что верна формула

$$\varepsilon_{n+2}^{(\alpha)}(x) = (x - \mu_n^{(\alpha)})\,\varepsilon_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \lambda_n^{(\alpha)}\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$$

Если сравнить здесь коэффициенты при x^{n+1}, то из леммы 1 сразу будет следовать, что $\mu_n^{(\alpha)} = 0$, чем и доказана формула (4.1).

Покажем теперь, как, опираясь на формулу (4.1), строить один за другим многочлены $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$. По определению этих многочленов будет

$$\int_{-1}^{+1} |x|^\alpha x^n \varepsilon_{n+2}^{(\alpha)}(x)\,dx = 0$$

Поэтому из (4.1) следует, что

$$\lambda_n^{(\alpha)} = \frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)} \qquad \left(J_\nu(\alpha) = \int_{-1}^{+1} |x|^\alpha x^\nu \varepsilon_\nu^{(\alpha)}(x)\,dx\right)$$

или, что то же самое,

$$\lambda_n^{(\alpha)} = \left\{\int_0^1 x^{\alpha+n+1}\varepsilon_{n+1}^{(\alpha)}(x)\,dx\right\} : \left\{\int_0^1 x^{\alpha+n}\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)\,dx\right\} \tag{4.2}$$

Если $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$ и $\varepsilon_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ уже известны, то, найдя из (4.2) коэффициент $\lambda_n^{(\alpha)}$ и подставив его в (4.1), найдем и $\varepsilon_{n+2}^{(\alpha)}(x)$.

Таким образом, дело сводится к нахождению $\varepsilon_0^{(\alpha)}(x)$ и $\varepsilon_1^{(\alpha)}(x)$. Так как степень $\varepsilon_0^{(\alpha)}(x)$ есть нулевая, а его старший коэффициент есть единица, то

$$\varepsilon_0^{(\alpha)}(x) = 1 \tag{4.3}$$

Что касается до $\varepsilon_1^{(\alpha)}(x)$, то это нечетная функция и потому

$$\varepsilon_1^{(\alpha)}(x) = x \tag{4.4}$$

Пользуясь (4.3) и (4.4), из (4.2), а затем из (4.1) последовательно находим

$$\lambda_0^{(\alpha)} = \left\{\int_0^1 x^{\alpha+2}\,dx\right\} : \left\{\int_0^1 x^\alpha\,dx\right\} = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}, \qquad \varepsilon_2^{(\alpha)}(x) = x^2 - \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \tag{4.5}$$

Далее, подставляя (4.4) и (4.5) в (4.2), получаем $\lambda_1^{(\alpha)}$, а затем согласно (4.1) находим $\varepsilon_3^{(\alpha)}(x)$:

$$\lambda_1^{(\alpha)}=\left\{\int_0^1 x^{\alpha+2}\varepsilon_2^{(\alpha)}\,dx\right\}:\left\{\int_0^1 x^{\alpha+1}\varepsilon_1^{(\alpha)}\,dx\right\}=\frac{4}{(\alpha+3)(\alpha+5)},\quad \varepsilon_3^{(\alpha)}(x)=x^3-\frac{\alpha+3}{\alpha+5}\,x \tag{4.6}$$

Продолжая эти рассуждения, найдем один за другим многочлены

$$\varepsilon_4^{(\alpha)}(x)=x^4-2\,\frac{\alpha+3}{\alpha+7}\,x^2+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{(\alpha+5)(\alpha+7)} \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_5^{(\alpha)}(x)=x^5-2\,\frac{\alpha+5}{\alpha+9}\,x^3+\frac{(\alpha+3)(\alpha+5)}{(\alpha+7)(\alpha+9)}\,x$$

$$\varepsilon_6^{(\alpha)}(x)=x^6-3\,\frac{\alpha+5}{\alpha+11}\,x^4+3\,\frac{(\alpha+3)(\alpha+5)}{(\alpha+9)(\alpha+11)}\,x^2-\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{(\alpha+7)(\alpha+9)(\alpha+11)}$$

$$\varepsilon_7^{(\alpha)}(x)=x^7-3\,\frac{\alpha+7}{\alpha+13}\,x^5+3\,\frac{(\alpha+5)(\alpha+7)}{(\alpha+11)(\alpha+13)}\,x^3-\frac{(\alpha+3)(\alpha+5)(\alpha+7)}{(\alpha+9)(\alpha+11)(\alpha+13)}\,x$$

$$\varepsilon_8^{(\alpha)}(x)=x^8-4\,\frac{\alpha+7}{\alpha+15}\,x^6+6\,\frac{(\alpha+5)(\alpha+7)}{(\alpha+13)(\alpha+15)}\,x^4-4\,\frac{(\alpha+3)(\alpha+5)(\alpha+7)}{(\alpha+11)(\alpha+13)(\alpha+15)}\,x^2+$$
$$+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)(\alpha+7)}{(\alpha+9)(\alpha+11)(\alpha+13)(\alpha+15)}$$

5. Выше мы приводили принадлежащее А. А. Маркову выражение остаточного члена формулы квадратур. В частности, ошибка квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{+1}|x|^{\alpha}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}f(x_k^{(n)}) \tag{5.1}$$

в которой узлы суть корни $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$, есть

$$R_n^{(\alpha)}=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}|x|^{\alpha}\,[\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)]^2\,dx \tag{5.2}$$

Так как

$$J_n(\alpha)=\int_{-1}^{+1}|x|^{\alpha}[\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)]^2\,dx=2\int_0^1 x^{n+\alpha}\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)\,dx \tag{5.3}$$

то эти величины[1] легко находятся из приведенных выше выражений многочленов $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$. Проделав соответствующие вычисления и полагая

$$M_{2n}=\max|f^{(2n)}(x)| \tag{5.4}$$

находим оценки:

$$|R_1^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_2}{\alpha+3},\qquad |R_5^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_{10}}{28350(\alpha+7)^2(\alpha+9)^2(\alpha+11)} \tag{5.5}$$

$$|R_2^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_4}{3(\alpha+3)^2(\alpha+5)},\qquad |R_6^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_{12}}{103950(\alpha+7)^2(\alpha+9)^2(\alpha+11)^2(\alpha+13)}$$

$$|R_3^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_6}{90(\alpha+5)^2(\alpha+7)},\qquad |R_7^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_{14}}{18918900(\alpha+9)^2(\alpha+11)^2(\alpha+13)^2(\alpha+15)}$$

$$|R_4^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_8}{315(\alpha+5)^2(\alpha+7)^2(\alpha+9)},$$

$$|R_8^{(\alpha)}|\leqslant\frac{M_{16}}{70945875(\alpha+9)^2(\alpha+11)^2(\alpha+13)^2(\alpha+15)^2(\alpha+17)}$$

Вспоминая, что $\alpha>-1$, имеем, что, например,

$$|R_4^{(\alpha)}|\leqslant 10^{-6}M_8,\qquad |R_8^{(\alpha)}|\leqslant 10^{-17}M_{16} \tag{5.6}$$

[1] В действительности нахождение величин $J_n(\alpha)$ производится одновременно с построением многочленов $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$, так как $\lambda_n^{(\alpha)}=J_{n+1}(\alpha):J_n(\alpha)$.

Если воспользоваться упомянутой выше связью многочлена $\varepsilon_n^{(\alpha)}(x)$ с многочленами Якоби, то все вычисления сильно упростятся.

n	$x_i^{(n)}$	$A_i^{(n)}$	$\lg A_i^{(n)}$	$x_i^{(n)}$	$A_i^{(n)}$	$\lg A_i^{(n)}$
		$\alpha=-\frac{3}{4}$			$\alpha=-\frac{2}{3}$	
1	0	8	0.9030900	0	6	0.7781513
2	$\pm$0.33333333	4	0.6020600	$\pm$0.37796447	3	0.4771213
3	0	6.32098765	0.8007849	0	4.40816327	0.6442577
	$\pm$0.72760687	0.83950617	$\bar{1}$.9240239	$\pm$0.73379938	0.79591837	$\bar{1}$.9008685
4	$\pm$0.17527897	3.51172828	0.5455209	$\pm$0.20176925	2.53245440	0.4035417
	$\pm$0.83022725	0.48827173	$\bar{1}$.6886615	$\pm$0.83434482	0.46754560	$\bar{1}$.6698240
5	0	5.59921403	0.7481271	0	3.75606811	0.5747334
	$\pm$0.48211896	0.90782287	$\bar{1}$.9580011	$\pm$0.48913099	0.83676282	$\bar{1}$.9226024
	$\pm$0.89323252	0.29257012	$\bar{1}$.4662300	$\pm$0.89484684	0.28520313	$\bar{1}$.4551543
6	$\pm$0.11852785	3.20303425	0.5055616	$\pm$0.13705970	2.24336578	0.3509001
	$\pm$0.61476116	0.58968924	$\bar{1}$.7706232	$\pm$0.62062158	0.55405825	$\bar{1}$.7435554
	$\pm$0.92299637	0.20727652	$\bar{1}$.3165501	$\pm$0.92417965	0.20257596	$\bar{1}$.3065879
7	0	5.16023560	0.7126695	0	3.37109714	0.5277712
	$\pm$0.35510439	0.87981039	$\bar{1}$.9443891	$\pm$0.36125931	0.79235092	$\bar{1}$.8989176
	$\pm$0.71659097	0.39127279	$\bar{1}$.5924797	$\pm$0.71960989	0.37571723	$\bar{1}$.5748611
	$\pm$0.94393353	0.14879902	$\bar{1}$.1726000	$\pm$0.94456014	0.14638326	$\bar{1}$.1654914
8	$\pm$0.08948276	2.99181416	0.4759347	$\pm$0.10369397	2.04978168	0.3117076
	$\pm$0.47898636	0.59757951	$\bar{1}$.7763957	$\pm$0.48470936	0.55128932	$\bar{1}$.7413796
	$\pm$0.77626179	0.29526155	$\bar{1}$.4702069	$\pm$0.77873992	0.28533992	$\bar{1}$.4553626
	$\pm$0.95622618	0.11534479	$\bar{1}$.0619980	$\pm$0.95671855	0.11358906	$\bar{1}$.0553365
		$\alpha=-\frac{1}{2}$			$\alpha=-\frac{1}{3}$	
1	0	4	0.6020600	0	3	0.4771213
2	$\pm$0.44721360	2	0.3010300	$\pm$0.50000000	1.50000000	0.1760913
3	0	2.56000000	0.4082400	0	1.68750000	0.2272438
	$\pm$0.74535600	0.72000000	$\bar{1}$.8573325	$\pm$0.75592894	0.65625000	$\bar{1}$.8170693
4	$\pm$0.24551826	1.56920998	0.1956811	$\pm$0.28157860	1.10078037	0.0417007
	$\pm$0.84199261	0.43079001	$\bar{1}$.6342656	$\pm$0.84894847	0.39921964	$\bar{1}$.6012119
5	0	2.02271605	0.3059349	0	1.23979591	0.0933502
	$\pm$0.50253550	0.71716702	$\bar{1}$.8556203	$\pm$0.51518123	0.62115550	$\bar{1}$.7932004
	$\pm$0.89793185	0.27147495	$\bar{1}$.4337297	$\pm$0.90083927	0.25894654	$\bar{1}$.4132101
6	$\pm$0.16824106	1.31389847	0.1185618	$\pm$0.19456785	0.87340578	$\bar{1}$.9412161
	$\pm$0.63175914	0.49233141	$\bar{1}$.6922575	$\pm$0.64218944	0.44091521	$\bar{1}$.6443551
	$\pm$0.92643921	0.19377013	$\bar{1}$.2872868	$\pm$0.92856668	0.18567901	$\bar{1}$.2687628
7	0	1.72349770	0.2364107	0	1.00423469	0.0018352
	$\pm$0.37309516	0.64912674	$\bar{1}$.8123295	$\pm$0.38451371	0.53825824	$\bar{1}$.7309906
	$\pm$0.72544903	0.34735229	$\bar{1}$.5407702	$\pm$0.73103813	0.32219088	$\bar{1}$.5081133
	$\pm$0.94577201	0.14177207	$\bar{1}$.1515907	$\pm$0.94693181	0.13743353	$\bar{1}$.1380927
8	$\pm$0.12781593	1.14995673	0.0606815	$\pm$0.14841618	0.73318920	$\bar{1}$.8652160
	$\pm$0.49570115	0.47275043	$\bar{1}$.6746319	$\pm$0.50613616	0.40911614	$\bar{1}$.6118466
	$\pm$0.78352659	0.26706273	$\bar{1}$.4266133	$\pm$0.78810039	0.25063437	$\bar{1}$.3990407
	$\pm$0.95767061	0.11023006	$\bar{1}$.0423000	$\pm$0.95858147	0.10706025	$\bar{1}$.0296282

n	$x_i^{(n)}$	$A_i^{(n)}$	$\lg A_i^{(n)}$
		$\alpha = -\frac{1}{4}$	
1	0	2.66666667	0.4259687
2	$\pm$0.52223296	1.33333333	0.1249387
3	0	1.41046832	0.1493633
	$\pm$0.76088592	0.62809917	$\bar{1}$.7980282
4	$\pm$0.29761761	0.94827890	$\bar{1}$.9769361
	$\pm$0.85219633	0.38505443	$\bar{1}$.5855221
5	0	1.00022130	0.0000962
	$\pm$0.52124203	0.58013702	$\bar{1}$.7635306
	$\pm$0.90223115	0.25308566	$\bar{1}$.4032675
6	$\pm$0.20648160	0.73309736	$\bar{1}$.8651617
	$\pm$0.64716259	0.41836058	$\bar{1}$.6215508
	$\pm$0.92958449	0.18187534	$\bar{1}$.2597738
7	0	0.79029830	$\bar{1}$.8977911
	$\pm$0.39001464	0.49216159	$\bar{1}$.6921077
	$\pm$0.73374420	0.31066337	$\bar{1}$.4922900
	$\pm$0.94749318	0.13535923	$\bar{1}$.1314878
8	$\pm$0.15781607	0.60298516	$\bar{1}$.7803066
	$\pm$0.51116108	0.38177168	$\bar{1}$.5818037
	$\pm$0.79031210	0.24303508	$\bar{1}$.3856690
	$\pm$0.95902226	0.10554142	$\bar{1}$.0234229

Отсюда видно, какую большую точность обеспечивает мультипликативный метод выделения особенностей в рассматриваемом случае.

6. На стр. 643—644 приведена таблица узлов и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{+1} |x|^{(\alpha)} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f\ (x_k^{(n)}) \qquad (6.1)$$

для ряда значений α и n. Покажем применение таблицы на примерах.

Пример 1. Вычислить интеграл Френеля

$$J = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |x|^{-1/2} \cos x\,dx \qquad (6.2)$$

Применяем формулу (6.1) для $\alpha = -{}^1/_2$ и $f(x) \cos x =$. Полагая $n=3$, находим

$$|R_3^{\ (-1/2)}| \leqslant \frac{4M_6}{47853} < 10^{-4}$$

$$(M_6 = \max |\cos x| = 1)$$

Поэтому следует вести подсчет на четыре знака после запятой. Из таблицы заимствуем

$$-x_1^{(3)} = x_3^{(3)} = 0.745356 = 42°42'21''$$

$$x_2^{(3)} = 0$$

$$\lg A_1^{(3)} = \lg A_3^{(3)} = \bar{1}.85733, \qquad A_2^{(3)} = 2.56$$

Отсюда

$$\lg \cos x_1^{(3)} = \lg \cos x_3^{(3)} = \bar{1}.86620, \qquad \cos x_2^{(3)} = 1$$

Опуская дальнейшие подробности, приводим результат: $J = 1.8091$

Для сравнения вычисляем тот же интеграл, взяв $n = 4$. Не останавливаясь на деталях, приводим результат: $J = 1.809046$. Заметим, что для $n = 3$ вычисления велись по пятизначным, а для $n = 4$ по семизначным таблицам логарифмов.

Пример 2. При вычислении интеграла

$$J = \int_{-1}^{+1} |x|^{-1/3} \operatorname{arc\,tg}^2 x\,dx \qquad (6.3)$$

проводить оценку остаточного члена довольно громоздко. Вместо этого можно вычислить интеграл (6.3) при различных значениях n и сравнить результаты. Оказывается, что при $n = 5$, $n = 7$ и $n = 8$ получаются следующие значения интеграла J:

$$J = 0.559617, \qquad J = 0.559828, \qquad J = 0.559833$$

Поступила 29 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Gauss C. F. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Werke, Bd. 3., S. 163—196.
2. Поссе К. А. Sur les quadratures. Nouv. Ann. de Math. (2), **14**, p. 49—62, 1875.
3. Марков А. А. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. Math. Ann., 25, p. 427—432, 1885.
4. Szegö G. Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. Math. Zeitschrift, Bd. 1, S. 341—356, 1918.