Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О. П. Алексеева

(Ленинград)

В работах Н. П. Еругина [1] и М. М. Смирнова [2] даны примеры замкнутых решений параболической граничной неоднородной задачи. В настоящей заметке указывается регулярный способ построения замкнутых решений некоторых краевых задач математической физики, опирающийся на контурное интегрирование.

1. Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.1)$$

при условиях

$$[u(y,t)]_{y=0} = P = \mathrm{const} \qquad (t > 0) \qquad (1.2)$$

$$[u(y,t)]_{y=l} = 0 \qquad (t > 0) \qquad (1.3)$$

$$[u(y,t)]_{t=0} = 0 \qquad (0 < y < l) \qquad (1.4)$$

Применяя преобразование Лапласа-Карсона к уравнению (1.1), сводим решение указанной задачи к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u^*}{dy^2} = pu^* \qquad (1.5)$$

при условиях

$$[u^*(y,p)]_{y=0} = P = \mathrm{const}, \qquad [u^*(y,p)]_{y=l} = 0 \qquad (1.6)$$

Отсюда находим

$$u^*(y,p) = \frac{P \,\mathrm{sh}\,(l-y)\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\, l\sqrt{p}} \qquad (1.7)$$

Переходя от изображения решения (1.7) рассматриваемой задачи (1.1) — (1.4) к оригиналу по формуле Римана-Меллина, получим

$$u(y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} P\,\mathrm{sh}\,(l-y)\sqrt{p}}{p\,\mathrm{sh}\, l\sqrt{p}}\, dp \qquad (1.8)$$

Здесь интегрирование производится по прямой $\mathrm{Re}\, p = \sigma$, параллельной мнимой оси и расположенной справа от всех особых точек подинтегральной функции. Вычисляя интеграл (1.8) двумя указанными ниже способами, получим два хорошо известных решения задачи (1.1) — (1.4) в виде ряда Фурье и ряда интегралов.

Первый способ. Применяя лемму Жордана, сводим вычисление контурного интеграла (1.8) к вычислению суммы вычетов подинтегральной функции

$$u(y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{P\,\mathrm{sh}\,(l-y)\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\, l\sqrt{p}}\, dp = \sum \mathrm{Res}\, f(p), \qquad f(p) = \frac{Pe^{pt}\mathrm{sh}\,(l-y)\sqrt{p}}{p\,\mathrm{sh}\, l\sqrt{p}} \qquad (1.9)$$

Функция $f(p)$ имеет полюсы $p=0$, $p_n=-\pi^2n^2/l^2$. Вычеты в этих полюсах равны

$$\operatorname*{Res}_{p=0} f(p)=\lim_{p\to 0}\frac{Pe^{pt}\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p}}{p\operatorname{sh} l\sqrt{p}}=P\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p}}{\operatorname{sh} l\sqrt{p}}=P\frac{l-y}{l} \tag{1.10}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n} f(p)=\lim_{p\to p_n}\frac{(p-p_n)\,Pe^{pt}\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p}}{p\operatorname{sh} l\sqrt{p}}= \tag{1.11}$$

$$=\frac{Pe^{p_nt}\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p_n}}{p_n}\lim_{p\to p_n}\frac{p-p_n}{\operatorname{sh} l\sqrt{p}}=-\frac{2P}{n\pi}\sin\frac{n\pi y}{l}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{l^2}\right)$$

Подставив (1.10) и (1.11) в (1.9), получим решение задачи в виде ряда Фурье:

$$u(y,t)=\frac{P(l-y)}{l}-\frac{2P}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi y}{l} \tag{1.12}$$

Второй способ. Разлагая (1.7) в ряд по степеням показательной функции и переходя от каждого члена к оригиналу, получим решение в виде ряда интегралов

$$u(y,t)\doteqdot u^*(y,p)=\frac{P\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p}}{\operatorname{sh} l\sqrt{p}}=$$

$$=P\left[e^{-y\sqrt{p}}-e^{-2l\sqrt{p}+y\sqrt{p}}+e^{2l\sqrt{p}-y\sqrt{p}}-e^{-4l\sqrt{p}+y\sqrt{p}}+\ldots\right]\doteqdot$$

$$\doteqdot P\left[\operatorname{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{Erf}\left(\frac{2l-y}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{Erf}\left(\frac{2l+y}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{Erf}\left(\frac{4l-y}{2\sqrt{t}}\right)+\cdots\right] \tag{1.13}$$

где

$$\operatorname{Erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi$$

Замкнутое решение Н. П. Еругина также получается при помощи интеграла вида (1.8), если в нем за контур интегрирования принять мнимую ось ($\sigma=0$).

Так как при этом контур интегрирования проходит через полюс подинтегральной функции в начале координат, то к полученному решению необходимо прибавить половину вычета в этом полюсе [4]. Действительно, согласно лемме Жордана

$$u(y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}u^*(y,p)\,dp=\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\sum_{p=p_k}\operatorname{Res} f(p)$$

С другой стороны [4]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}u^*(y,p)\,dp=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\sum_{p=p_k}\operatorname{Res} f(p)$$

Сравнивая правые части, получаем общую формулу для замкнутых решений типа Н. П. Еругина

$$u(y,t)=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}f(p)\,dp=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(i\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[f(i\tau)+f(-i\tau)]\,d\iota \tag{1.14}$$

Если в последнем интеграле (1.14) отделить вещественную часть, то получим решение задачи в замкнутой вещественной форме

$$u(y, t) = \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{p=0} f(p) + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [f(i\tau) + f(-i\tau)]\, d\tau \tag{1.15}$$

(и одновременно представление рядов Фурье типа (1.12) или рядов интегралов типа 1.13) при помощи одного несобственного вещественного интеграла. Для каждой конкретной задачи $f(p)$ находится в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения при соответствующих граничных условиях, как это видно из рассматриваемого примера. Из сказанного вытекает третий способ решения нашей задачи.

Третий способ. В данном случае согласно (1.9) и (1.10)

$$f(p) = \frac{Pe^{pt} \operatorname{sh}(l-y)\sqrt{p}}{p \operatorname{sh} l\sqrt{p}}, \qquad \operatorname*{Res}_{p=0} f(p) = P\frac{l-y}{l}$$

Следовательно, по формуле (1.14) получим

$$u(y, t) = \frac{P}{2}\frac{l-y}{l} + \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{i\tau t}\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{i\tau}}{i\tau \operatorname{sh} l\sqrt{i\tau}} + \frac{e^{-i\tau t}\operatorname{sh}(l-y)\sqrt{-i\tau}}{-i\tau\operatorname{sh} l\sqrt{-i\tau}}\right] d\tau =$$

$$= \frac{P(l-y)}{2l} + \frac{P}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-i\tau t}\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}} - \frac{e^{i\tau t}\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\right] d\tau$$

Это и есть замкнутое решение Н. П. Еругина. Аналогично могут быть получены все результаты работы М. М. Смирнова. Перейдем к более сложной задаче [3].

2. Определить функцию V из условий

$$\frac{dV}{dt} = g + \frac{2\rho\nu}{\sigma}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0 < x < h,\ t > 0) \tag{2.1}$$

$v = 0$ при $x = h,\ t > 0$; $\quad v = V$ при $x = 0,\ t = 0,\quad v = V = 0$ при $t = 0$

Операционное решение задачи имеет вид:

$$V = \frac{g}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,\frac{dp}{p + (2\rho\nu/\sigma)\sqrt{p/\nu}\operatorname{cth} h\sqrt{p/\nu}} \tag{2.2}$$

Подинтегральная функция имеет полюсы

$$p = 0, \qquad p_n = -\frac{\nu}{h^2}\alpha_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

где α_n — действительные положительные корни уравнения

$$\alpha \operatorname{tg}\alpha - k = 0 \qquad \left(k = \frac{2\rho h}{\sigma}\right)$$

Решение задачи в форме ряда имеет вид:

$$V = \frac{\sigma g h}{2\rho\nu} - \frac{4g\rho h^3}{\nu\sigma}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_n^2(\alpha_n^2 + k^2 + k)}\exp\left(-\frac{\nu t\alpha_n^2}{h^2}\right) \tag{2.3}$$

В замкнутой форме Н. П. Еругина согласно (1.14) решение имеет вид:

$$V = \frac{\sigma g h}{2\rho\nu} + \frac{g}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{i\tau t}}{\frac{2\rho\nu}{\sigma}\sqrt{\frac{-i\tau}{\nu}}\operatorname{ctg} h\sqrt{\frac{-i\tau}{\nu}} + i\tau} - \frac{e^{-i\tau t}}{\frac{2\rho\nu}{\sigma}\sqrt{\frac{i\tau}{\nu}}\operatorname{ctg} h\sqrt{\frac{i\tau}{\nu}} - i\tau}\right] d\tau \tag{2.4}$$

Отделив здесь действительную часть, получим замкнутое вещественное решение рассматриваемой задачи. Приравняв эту действительную часть выражению (2.3), получим представление ряда (2.3) в замкнутой вещественной форме.

3. Переход к краевым условиям, зависящим от времени, осуществляется при помощи теоремы о свертке, как показано на следующем примере.

Найти замкнутое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1}$$

при условиях

$$[u(z, t)]_{t=0} = 0 \qquad (0 < z < h) \tag{3.2}$$

$$[u(z, t)]_{z=0} = 0 \qquad (t > 0) \tag{3.3}$$

$$[u(z, t)]_{z=h} = \psi(t) \qquad (t > 0) \tag{3.4}$$

Применяя преобразование Лапласа-Кардона, приведем задачу к уравнению

$$\frac{d^2 u^*}{dz^2} = p u^* \tag{3.5}$$

при условиях

$$[u^*(z, p)]_{z=0} = 0, \qquad [u^*(z, p)]_{z=h} = \psi^*(p) \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.1) — (3.4) в области изображений согласно (3.5) — (3.6) будет

$$u^*(z, p) = \psi^*(p) \frac{\operatorname{sh} z\sqrt{p}}{\operatorname{sh} h\sqrt{p}} \tag{3.7}$$

так как

$$\psi^*(p) \doteqdot \psi(t) \tag{3.8}$$

$$\frac{\operatorname{sh} z\sqrt{p}}{\operatorname{sh} h\sqrt{p}} \doteqdot \theta(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{\operatorname{sh} z\sqrt{p}}{\operatorname{sh} h\sqrt{p}}\, dp = \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{p=0} f(p) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty [f(i\tau) + f(-i\tau)]\, d\tau \tag{3.9}$$

где

$$f(p) = \frac{e^{pt}}{p} \frac{\operatorname{sh} z\sqrt{p}}{\operatorname{sh} h\sqrt{p}} \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{p=0} f(p) = \frac{1}{2} \lim_{p\to 0} \frac{e^{pt} p \operatorname{sh} z\sqrt{p}}{p \operatorname{sh} h\sqrt{p}} = \frac{1}{2} \lim_{p\to 0} \frac{\operatorname{sh} z\sqrt{p}}{\operatorname{sh} h\sqrt{p}} = \frac{1}{2} \lim_{p\to 0} \frac{\frac{z}{2\sqrt{p}} \operatorname{ch} z\sqrt{p}}{\frac{h}{2\sqrt{p}} \operatorname{ch} h\sqrt{p}} = \frac{z}{2h}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty [f(i\tau) + f(-i\tau)]\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\tau} \left[\frac{\sin z\sqrt{-i\tau}}{\sin h\sqrt{-i\tau}}\, e^{i\tau t} - \frac{\sin z\sqrt{i\tau}}{\sin h\sqrt{i\tau}}\, e^{-i\tau t} \right] d\tau \tag{3.11}$$

то по теореме о свертке

$$u(z, t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \psi(\tau)\, \theta(z, t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \psi(\tau) \left\{ \frac{z}{2h} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi} \left[\frac{\sin z\sqrt{-i\xi}}{\sin h\sqrt{-i\xi}}\, e^{i\xi(t-\tau)} - \frac{\sin z\sqrt{i\xi}}{\sin h\sqrt{i\xi}}\, e^{-i\xi(t-\tau)} \right] d\xi \right\} d\tau \tag{3.12}$$

Аналогично строится замкнутое решение уравнения (3.1) при условиях

$$[u(z, t)]_{z=0} = \varphi(t), \qquad [u(z, t)]_{z=h} = \psi(t), \qquad [u(z, t)]_{t=0} = F(z)$$

Поступила 1 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.
2. Смирнов М. М. Некоторые граничные неоднородные задачи уравнения теплопроводности. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
3. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике, стр. 190—191. М., 1948.
4. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, т I, стр. 157. ГТТИ, 1938.