Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАСЧЕТ ПРОФИЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ДЛЯ УСЛОВИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. Г. Костюк

(Москва)

Рассматривается задача определения профиля вращающегося тонкого диска для условий стационарной ползучести по заданному закону изменения напряжений или деформаций по радиусу.

Закон ползучести может быть задан произвольно. Температурное поле диска предполагается полярно-симметричным.

§ 1. Для тонкого плоского вращающегося диска переменной толщины $h = h(\rho)$ уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d}{d\rho}(h\rho\sigma_r) - h\sigma_\theta + Ah\rho^2 = 0 \qquad \left(\rho = \frac{r}{b}, \quad A = \frac{\gamma\omega^2 b^2}{g}\right) \tag{1.1}$$

Здесь r — переменный радиус, b — наружный радиус диска, σ_r, σ_θ — радиальное и окружное напряжения, γ — удельный вес материала, ω — угловая скорость вращения, g — гравитационное ускорение.

Решая (1.1) относительно h, получим результат:

$$\frac{h}{h_b} = \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_r} \exp \int_\rho^1 \frac{A\rho^2 + \sigma_r - \sigma_\theta}{\rho\sigma_r} d\rho \tag{1.2}$$

Индексом b отмечены значения величин на периферии диска.

При заданном законе изменения одной из характеристик напряженного или деформированного состояния напряжения σ_r, σ_θ могут быть найдены из уравнения совместности деформаций

$$\frac{du_\theta}{d\rho} + \frac{u_\theta - u_r}{\rho} = 0 \tag{1.3}$$

u_r, u_θ — радиальная и окружная скорости стационарной ползучести.

Уравнения стационарной ползучести в рассматриваемом случае запишутся в форме

$$u_r = \frac{u_i}{\sigma_i}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta\right), \qquad u_\theta = \frac{u_i}{\sigma_i}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r\right) \tag{1.4}$$

$$u_i = u_i(\sigma_i, \tau), \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2}, \quad u_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{u_r^2 + u_r u_\theta + u_\theta^2} \tag{1.5}$$

где u_i, σ_i — интенсивность скоростей ползучести и интенсивность напряжений соответственно, τ — температура, заданная в виде произвольной функции от ρ.

Подставив (1.4) в (1.3), после преобразований получим уравнение совместности деформаций в виде

$$\frac{dz}{d\rho} + 3\frac{z}{\rho} = -\frac{d\psi}{d\rho} \qquad \left(z = u_i\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{\sigma_i}, \quad \psi = u_i\frac{\sigma_\theta}{\sigma_i}\right) \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.6) запишется следующим образом:

$$z = \frac{1}{\rho^3}\left(C - \int\limits_{\rho_a}^{\rho} \frac{d\psi}{d\rho}\rho^3\,d\rho\right) \tag{1.7}$$

Индексом a отмечены значения величин на внутреннем контуре диска.

Произведя интегрирование по частям и применяя граничное условие ($\sigma_{ra} = 0$), из (1.7) получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta \left[2 - \frac{1}{\psi\rho^3}\left(2\psi_a\rho_a{}^3 + 3\int\limits_{\rho_a}^{\rho} \psi\rho^2\,d\rho\right)\right] \tag{1.8}$$

Соотношение (1.8) является интегральным уравнением относительно радиального напряжения σ_r при заданном законе $u(\rho)$, или $\sigma_i(\rho)$, или $\sigma_\theta(\rho)$ и при учете (1.5). Его решение (получаемое вообще численными методами) доставит значения $\sigma_r(\rho)$ и $\sigma_\theta(\rho)$, после чего профиль диска определяется по уравнению (1.2).

Предположим, что σ_r, σ_θ всюду положительны. Тогда по А. А. Ильюшину [1]

$$\sigma_i \approx \varkappa\sigma_\theta \qquad \left(\varkappa = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \tag{1.9}$$

Замена (1.9) превращает интегральное уравнение (1.8) в формулу, содержащую просто квадратуру:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \left[2 - \frac{1}{u_i\rho^3}\left(2u_{ia}\rho^{a3} + 3\int\limits_{\rho_a}^{\rho} u_i\rho^2\,d\rho\right)\right] \tag{1.10}$$

где

$$u_i = u_i(\varkappa\sigma_\theta,\ \tau) = u_i(\rho)$$

Решения рассматриваемой задачи, основанные на соотношении (1.9), будем называть приближенными.

Из сказанного следует, что приближенное определение профиля неравномерно нагретого диска по заданной характеристике напряженного или деформированного состояния приводится к квадратурам.

§ 2. Рассмотрим диск равного сопротивления ползучести ($u_i = \mathrm{const}$). В этом случае для произвольного закона изменения температуры может быть получено точное решение.

Для диска без центрального отверстия уравнение совместности (1.3) будет удовлетворено, если положить $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma(\rho)$ в каждой точке диска.

Тогда профиль определится по формуле

$$\frac{h}{h_b} = \frac{\sigma_b}{\sigma}\exp\left(A\int\limits_{\rho}^{1}\frac{\rho\,d\rho}{\sigma}\right) \tag{2.1}$$

Для равномерно нагретого диска $\sigma = \mathrm{const}$, и из (2.1) получается классический профиль диска равного сопротивления.

Простой результат можно получить для случая, когда закон изменения температуры по радиусу допускает апроксимацию напряжения по зависимости:

$$\sigma = \sigma_b + \Delta\sigma(1 - \rho^2) \tag{2.2}$$

где $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$ — разница допускаемых напряжений в центре и на периферии.

При этом из (2.1) получим

$$\frac{h}{h_b} = [1 + \lambda(1 - \rho^2)]^{{}^1/_2\, s/\lambda - 1} \tag{2.3}$$

Здесь обозначено $\lambda = \Delta\sigma / \sigma_b$, $s = A / \sigma_b$.

При $s = 3$ сравнение толщины диска у центра при неравномерном (h_τ) и равномерном (h) нагреве и при одинаковой температуре на периферии дает цифры, приведенные ниже:

$$\lambda = 0.00 \quad 0.20 \quad 0.40 \quad 0.60 \quad 0.80 \quad 1.00$$

$$h_\tau / h = 1.00 \quad 0.730 \quad 0.563 \quad 0.451 \quad 0.373 \quad 0.316$$

Профиль диска с центральным отверстием рассмотрим, предположив, что интенсивность скоростей деформации задана степенной функцией (ν — постоянная)

$$u_i = u_{ib}\rho^\nu \tag{2.4}$$

Соответствующие значения σ_i определяются из (1.5). Вводя переменную φ, по формулам [1]

$$u_r = -u_i \sin\left(\varphi - \frac{1}{6}\pi\right), \qquad u_\theta = u_i \sin\left(\varphi + \frac{1}{6}\pi\right) \tag{2.5}$$

из уравнения совместности (1.3), используя (2.4), получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\cos(\varphi + {}^1/_6\pi)}{k\sin(\varphi + \delta)}\,d\varphi \qquad \left(k = \sqrt{3 + 3\nu + \nu^2}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\nu}{\sqrt{3}\,(2 + \nu)}\right) \tag{2.6}$$

Из (1.4) и (2.5) выражения для напряжений получаются, как известно, в виде

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i \cos\left(\varphi + \frac{1}{6}\pi\right), \qquad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i \cos\left(\varphi - \frac{1}{6}\pi\right) \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.6) при граничном условии $\sigma_{ra} = 0$ имеет вид:

$$\rho = \rho_a\left[\frac{\sin({}^1/_3\pi + \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}\right]^\alpha \exp\beta\left(\varphi - \frac{1}{3}\pi\right) \qquad \left(\alpha = \frac{3 + 2\nu}{2k^2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2k^2}\right) \tag{2.8}$$

При $\rho = 1$ уравнение (2.8) определяет значение параметра $\varphi = \varphi_b$, соответствующее периферии диска. Формулы (2.7) дают значения напряжений в зависимости от ρ при использовании соотношений (1.5), (2.4) и (2.8).

Учитывая последнее, из уравнения (1.2) после преобразований получаем форму профиля

$$\frac{h}{h_b} = \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_r}\exp\left(A\int_\rho^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sigma_r}\right)\left[\frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin(\varphi_b + \delta)}\right]^p \exp\left[q(\varphi_b - \varphi)\right] \tag{2.9}$$

$$p = \frac{\nu}{2k^2}, \qquad q = \frac{\sqrt{3}\,(2 + \nu)}{2k^2}$$

Решение (2.8), (2.9) при $\nu = 0$ и при условии равномерного нагрева диска ($\tau = \mathrm{const}$) переходит в решение, полученное Ю. Н. Работновым [2].

§ 3. Результаты экспериментального изучения условий разрушения при ползучести в сложном напряженном состоянии указывают на возможность принять в качестве критерия прочности (при межкристаллическом характере разрушения материала) наибольшее нормальное напряжение [3].

Диском «равной прочности» в условиях ползучести назовем диск, спрофилированный по заданному закону наибольших нормальных напряжений σ_0, определяемому температурным полем диска.

Задача расчета профиля диска равной прочности приближенно решается путем использования уравнений (1.2) и (1.8).

В этом параграфе рассмотрим точное решение для случая постоянной температуры ($\tau = \mathrm{const}$ и, следовательно, $\sigma_0 = \mathrm{const}$) и при законе ползучести

$$u_i = N\sigma_i^{1/\mu} \qquad (0 < \mu \leqslant 1) \tag{3.1}$$

Заменяя в уравнении совместности (1.3) скорости деформации по формулам (1.4) и используя (3.1) при условии $\sigma_\theta = \mathrm{const}$, после преобразований получим уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = \left(\frac{3\mu - 1}{6\mu}\frac{1}{1-x} - \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1-x}{1-x+x^2}\right) \qquad \left(x = \frac{\sigma_r}{\sigma_\theta}\right)$$

Решение его при условии $\sigma_{ra} = x_a = 0$ имеет вид:

$$\rho = \rho_a \exp\left(\frac{\pi n}{6}\right) |1-x|^l (1 - x + x^2)^m \exp\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.2}$$

Здесь

$$l = \frac{1-3\mu}{6\mu}, \qquad m = -\frac{1-\mu}{4\mu}, \qquad n = \frac{1-\mu}{2\sqrt{3}\mu}$$

Определение профиля диска равной прочности при поставленных условиях приводится к квадратуре, получаемой из (1.2) при использовании решения (3.2).

Следует отметить, что все рассматриваемые оптимальные профили диска с центральным отверстием имеют неограниченно возрастающую толщину при $\rho \to \rho_a$, если на внутреннем контуре $\sigma_r = 0$. Поэтому реальный диск должен иметь вблизи центрального отверстия ступенчатое изменение толщины. Толщина диска в зоне, примыкающей к внутреннему контуру, может быть выбрана так, чтобы выполнялись условия сопряжения на границе профильной и центральной зон при одновременном сохранении оптимальных условий в профильной части.

Поступила 24 VI 1953

Московский энергетический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. Работнов Ю. Н. О диске равного сопротивления. ПММ, т. XII, вып. 4, 1948.
3. Johnson A. F. and Frost N. E. Fracture under combined stress creep conditions of 0.5 per cent Mo steel. The Engineer, vol. 191, Nr 4967, 1951.