Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ТОРООБРАЗНОЙ ОБОЛОЧКИ

М. И. Эстрин

(Москва)

Решение однородной задачи для симметрично нагруженной торообразной оболочки сводится [1] к решению уравнения

$$(1+\alpha\sin\theta)\frac{d^2V}{d\theta^2}-\alpha\cos\frac{dV}{d\theta}+\alpha\lambda^2\sin\theta V=0 \tag{1}$$

где

$$\lambda^2=\sqrt{12\,(1-\mu^2)}\,\frac{r_0}{h}\qquad\left(\alpha=\frac{r_0}{R_0}\right)$$

Ограничимся случаем, когда $\alpha<1$. Подстановкой

$$V=u\sqrt{1+\alpha\sin\theta}$$

это уравнение может быть приведено к виду:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\alpha\left[\frac{(\lambda^2 i-{}^1/_2)\sin\theta}{1+\alpha\sin\theta}-\frac{3}{4}\,\frac{\alpha\cos^2\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2}\right]u=0 \tag{2}$$

Так как $\lambda^2\gg\alpha$, то можно положить

$$\frac{\cos^2\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2}\approx 1$$

В малой окрестности точек $\theta=0$ и $\theta=\pi$ это даст хорошую апроксимацию, а в остальной области изменения θ второй член в квадратной скобке вообще не играет роли, так как он мал по сравнению с первым. Ошибка от такой замены даже при $r_0/h=10$ и $\alpha=1$ не превышает $6{,}5\%$ и уменьшается с уменьшением α. Можно также отбросить ${}^1/_2$ по сравнению с λ^2 в первом члене.

Итак, уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\alpha\left[\frac{\lambda^2 i\sin\theta}{1+\alpha\sin\theta}-\frac{3}{4}\,\alpha\right]u=0 \tag{3}$$

Это уравнение, как и уравнение (1), является уравнением с периодическими коэффициентами и может быть решено методом Хилла.

Для этого представим коэффициент при u в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik0}$$

где

$$c_0=\lambda^2 i\left(1-\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)-\frac{3}{4}\,\alpha^2,\qquad c_k=\frac{\alpha\lambda^2}{2}\,\frac{a^{k-1}(1-a^2)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$c_{-k}=\frac{\alpha\lambda^2}{2}\,\frac{a_1^{\,k-1}(1-a_1^{\,2})}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad a=-a_1=\frac{i}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$$

Согласно общей теории ищем решение в виде

$$u = e^{\mu\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\theta}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$, получим для b_k бесконечную систему

$$(\mu + ni)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m b_{n-m} = 0 \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

Условием существования ненулевого решения этой системы является условие равенства нулю ее определителя:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{c_1}{c_0 - 1} & \frac{c_0 + (\mu - i)^2}{c_0 - 1^2} & \frac{c_{-1}}{c_0 - 1^2} & \frac{c_{-2}}{c_0 - 1^2} & \frac{c_{-3}}{c_0 - 1^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{c_2}{c_0 - 0^2} & \frac{c_1}{c_0 - 0^2} & \frac{c_0 + (\mu + 0)^2}{c_0 - 0^2} & \frac{c_{-1}}{c_0 - 0^2} & \frac{c_{-2}}{c_0 - 0^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{c_3}{c_0 - 1^2} & \frac{c_2}{c_0 - 1^2} & \frac{c_1}{c_0 - 1^2} & \frac{c_0 + (\mu + i)^2}{c_0 - 1^2} & \frac{c_{-1}}{c_0 - 1^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{c_4}{c_0 - 2^2} & \frac{c_3}{c_0 - 2^2} & \frac{c_2}{c_0 - 2^2} & \frac{c_1}{c_0 - 2^2} & \frac{c_0 + (\mu + 2i)^2}{c_0 - 2^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение может быть приведено к виду:

$$\sin^2 \pi i \mu = \Delta(0) \sin^2 \pi \sqrt{c_0} \tag{5}$$

Формула (5) выводится совершенно так же, как это сделано в книге Уиттекера и Ватсона [2] для случая, когда коэффициент уравнения является четной функцией.

Вопрос о вычислении $\Delta(0)$ рассмотрен в работе [3]. Заметим, однако, что при малых α определитель $\Delta(0)$ хорошо сходится и его можно вычислять, заменяя конечным определителем, в котором обычно достаточно бывает удержать 3—5 центральных строк и столбцов.

Двум корням μ_1 и μ_2 уравнения (5) соответствуют два линейно независимых решения уравнения (3), причем, очевидно, $\mu_1 = -\mu_2$. Зная μ, можно из системы (4) найти коэффициенты b_n и тем самым определить функцию V; однако для определения V удобнее исходить из уравнения (1), а не из уравнения (3).

Решение уравнения (1) также имеет вид:

$$V = e^{\mu'\theta} \psi(\theta)$$

где $\psi(\theta)$ — периодическая функция с периодом 2π.

Докажем, что $\mu' \approx \mu$, где μ определено уравнением (5).

Так как $V(\theta) = u(\theta)\, w(\theta)$, где $u(\theta)$ и $w(\theta)$ — периодические функции с периодом 2π, то

$$e^{\mu'\theta} \psi(\theta) = w(\theta) \left[A_1 e^{\nu_1\theta} u_1(\theta) + A_2 e^{\nu_2\theta} u_2(\theta)\right] \tag{6}$$

где ν_1 и ν_2 — характеристические показатели уравнения (2).

Заменяя θ на $\theta + 2n\pi$ и деля все на $e^{2n\pi\mu'}$, получим

$$e^{\mu'\theta} \psi(\theta) = w(\theta) \left[A_1 \xi_1 e^{\nu_1\theta} u_1(\theta) + A_2 \xi_2 e^{\nu_2\theta} u_2(\theta)\right]$$

где

$$\xi_i = e^{2n\pi(\nu_i - \mu')} \qquad (i = 1, 2)$$

Сравнивая с (6), видим, что должно выполняться одно из равенств:

$$A_i \xi_i = A_i \qquad (i=1, 2)$$

Так как $\nu_1 \neq \nu_2$, отсюда следует, что

$$\nu_i - \mu' = 0, \qquad A_k = 0 \qquad (i=1, 2;\ i \neq k)$$

Так как $\nu_i \approx \mu$, то наше утверждение доказано. Представив $V(\theta)$ в виде

$$V(\theta) = e^{\mu\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

и подставляя в уравнение (1), получим для a_k совокупность трехчленных рекуррентных соотношений вида:

$$a_{n-1} f_{n-1} + a_n (\mu + ni)^2 + a_{n+1} g_{n+1} = 0 \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

где

$$f_n = \frac{1}{2}\alpha \left[(\mu + ni) - i(\mu + ni)^2 + \lambda^2\right], \qquad g_n = \frac{1}{2}\alpha\left[(\mu + ni) + i(\mu + ni)^2 - \lambda^2\right]$$

Исключая последовательно из этих соотношений отношения неизвестных, получим, что отношение a_n / a_{n-1} может быть определено в виде следующей бесконечной цепной дроби:

$$g_n \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{f_{n-1} g_n}{-[\mu + ni]^2 + \dfrac{f_n g_{n+1}}{[\mu + (n+1)i]^2 - \dfrac{f_{n+1} g_{n+2}}{[\mu + (n+2)i]^2 + \cdots}}} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (7)$$

Эта дробь удобна для вычисления a_n / a_{n-1} лишь при $n \geqslant 0$. Если $n < 0$, более удобна цепная дробь следующего вида:

$$f_n \frac{a_{-n}}{a_{-(n-1)}} = \frac{f_{-n} g_{-(n-1)}}{-[\mu - ni]^2 + \dfrac{f_{-(n+1)} g_{-n}}{[\mu - (n+1)i]^2 + \dfrac{f_{-(n+2)} g_{-(n+1)}}{[\mu - (n+2)i]^2 + \cdots}}} \quad (8)$$

Дроби (7) и (8) позволяют быстро вычислять коэффициенты a_n, поскольку даже при $\alpha = 0.5 - 0.6$ их сходимость, как показывает практика вычислений, остается удовлетворительной.

Это обстоятельство отмечено также и в работе [4] для цепных дробей, которые там получаются при решении неоднородной задачи.

Так как $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$, то два решения уравнения (1) можно взять в виде

$$V_1(\theta) = e^{\mu(\theta - \theta_1)} \psi_1(\theta), \qquad V_2(\theta) = e^{\mu(\theta_2 - \theta)} \psi_2(\theta)$$

где θ_1 и θ_2 — координаты краев оболочки.

Такая форма соответствует физическому смыслу однородной задачи, решения которой суть функции, быстро затухающие при удалении от краев оболочки. При этом, если $\theta_2 - \theta_1$ достаточно велико, то становится возможным раздельное удовлетворение граничных условий.

Рассмотрим особо случай[1], когда $\alpha \ll 1$. Заметим, что в этом случае метод

---

[1] Этот случай встречается при расчете цилиндрических резервуаров с плоским днищем и торообразным переходом от днища к корпусу, а также в некоторых видах торообразных компенсаторов, когда

$$\alpha = \frac{1}{15} - \frac{1}{50}$$

Е. Ф. Зеновой и В. В. Новожилова [4] неприменим, поскольку он основан на том, что $^{16}/_5\,\lambda^2\alpha \gg 1$, что может не иметь места при очень малом α.

В этом случае уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha\lambda^2 i \sin\theta\, u = 0$$

для коэффициентов b_n получаем бесконечную систему

$$c_1 b_n + (\mu + ni)^2 b_{n+1} + c_{-1} b_{n+2} = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

где

$$c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2}\lambda^2\alpha$$

и определитель этой системы будет

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots 0 & \frac{c_1}{1^2} & \frac{(\mu - i)^2}{1^2} & \frac{c_{-1}}{1^2} & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & c_1 & \mu^2 & c_{-1} & 0 & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{1^2} & \frac{(\mu + i)^2}{1^2} & \frac{c_{-1}}{1^2} & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{2^2} & \frac{(\mu + 2i)^2}{2^2} & \frac{c_{-1}}{2^2} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Точно такими же методами, как и для общего случая, можно показать, что уравнение $\Delta(\mu) = 0$ приводится к виду:

$$\sin^2 \pi i\mu = \pi^2 \Delta(0)$$

Так как, очевидно, $\Delta(0) = -p^2$, где p — действительно, то, заменяя в (10) $\sin \pi i\mu$ на $i \operatorname{sh} \pi\mu$, получим для определения μ уравнение

$$\operatorname{sh} \pi\mu = \pm \pi p$$

Из рекуррентных соотношений (9) можно определить коэффициенты b_n при помощи цепных дробей, аналогичных (7) и (8). Для этого надо в (7) и (8) положить

$$f_n = -g_n = \frac{1}{2}\lambda^2\alpha$$

Поступила 25 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа. ГТТИ, 1934.
3. Проскуряков А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946.
4. Зенова Е. Ф., Новожилов В. В. Симметричная деформация торообразных оболочек. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.