Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К ВАРИАЦИОННЫМ

М. Г. Слободянский

(Москва)

В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о построении приближенного решения и оценки его погрешности в линейных задачах, сводящихся к вариационным. В настоящей работе приведены некоторые дополнительные результаты.

§ 1. Некоторые общие оценки. Если

$$Au = f, \qquad Av = \psi \tag{1.1}$$

где A — положительно-определенный оператор, определенный на линеале M в гильбертовом пространстве H, элементы u, v принадлежат линеалу M, а f, ψ — заданные элементы из H, то [1, 2]

$$\left|(f,\ v) - \frac{1}{2}(b_n + b_n{}^*)\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n - a_n{}^*)(c_n - c_n{}^*)} \tag{1.2}$$

где

$$a_n{}^* - 2\lambda b_n{}^* + \lambda^2 c_n{}^* < F_{f+\lambda\psi}(u + \lambda v) < a_n - 2\lambda b_n + \lambda^2 c_n \tag{1.3}$$

при любом вещественном значении параметра λ, причем $(u,\ v)$ — скалярное произведение элементов u и v

$$F_{f+\lambda\psi}(u + \lambda v) = (A(u + \lambda v),\ \ u + \lambda v) - 2(f + \lambda\psi,\ \ u + \lambda v) \tag{1.4}$$

Пусть найденные каким-либо приближенным методом элементы u_n, v_n принадлежат линеалу M и являются приближенными решениями уравнений (1.1). Обозначим

$$Au_n = f_n, \qquad Av_n = \psi_n \tag{1.5}$$

Имеем (см. [1], § 1)

$$(f,\ v) = b_n + (f - f_n,\ v - v_n), \qquad b_n = (f,\ v_n) + (\psi - \psi_n,\ u_n) \tag{1.6}$$

Для нахождения приближенного значения левой части выражения (1.6) надо найти приближенное значение величины $(f - f_n,\ v - v_n)$ и оценку его погрешности.

Так как на основании (1.1) и (1.5)

$$A(u - u_n) = Au' = f - f_n = \varphi, \qquad A(v - v_n) = Av' = \psi - \psi_n = \chi \tag{1.7}$$

то из (1.2) и (1.3) следует

$$\left|(f - f_n,\ v - v_n) - \frac{1}{2}(b_m{}' + b_m{}'^*)\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a_m{}' - a_m{}'^*)(c_m{}' - c_m{}'^*)} \tag{1.8}$$

где неравенства

$$a_m{}'^* - 2b_m{}'^*\lambda + c_m{}'^*\lambda^2 < F_{\varphi+\lambda\chi}(u' + \lambda v') < a_m{}' - 2b_m{}'\lambda + c_m{}'\lambda^2 \tag{1.9}$$

имеют место при любом вещественном значении параметра λ.

Применение оценок (1.8) и (1.9) может оказаться в некоторых задачах более целесообразным с точки зрения объема вычислительной работы, чем непосредственное применение оценок (1.2) и (1.3), особенно в тех случаях, когда можно ограничиться небольшим числом приближений для получения неравенств (1.9).

Для получения неравенств (1.9) можно применить те же методы, что и для получения неравенств (1.3) (см. [1, 2]). Здесь рассматривается построение неравенств (1.9) при помощи функцинала $H(\sigma)$ (см. [2]).

Допустим, что можно построить функционал $H(\sigma' + \lambda\tau')$ так, что

$$H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m') > H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma' + \lambda\tau') = -F_{\varphi+\lambda\chi}(u' + \lambda v') \tag{1.10}$$

где $\{\sigma_m' + \lambda\tau_m'\}$ — допустимые функции в вариационной задаче о минимуме функционала H. Если далее $u_m' + \lambda v_m'$ — элемент, принадлежащий линеалу M, то для получения неравенств (1.8) и (1.9) имеем

$$\begin{gathered} F_{\varphi+\lambda\chi}(u - u_n + \lambda(v - v_n)) < F_{\varphi+\lambda\chi}(u_m' + \lambda v_m') = a_m' - 2\lambda b_m' + \lambda^2 c_m' \\ H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma' + \lambda\tau') < H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m') = a_m'^* - 2\lambda b_m'^* + \lambda^2 c_m'^* \end{gathered} \tag{1.11}$$

Здесь

$$F_\varphi(u_m') = a_m', \qquad H_\varphi(\sigma_m') = a_m'^*, \qquad F_\chi(v_m') = c_m', \qquad H_\chi(\tau_m') = c_m'^* \tag{1.12}$$

причем b_m', $b_m'^*$ являются коэффициентами при λ в первой степени в выражениях для $F_{\varphi+\lambda\chi}(u_m' + \lambda v_m')$, $H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m')$, т. е.

$$b_m' = F(u_m', v_m'), \qquad b_m'^* = H(\sigma_m', \tau_m')$$

Полагая, в частности, в (1.11) — (1.12)

$$u_m' = v_m' = 0, \qquad F_\varphi(u_m') = 0, \qquad F_\chi(v_m') = 0 \tag{1.13}$$

получим из (1.8) и (1.9)

$$\left| (f - f_n, v - v_n) - \frac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m') \right| \leqslant \delta = \frac{1}{2}\sqrt{H_\varphi(\sigma_m')\, H_\chi(\tau_m')} \tag{1.14}$$

Необходимо отметить, чте если допустимые функции, входящие в (1.14), совпадают с допустимыми функциями, входящими в (1.2), то оценка (1.14) совпадает с оценкой (1.2). Таким образом, если за приближенное значение (f, v) принять величину

$$b_{nm}^* = (f, v_n) + (\psi - \psi_n, u_n) + \frac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m') \tag{1.15}$$

то

$$\left| (f, v) - b_{nm}^* \right| < \delta \tag{1.16}$$

Из (1.14) — (1.16) видно, что $\delta \to 0$ при $\varphi \to 0$ и $\chi \to 0$ независимо от значения m.

Замечание 1. При применении метода Ритца-Галеркина для определения u_n, v_n второй член в правой части (1.15) равен нулю и выражение для b_{nm}^* упрощается ([1], § 1), а именно, в этом случае

$$b_{nm}^* = (f, v_n) + \frac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m') \tag{1.17}$$

Замечание 2. Значительно более грубую оценку погрешности получим при несколько меньшем объеме вычислений, полагая $v_n = 0$, $\psi_n = 0$. Имеем в этом случае

$$b_{nm}^* = (\psi, u_n) + \frac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m), \qquad \left| (f, v) - b_{nm}^* \right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{H_\varphi(\sigma_m')\, H_\psi(\tau_m)} \tag{1.18}$$

Если еще положим $u_n = 0$, то получим из (1.18)

$$b_{0m}^* = \frac{1}{2} H(\sigma_m, \tau_m), \qquad \left| (f, v) - b_{0m}^* \right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{H_f(\sigma_m)\, H_\psi(\tau_m)} \tag{1.19}$$

Оценка (1.19) является грубой; однако в некоторых случаях эта оценка может оказаться полезной.

Замечание 3. Если за приближенное значение (f, v) принять величину b_m вместо $(b_m + b_m^*)/2$, то из оценок, полученных в работе [1] (§ 1), найдем

$$|(f, v)| < \delta_1 = 2\delta = \sqrt{H_f(\sigma_m)\, H_\psi(\tau_m)} \tag{1.20}$$

§ 2. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. В качестве примера на применение оценок § 1 найдем оценку решения краевой задачи

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{du}{dx}\right) + p_0 u = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{2.1}$$

где $p_1(x) \geqslant c_0 > 0$, $p_0(x) \geqslant 0$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Наряду с краевой задачей (2.1) рассмотрим краевую задачу

$$Av = -\frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{dv}{dx}\right) + p_0 v = \psi(x), \qquad v(0) = v(1) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\psi(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 1), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \psi(x)\, dx = 1 \tag{2.3}$$

В нашем случае функционалы H имеют вид [2]:

$$H(\sigma) = \int_0^1 \left[\frac{1}{p_0}\left(\frac{d\sigma}{dx} + f\right)^2 + \frac{1}{p_1}\sigma^2\right] dx, \qquad H(\tau) = \int_0^1 \left[\frac{1}{p_0}\left(\frac{d\tau}{dx} + \psi\right)^2 + \frac{1}{p_1}\tau^2\right] dx \tag{2.4}$$

Полагая в (2.4)

$$\sigma_m(x) = \omega(x) + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots$$

$$\tau_m(x, \xi) = \chi(x, \xi) + \beta_0(\xi) + \beta_1(\xi)\, x + \cdots \tag{2.5}$$

$$\omega(x) = \int_0^x f(x)\, dx, \qquad \chi(x, \xi) = \int_0^x \psi(x, \xi)\, dx$$

где

$$\chi(x, \xi) = 0 \quad \text{при } x \leqslant \xi, \qquad \chi(x, \xi) = 1 \quad \text{при } x > \xi$$

и ограничиваясь в (2.5) первыми коэффициентами α_0 и $\beta_0(\xi)$, найдем из условия минимума функционалов $H(\sigma)$ и $H(\tau)$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{J_0}\int_0^1 \frac{\omega}{p_1}\, dx, \qquad \beta_0(\xi) = -\frac{1}{J_0}\int_0^1 \frac{\chi(x, \xi)}{p_1}\, dx = -\frac{1}{J_0}\int_\xi^1 \frac{\chi(x, \xi)}{p_1}\, dx \tag{2.6}$$

где

$$J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{p_1}$$

и, следовательно,

$$H(\sigma_m) = \int_0^1 \frac{[\omega(x) + \alpha_0]^2}{p_1}\, dx$$

$$H(\tau_m) = \int_0^1 \frac{[\chi(x, \xi) + \beta_0(\xi)]^2}{p_1(x)}\, dx = \frac{1}{J_0}\int_0^\xi \frac{dx}{p_1}\int_\xi^1 \frac{dx}{p_1} \tag{2.7}$$

Далее, из (1.19), принимая во внимание (2.5) — (2.7), получим

$$|u(\xi) - b_m^*(\xi)| < \delta \tag{2.8}$$

$$\delta(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{J_0}}\left(\int_0^1 \frac{[\omega(x) + \alpha_0]^2}{p_1}\, dx\right)^{1/2}\left(\int_0^\xi \frac{dx}{p_1}\int_\xi^1 \frac{dx}{p_1}\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

$$b_m^*(\xi) = \int_0^1 \frac{\sigma_m(x)\,\tau_m(x, \xi)}{p_1}\, dx = \int_0^1 \frac{[\omega(x) + \alpha_0][\chi(x, \xi) + \beta_0(\xi)]}{p_1}\, dx \tag{2.10}$$

Выражения (2.10) и (2.9) дают нам приближенное значение для $u(\xi)$ и оценку погрешности этого приближения. Неравенство (2.9) можно усилить. Имеем

$$\int_0^\xi \frac{dx}{p_1}\int_\xi^1 \frac{dx}{p_0} \leqslant \frac{1}{4} J_0^2 \tag{2.11}$$

так как

$$\int_0^\xi \frac{dx}{p_1}\int_\xi^1 \frac{dx}{p_1} = J_0$$

Пользуясь (2.11), получим

$$\delta(\xi) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{J_0}\left(\int_0^1 \frac{[\omega(x)+\alpha_0]^2}{p_1}\,dx\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

Неравенство (2.12) можно еще усилить, если подставим в (2.12) вместо α_0 значение α_0', где

$$\alpha_0' = -\int_0^1 \omega(x)\,dx \qquad \text{или} \qquad \int_0^1 [\omega(x)+\alpha_0']\,dx = 0 \tag{2.13}$$

Имеем

$$\max \delta(\xi) \leqslant \frac{1}{4\sqrt{c_0}}\sqrt{J_0}\left(\int_0^1 [\omega(x)+\alpha_0']^2 dx\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

Воспользовавшись далее известной теоремой В. А. Стеклова [4] для функции, удовлетворяющей условию (2.13), можно также усилить неравенство (2.14); получим:

$$\delta(\xi) < \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}}\sqrt{J_0}\left(\int_0^1 [\omega'(x)]^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad \omega'(x) = f(x) \tag{2.15}$$

Если же воспользоваться неравенством (1.20), дающим оценку для погрешности приближенного решения в два раза большую, чем неравенство (1.19), то получим вместо (2.8) и (2.15)

$$|u(\xi)| < \delta_1 = 2\delta = \frac{1}{2\pi\sqrt{c_0}}\sqrt{J_0}\left(\int_0^1 [f(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \tag{2.16}$$

Оценка (2.16) для решения краевой задачи (2.1) является несколько более точной, чем известная оценка Н. М. Крылова [3]

$$|u(\xi)| < \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,c_0}\left(\int_0^1 [f(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \tag{2.17}$$

Из изложенного следует, что при помощи оценки (2.9) можно получить меньшую величину для погрешности, чем при помощи оценок (2.12) — (2.16).

Для улучшения оценки (2.9) следует, очевидно, удержать в разложениях (2.5) дополнительные члены, а также воспользоваться более точными оценками (1.8)—(1.9).

Поступила 31 III 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Слободянский М. Г. Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
2. Слободянский М. Г. Оценки погрешностей приближенных решений линейных задач. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.
3. Крылов Н. М. Les méthodes de solution approchée de problèmes de la physique mathématiques. Mémorial de Sciences Mathématiques, № 49, Paris, 1931.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1949.