Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О МАССЕ ТЕЛА, ПРИВЕДЕННОЙ К ЛИНИИ УДАРА

Я. Л. Геронимус

(Харьков)

В работах по теории удара [1,2] Н. Е. Жуковский ввел понятие о массе μ твердого тела, приведенной к линии удара [1], понимая под ней отношение величины удара S к скорости вдоль линии удара, получаемой покоящимся телом [2]. Вся важность этого понятия вытекает из того, что, как показал Н. Е. Жуковский, при соударении двух тел величина удара находится так же, как если бы соударялись два шара с массами, равными массам обоих тел, приведенным к линии удара.

Настоящая заметка имеет целью показать, как связана масса, приведенная к линии удара, с массами замещающих точек, эквивалентных данному телу [3].

§ 1. Обозначим через $\mathbf{S}$ удар (фиг. 1), т. е. импульс мгновенной силы, через $\mathbf{M}_c$ — векторный момент удара относительно центра тяжести тела, через ω — мгновенную угловую скорость в результате действия удара на покоящееся тело, через $\mathbf{v}_c$ — скорость центра тяжести; тело сначала будем считать свободным. Построим так называемый центральный гирационный эллипсоид с уравнением

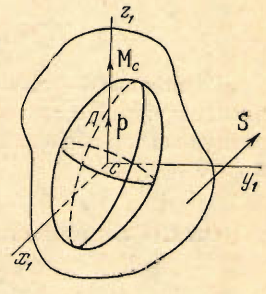
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.1}$$

где

$$I_x=Ma^2, \qquad I_y=Mb^2, \qquad I_z=Mc^2 \tag{1.2}$$

главные центральные моменты инерции тела с массой M. Как известно,

$$M\mathbf{v}_c=\mathbf{S}, \quad M_{cx}=I_x\omega_x, \quad M_{cy}=I_y\omega_y, \quad M_{cz}=I_z\omega_z \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Найдем проекцию ω_{z_1} угловой скорости ω на ось Cz_1, перпендикулярную к плоскости Cx_1y_1, проходящей через центр тяжести C и линию удара; ось Cx_1 направлена параллельно удару. Имеем

$$\omega_{z_1}=\frac{\omega\cdot\mathbf{M}_c}{M_c}=\frac{1}{MM_c}\left(\frac{M_{cx}{}^2}{a^2}+\frac{M_{cy}{}^2}{b^2}+\frac{M_{cz}{}^2}{c^2}\right) \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathbf{p}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ радиус-вектор точки A пересечения гирационного эллипсоида с направлением векторного момента удара $\mathbf{M}_c$. Имеем

$$\mathbf{M}_c=\mathbf{p}\frac{M_c}{p}$$

Отсюда на основании (1.1) находим

$$\omega_{z_1}=\frac{M_c}{Mp^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{M_c}{Mp^2} \tag{1.5}$$

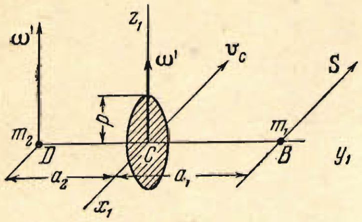
---

[1] См. также [3], стр. 731—742.

[2] Проекции скоростей всех точек любой прямой на направление этой прямой, как известно, равны между собой.

[3] См., например, [4].

Благодаря составляющей угловой скорости ω, которая лежит в плоскости Cx_1y_1, точки этой плоскости получают скорости, перпендикулярные этой плоскости; следовательно, проекции скоростей всех точек плоскости Cx_1y_1 на эту плоскость при данном ударе S и данном его моменте M_c зависят только от массы тела M, положения его центра тяжести и величины p — радиус-вектора точки A гирационного эллипсоида; поэтому проекции скоростей всех точек плоскости Cx_1y_1 на эту плоскость будут такими же, как если бы мы заменили тело системой двух точечных масс m_1 и m_2 (фиг. 2), имеющих те же указанные выше характеристики.



Фиг. 2

§ 2. Поместим массу m_1 в основании B перпендикуляра, опущенного из центра тяжести на линию удара; положение D второй массы m_2 и ее величина подчинены условиям неизменности массы и центра тяжести, т. е.

$$m_1 + m_2 = M, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{2.1}$$

Отсюда

$$m_1 = M\frac{a_2}{a_1 + a_2} \qquad m_2 = M\frac{a_1}{a_1 + a_2} \tag{2.2}$$

Находим моменты инерции системы этих масс относительно осей $Cx_1y_1z_1$:

$$I_{y_1} = 0, \qquad I_{x_1} = I_{z_1} = m_1a_1^2 + m_2a_2^2 = Ma_1a_2 \tag{2.3}$$

Гирационный эллипсоид для системы наших двух масс m_1, m_2 вырождается в диск радиуса $\sqrt{a_1a_2}$ с центром в C, лежащий в плоскости Cx_1z_1; для того чтобы радиус-вектор точки A попрежнему равнялся p, надо положить

$$p = \sqrt{a_1a_2}$$

Отсюда легко находим по (2.2)

$$m_1 = M\frac{p^2}{p^2 + a_1^2}, \qquad m_2 = M\frac{a_1^2}{p^2 + a_1^2} \tag{2.4}$$

§ 3. Легко показать, что масса m_1 и есть масса μ, приведенная к линии удара. Действительно, поскольку массы m_1 и m_2 вполне эквивалентны всему телу в смысле проекций скоростей всех точек плоскости Cx_1y_1 на эту плоскость, то, заменяя тело системой этих двух масс, мы правильно найдем проекцию на линию удара скорости любой точки на этой линии; ясно, что удар сообщает скорость массе m_1 в направлении удара и, следовательно $m_1 = \mu$; масса m_2 остается в покое; следовательно, скорость точки D направлена перпендикулярно плоскости Cx_1y_1. Таким образом, скорости, сообщенные точкам тела ударом, таковы, как если бы оно двигалось плоским движением параллельно плоскости, проходящей через центр тяжести и линию удара, и в то же время вращалось вокруг оси, лежащей в этой плоскости и проходящей через центр тяжести; все распределение скоростей в плоском движении таково, как если бы мы заменили тело системой двух точечных масс при условии неизменности массы, положения центра тяжести и радиус-вектора центрального гирационного эллипсоида в точке его пересечения с векторным моментом удара относительно центра тяжести; если одну из этих масс поместить в основание перпендикуляра, опущенного из центра тяжести на линию удара, то величина этой массы равна массе тела, приведенного к линии удара.

Нетрудно проверить эти выводы аналитически; имеем для точки B (фиг. 2)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_c + \omega \times \mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = \mathbf{CB}) \tag{3.1}$$

Отсюда по (1.3) — (1.5) находим

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{S} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{S} + (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{S} = \frac{S^2}{M} + (\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \cdot \omega = \frac{S^2}{M} + \mathbf{M}_c \cdot \omega = \frac{S^2 (p^2 + a_1^2)}{M p^2}$$

По определению Н. Е. Жуковского имеем

$$\mu = S : \frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{S}}{S} = \frac{S^2}{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{S}} = M \frac{p^2}{p^2 + a_1^2} \tag{3.2}$$

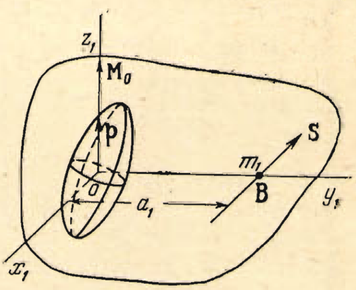
т. е., сравнивая с (2.4), имеем $\mu = m_1$. Складывая поступательную скорость $\mathbf{v}_c$ с составляющей ω' угловой скорости вдоль оси Cz_1, получим новую угловую скорость, параллельную оси Cz_1 и проходящую через точку D, так как

$$CD = \frac{v_c}{\omega_{z_1}} = \frac{SMp^2}{MM_c} = \frac{p^2}{a_1} = a_2$$

Следовательно, от этого вращения точка D не получит скорости; от вращения соответствующего той составляющей угловой скорости, которая лежит в плоскости Cx_1y_1, точка D получит скорость, перпендикулярную к плоскости Cx_1y_1.

В том частном случае, когда удар $\mathbf{S}$ лежит в одной из главных центральных плоскостей тела, система масс m_1 и m_2 вполне динамически эквивалентна рассматриваемому телу. Если построить круговое сечение центрального гирационного эллипсоида, восставить к нему перпендикуляр CN и если удар роходит через какую-нибудь точку этого перпендикуляра, то масса тела, приведенная к линии удара, не изменяется [5] при вращении вектора $\mathbf{S} \perp CN$ вокруг точки N при условии $\mathbf{S} \perp CN$. Если тело имеет неподвижную точку O (фиг. 3), то, построив для нее гирационный эллипсоид, мы снова приходим к формуле

$$\omega_{z_1} = \frac{M_0}{M p^2} \tag{3.3}$$



Фиг. 3

где p — радиус-вектор точки пересечения гирационного эллипсоида с вектором $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0(\mathbf{S})$; таким образом, распределение скоростей в плоском движении зависит только от величины Mp^2. Вводя одну массу m_1, мы снова получим для нее

$$I_{x_1} = I_{z_1} = m_1 a_1^2, \qquad I_{y_1} = 0$$

Отсюда вытекает, что гирационный эллипсоид снова вырождается в круг радиуса a_1, лежащий в плоскости Ox_1z_1, с центром в точке O. Из условия $m_1 a_1^2 = Mp^2$ находим

$$m_1 = \frac{Mp^2}{a_1^2} \tag{3.4}$$

Так как распределение скоростей в плоском движении такое же, как если бы тело было заменено массой m_1, прикрепленной к неподвижной точке O посредством невесомого стержня OB, то

$$\mu = m_1 = M \frac{p^2}{a_1^2} \tag{3.5}$$

Поступила 12 VI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О соударении тел. Собр. соч., т. I, стр. 35—40, 1948.
2. Жуковский Н. Е. К вопросу о наибольшем ударе. Собр. соч., т. I.
3. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. Собр. соч., т. V, 1949.
4. Геронимус Я. Л. О применении метода замещающих точек в динамике плоского движения. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.
5. Геронимус Я. Л. Действие удара на свободное твердое тело. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.