Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ЧАПЛЫГИНА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Б. Н. Бабкин

(Молотов)

Для уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной y', метод Чаплыгина развит почти исчерпывающим образом.[1]

Здесь рассматривается применение метода к решению уравнений вида $F(x, y, y')=0$, т. е. неразрешенных относительно y', для которых этот способ не изучался.

§ 1. Пусть дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

и начальное условие

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

Относительно функции F предполагается следующее.

1. Функция F непрерывна вместе с производными первого порядка по y и y' в некоторой замкнутой области D переменных x, y, содержащих точку $A(x_0, y_0)$, и при любых y', удовлетворяющих неравенству $|y'| \leqslant T$.

2. Производная $\partial F / \partial y' \geqslant q > 0$ в рассматриваемой области изменения переменных x, y, y'.

При этих условиях можно доказать теорему, аналогичную предложению Чаплыгина для уравнений вида $y' = f(x, y)$.

Теорема. Если гладкие кривые $y = u(x)$ и $y = v(x)$, проходящие через точку $A(x_0, y_0)$, при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ целиком расположены в области D и $\max|u'(x)| < T$, $\max|v'(x)| < T$ удовлетворяют на рассматриваемом сегменте $[x_0, x_1]$ дифференциальным неравенствам

$$F[x, u(x), u'(x)] < 0, \qquad F[x, v(x), v'(x)] > 0 \tag{1.3}$$

то при $x_0 < x \leqslant x_1$ имеют место неравенства

$$u(x) < y(x) < v(x) \tag{1.4}$$

где $y(x)$ — решение уравнения (1.1), проходящее через точку $A(x_0, y_0)$ и имеющее в этой точке угловой коэффициент y_0', заключенный между $u'(x_0)$ и $v'(x_0)$.

Доказательство. Легко видеть, что при условиях теоремы $u'(x_0) < v'(x_0)$, следовательно, в некоторой окрестности справа от точки x_0 будут иметь место неравенства $u(x) < y(x) < v(x)$. Допустим, что неравенство (1.4) нарушается где-нибудь в интервале (x_0, x_1). Пусть, например, x^* — первая (после x_0) из точек интервала (x_0, x_1), где $u(x^*) = y(x^*)$. В этой точке имели бы $u'(x^*) \geqslant y'(x^*)$. С другой стороны, в силу неравенства

$$F[x^*, y(x^*), y'(x^*)] - F[x^*, u(x^*), u'(x^*)] > 0$$

и возрастания функции F по третьему аргументу должны иметь

$$y'(x^*) > u'(x^*)$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 2. Решение уравнения (1.1), проходящее через точку $A(x_0, y_0)$ и заключенное в полосу, образованную кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$, удовлетворяющими условиям предыдущей теоремы, отделено от других решений этого уравнения и его можно назвать отделенным, а функции $u(x)$ и $v(x)$ соответственно нижней и верхней функциями.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий построить, исходя из функций $u(x)$ и $v(x)$, последовательность верхних и нижних функций, апроксимирующих отделенное решение с любой степенью точности.

Допустим, что некоторое решение уравнения (1.1) отделено в полосу, образовангную кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$, удовлетворяющими всем условиям предыдущего параграфа.

Рассмотрим замкнутую область D_1, определенную неравенствами

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad u(x) \leqslant y \leqslant v(x), \qquad |y'| \leqslant T$$

и пусть в этой области

$$|F_y| < S, \qquad M > F_{y'}' \geqslant q > 0$$

Для построения следующей пары приближений $[u_1, v_1]$ выделенного решения $y = y(x)$ составляем два линейных дифференциальных уравнения:

$$u_1' - \frac{S}{q}(u - u_1) + \frac{F[u]}{M} - u' = 0, \qquad v_1' - \frac{S}{q}(v - v_1) + \frac{F[v]}{M} - v = 0 \quad (2.1)$$

где

$$F[u] = F[x, u(x), u'(x)], \qquad F[v] = F[x, v(x), v'(x)]$$

Подставляя в уравнения (2.1) u и v вместо u_1 и v_1, убедимся, что в силу условий $F[u] < 0$ и $F[v] > 0$ и доказанной теоремы имеют место неравенства $u < u_1$ и $v > v_1$.

Легко проверить, что функции u_1 и v_1 удовлетворяют и основным неравенствам $F[u_1] < 0$, $F[v_1] > 0$.

Применяя теорему о среднем, получим (2.2)

$$F[u_1] = F[x, u_1(x), u_1'(x)] = F[u] + [u_1(x) - u(x)]\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_1} + [u_1'(x) - u'(x)]\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_2}$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_1} = \frac{\partial F}{\partial y}[x, u + \theta_1(u_1 - u), u' + \theta_1(u_1' - u')] \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_2} = \frac{\partial F}{\partial y'}[x, u + \theta_2(u_1 - u), u' + \theta_2(u_1' - u)] \qquad (0 < \theta_2 < 1)$$

Подставляя в равенство (2.2) вместо разности $u_1' - u'$ ее выражение из уравнений (2.1), можно это равенство записать в следующем виде:

$$F[u_1] = F[u] + (u_1 - u)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_1} + \left[\frac{S}{q}(u - u_1) - \frac{F[u]}{M}\right]\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_2} =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{M}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_2}\right]F[u] + (u_1 - u)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_1} - \frac{S}{q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\theta_2}\right] \quad (2.3)$$

Полученное равенство, правая часть которого отрицательна, и доказывает, что на интересующем нас интервале будет справедливо неравенство $F[u_1] < 0$.

Аналогично устанавливается справедливость и неравенства $F[v_1] > 0$. Кроме этих неравенств, можно установить еще следующие:

$$y'(x_0) < v_1'(x_0) < v'(x_0), \qquad u'(x_0) < u_1'(x_0) < y'(x_0)$$

рассматривая очевидные неравенства

$$F[x_0, u_1(x_0), u_1'(x_0)] = F[x_0, u_1(x_0), u_1'(x_0)] - F[x_0, y(x_0), y'(x_0)] = \\ = [u_1'(x_0) - y'(x_0)]\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\theta_1 0}$$

$$F[v_1]_{x=x_0} = F[v_1]_{x=x_0} - F[y]_{x=x_0} = [v_1'(x_0) - y'(x_0)]\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\vartheta_1 0}$$

$$F[u_1]_{x=x_0} - F[u]_{x=x_0} = [u_1'(x_0) - u'(x_0)]\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\theta_2 0}$$

$$F[v_1]_{x=x_0} - F[v]_{x=x_0} = [v_1'(x_0) - v'(x_0)]\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\vartheta_2 0}$$

где индекс нуль указывает, что $x = x_0$ и $y = y_0$.

Таким образом, установлены свойства, которыми обладает пара $[u_1, v_1]$:

1) $u_1(x) > u(x), \quad v_1(x) < v(x)$ при $x_0 < x \leqslant x_1$

2) $F[u_1] < 0, \quad F[v_1] > 0$ при $x_0 \leqslant x < x_1$

3) $u'(x_0) < u'(x_0) < y'(x_0) < v_1'(x_0) \leqslant v'(x_0)$

Перечисленные свойства пары $[u_1, v_1]$ показывают, что полоса, образованная этой парой, уже исходной ($[u_1, v_1] \subset [u, v]$) и содержит внутри себя искомое решение.

Дальнейший процесс построения приближений продолжаем при помощи уравнений

$$\begin{aligned} u'_{n+1} - \frac{S}{q}(u_n - u_{n+1}) + \frac{F[u_n]}{M} - u_n' = 0 \\ v'_{n+1} = \frac{S}{q}(v_n - v_{n+1}) + \frac{F[v_n]}{M} - v_n' = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$F[u_n] = F[x, u_n(x), u_n'(x)], \qquad F[v_n] = F[x, v(x), v'(x)] \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

при начальных условиях

$$u_{n+1}(x_0) = v_{n+1}(x_0) = y_0$$

Нетрудно проверить, что функции u_{n+1} и v_{n+1}, найденные из уравнений (2.3), будут обладать следующими тремя свойствами:

1) $u_{n+1}(x) > u_n(x), \quad v_{n+1}(x) < v_n(x),$ при $x_0 < x \leqslant x_1$

2) $F[u_{n+1}] < 0, \quad F[v_n] > 0$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$

3) $u_n'(x_0) < u'_{n+1}(x_0) < y'(x_0) < v'_{n+1}(x_0) < v_n'(x_0)$

§ 3. Докажем, что построенная таким образом последовательность пар

$$[u_1, v_1], \; [u_2, v_2], \ldots, [u_n, v_n], \ldots$$

стягивается к искомому решению. Будем исходить из того, что сегмент $[x_0, x_1]$ достаточно мал, а именно

$$x_1 - x_0 < \frac{q}{S} \ln 2$$

Ограничимся доказательством сходимости приближений сверху, т. е. что $\lim v_n(x) = y(x)$ при $n \to \infty$ для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, так как доказательство сходимости нижних приближений проводится аналогично.

Оценим для этого величину $F[v_1]$. Решая второе из уравнений (2.3) относительно разности $v - v_1$ при начальном условии $v(x_0) - v_1(x_0) = 0$, найдем

$$v(x) - v_1(x) = \frac{1}{M} \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\frac{S}{q}(x-t)\right) F[v]\, dt \tag{3.1}$$

Пусть $\alpha = \max F[v]$ на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. При помощи равенства (3.1) получим следующие оценки:

$$0 \leqslant v(x) - v_1(x) \leqslant \frac{\alpha q}{MS}\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{q}(x_1 - x_0)\right)\right] \tag{3.2}$$

$$|v'(x) - v_1'(x)| \leqslant \frac{\alpha}{M}$$

еперь легко оценить величину $F[v_1]$.

Пользуясь теоремой о среднем значении и выражением $F[v]$, взятым из уравнения (2.1), функцию $F[v_1]$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} F[v_1] &= F[v] + F[v_1] - F[v] = \\ &= \left[M - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_2}\right](v' - v_1')\left[\frac{SM}{q} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_1}\right](v - v_1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_1} = \frac{\partial F}{\partial y}[x,\ v + \vartheta_1(v - v_1),\ v' + \vartheta_1(v' - v_1')] \qquad (0 < \vartheta_1 < 1)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_2} = \frac{\partial F}{\partial y'}[x,\ v + \vartheta_2(v - v_1),\ v' + \vartheta_2(v' - v_1')] \qquad (0 < \vartheta_2 < 1)$$

Из равенства (3.3) в силу неравенства

$$v' - v_1' \leqslant \frac{\alpha}{M} - \frac{S}{q}(v - v_1)$$

и первой из оценок (3.2) получим

$$\begin{aligned} F[v_1] &\leqslant \left[M - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_2}\right]\left[\frac{\alpha}{M} - \frac{S}{q}(v - v_1)\right] + \left[\frac{SM}{q} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\vartheta_1}\right](v - v_1) \leqslant \\ &\leqslant (M - q)\left[\frac{\alpha}{M} - \frac{S}{q}(v - v_1)\right] + \left(\frac{SM}{q} + S\right)(v - v_1) = \\ &= (M - q)\frac{\alpha}{M} + (v - v_1)\left[\frac{SM}{q} + S - \frac{S}{q}(M - q)\right] = \\ &= \left(1 - \frac{q}{M}\right)\alpha + 2S(v - v_1) \leqslant \left(1 - \frac{q}{M}\right)\alpha + 2S\frac{\alpha q}{MS}\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{q}(x_1 - x_0)\right)\right] = \alpha r \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$r = 1 - \frac{q}{M}\left[2\exp\left(-\frac{S}{q}(x_1 - x_0)\right) - 1\right]$$

При наших предположениях относительно длины сегмента $[x_0,\ x_1]$ r будет числом, заключенным между нулем и единицей.

Методом полной индукции устанавливаются в общем случае следующие оценки:

$$v_n(x) - v_{n+1}(x) \leqslant \frac{\alpha r^n}{M}\frac{q}{S}\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{q}(x_1 - x_0)\right)\right]$$

$$|v_n'(x) - v_{n+1}'(x)| \leqslant \frac{\alpha r^n}{M}, \qquad F[v_n] \leqslant \alpha r^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

Неравенства (3.5) позволяют утверждать, что последовательности $\{v_n(x)\}$ и $\{v_n'(x)\}$ сходятся равномерно на рассматриваемом сегменте $[x_0, x_1]$ и что $\lim F[v_n] = 0$ при $n \to \infty$.

Чтобы убедиться, что $\lim v_n(x)$ при $n \to \infty$ совпадает с искомым решением $y(x)$ достаточно перейти к пределу в неравенстве

$$0 < F[x, v_n(x), v_n'(x)] \leqslant \alpha r^n$$

Законность предельного перехода здесь уже обоснована выше.

Все предыдущие рассуждения были бы вполне корректными, если бы в процессе доказательства попутно доказывалась принадлежность элементов $[x, v_n, v_n']$ к рассматриваемой области D_1.

Чтобы обеспечить такую принадлежность, мы вынуждены наложить дополнительные ограничения на начальные приближения. Таким достаточным ограничением будет выполнение неравенства

$$\alpha < (T - \max|v'(x)|) M (1 - r) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

и аналогичного неравенства для $u(x)$.

Действительно, в этом предположении будем иметь

$$|v_n' - v'| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_{k-1}' - v_k'| \leqslant \frac{\alpha}{M(1-r)}$$

и, следовательно,

$$|v_n'| - |v'| \leqslant \frac{\alpha}{M(1-r)} < T - \max|v'(x)|, \quad |v_n'| < T \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

Поступила 23 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Изыскание интегралов линейных участков уравнений второго порядка с остаточным членом. Собр. соч., т. III, стр. 243—247. ГИТТЛ, 1950.