Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. А. Ростовцев
(Чаплыгин)

Задача вычисления поля напряжений в полупространстве в условиях контактной задачи имеет полное эффективное решение только в плоской теории упругости; в трехмерной теории (при отсутствии трения) эта задача принципиально решается представлением одной из функций напряжений в виде ньютонова потенциала простого слоя, плотностью которого является давление в области контакта ([1], стр. 169). При задании смещений в области контакта давление заранее неизвестно и должно быть найдено как решение некоторого интегрального уравнения.

В осесимметричном случае последняя задача решена в замкнутой форме ([2], стр. 163—171), весьма удобной для вычисления конечных результатов.

Менее удобное представление давления в области контакта, полученное при помощи функции Грина, дано в монографии ([1], стр. 192).

Однако вычисление ньютонова потенциала, определяющего функцию напряжений, представляет значительные трудности, и вследствие этого распределение напряжений в полупространстве для осесимметричной задачи изучено только в случае упругого контакта Герца [3, 4].

В настоящей работе дается способ вычисления полей напряжений и смещений в осесимметричном случае при отсутствии трения и сцепления, не требующий вычисления ньютонова потенциала и приводящий решение задачи к выполнению нескольких квадратур.

1. В случае осесимметричной задачи компоненты смещения u_r и u_z суть функции только r, z; компонента $u_\theta = 0$; кроме того, напряжения $\tau_{r\theta} = 0$ и $\tau_{z\theta} = 0$.

Уравнениям равновесия при дополнительном условии $\tau_{rz} = 0$ для $z = 0$ можно удовлетворить, положив

$$u_r = \Phi - \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \qquad u_z = \Psi - \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, Ψ — гармоническая функция, а Φ находится через Ψ из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{1.2}$$

и условия $\Phi = 0$ при $r = 0$. Отсюда следуют формулы:

а) для объемного расширения

$$\Theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{1.3}$$

б) для напряжений

$$\begin{aligned} 2\pi\vartheta\sigma_r &= -\frac{2(1-\nu)\Phi}{r} + + \frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \qquad & 2\pi\vartheta\sigma_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ 2\pi\vartheta\sigma_\theta &= \frac{2(1-\nu)\Phi}{r} + 2\nu\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{z}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \qquad & 2\pi\vartheta\tau_{rz} &= -z\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial z} \end{aligned} \tag{1.4}$$

В случае жесткого штампа граничные условия имеют вид:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \quad r > a, \qquad \Psi|_{z=0} = \alpha - f(r) \quad (r < a) \tag{1.5}$$

В случае упругого контакта тел, первоначально касающихся в точке, граничные условия приводятся к виду (1.5).

При этом в уравнениях (1.4) постоянная ϑ должна быть заменена на $\vartheta_1 + \vartheta_2$ и в правых частях уравнения (1.4) функции Φ, Ψ заменяются на

$$\Phi_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\Phi, \qquad \Psi_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\Psi$$

ν на ν_1 для первого тела и аналогично для второго тела. Это замечание относится и к формулам (1.1). Ось z в каждом теле имеет направление внутрь тела. Правая часть второго условия (1.5) тогда имеет вид $\alpha_1 - f_1(r) - f_2(r)$, где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ — аппликаты соприкасающихся поверхностей, отсчитываемые от общей касательной плоскости, α — начальное сближение.

2. Условимся в дальнейшем аргумент комплексного числа полагать заключающимся между $-\pi$, $+\pi$ и, следовательно, аргумент квадратного корня из этого числа — между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. В случае обращения мнимой части в нуль знак корня будет определяться предельным переходом. При этом соглашении рассмотрим комплексные гармонические функции

$$\psi = \log\left[z + ia + \sqrt{(z+ia)^2 + r^2}\right], \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{(z+ia)^2 + r^2}} \tag{2.1}$$

Мнимые части этих функций, очевидно, являются гармоническими функциями, исчезающими на бесконечности вместе со своими производными и не имеющими особенностей в полупространстве $z > 0$. При $z = 0$ имеем

$$\operatorname{Im}\psi|_{z=0} = \begin{cases} {}^1\!/_2\,\pi & (r < a) \\ \arcsin(a/r) & (r > a) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \tag{2.3}$$

Эти формулы решают задачу о жестком штампе прямоугольного профиля.

3. Переходя к общему случаю, положим

$$\Psi = \operatorname{Im}\int_0^a h(u)\log\left[z + iu + \sqrt{(z+iu)^2 + r^2}\right] du \tag{3.1}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \operatorname{Im}\int_0^a \frac{h(u)\,du}{\sqrt{(z+iu)^2 + r^2}} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \operatorname{Im}\frac{1}{r}\int_0^a h(u)\left[1 - \frac{z+iu}{\sqrt{(z+iu)^2 + r^2}}\right] du \tag{3.3}$$

Наконец, из (1.2) находим

$$\Phi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\operatorname{Im}\frac{1}{r}\int_0^a h(u)\left[\sqrt{(z+iu)^2 + r^2} - (z+iu)\right] du \tag{3.4}$$

Относительно вспомогательной функции $h(u)$ предполагается, что она интегрируема по Стильтьесу и, в частности, может быть несобственной δ-функцией. Решение для штампа прямоугольного профиля получается при $h(u) = C\delta(a-u)$.

Выражение (3.2) обеспечивает выполнение первого из граничных условий (1.5). Вместе с тем оно дает выражение давления через вспомогательную функцию $h(u)$:

$$p(r) = -\frac{1}{2\pi\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2\pi\vartheta}\int_0^a \frac{h(u)\,du}{\sqrt{u^2-r^2}} \tag{3.5}$$

Второе из условий (1.5) приводит к интегральному уравнению для $h(u)$:

$$\frac{1}{2}\pi\int_0^a h(u)\,du - \int_0^r h(u)\arccos\frac{u}{r}\,du = \alpha - f(r) \tag{3.6}$$

Поскольку $f(r) = 0$ при $r = 0$, то это уравнение распадается на два:

$$\int_0^r h(u)\arccos\frac{u}{r}\,du = f(r), \qquad \frac{1}{2}\pi\int_0^a h(u)\,du = \alpha \tag{3.7}$$

В то же время для нагрузки имеем

$$P = 2\pi\int_0^a p(r)\,r dr = \frac{1}{\vartheta}\int_0^a uh(u)\,du \tag{3.8}$$

4. Первое из уравнений (3.7) определяет $h(u)$ с точностью до слагаемого $C\delta(a-u)$. Этому слагаемому соответствует в давлении иррегулярный член $C / 2\pi\vartheta\sqrt{a^2-r^2}$. Тогда на границе имеется скачок смещения, равный $^1/_2\,\pi C$, т. е. мы имеем случай цилиндрического штампа с основанием $z = f(r)$. В случае регулярных решений величины α и P являются функциями a, как это следует из уравнений (3.7) и (3.8). Дифференцируя первое уравнение (3.6), получаем для $h(u)$ уравнение Абеля

$$\int_0^r \frac{uh(u)\,du}{\sqrt{r^2-u^2}} = rf'(r) \tag{4.1}$$

Отсюда

$$h(r) = \frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{s^2 f'(s)\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{[sf'(s)]'\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}} \tag{4.2}$$

(Второе равенство справедливо только при условии $\lim sf'(s) = 0$ при $s = 0$.) Для α и P получаем

$$\alpha = a\int_0^a \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}}, \qquad P = \frac{2}{\pi\vartheta}\int_0^a \frac{s^2 f'(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} \tag{4.3}$$

Совокупность формул (4.2) и (3.5) определяет давление на площади контакта. В монографии [2] они выведены принципиально иным способом. Но анализ И. Я. Штаермана относится только к давлениям, и поэтому в нем остается невскрытой фундаментальная роль функции $h(u)$ в задаче о напряжениях, как это можно видеть из уравнений (3.1) — (3.4).

В задачах на цилиндрические штампы в правую часть (4.2) следует ввести слагаемое $C\delta(a-u)$, после чего C найдется или по заданному начальному сближению

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi C + a\int_0^a \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} \tag{4.4}$$

или по заданной нагрузке

$$P = \frac{C}{\vartheta}a + \int_0^a uh(u)\,du \tag{4.5}$$

5. Из формул (4.2), (3.1) — (3.4) и (1.4) следует, что если $f(r) = Ar^n$ и n — целое число, то напряжения выражаются элементарными функциями r и z, в случае полуцелого n — через эллиптические интегралы.

Формулы напряжений и смещений значительно упрощаются при $z = 0$ и при $r = 0$. При $z = 0$ имеем $\partial\Psi / \partial z = -2\pi\vartheta p(r)$ для $r < a$ и

$$\Phi\big|_{z=0} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r}\left\{\int_r^a \sqrt{u^2 - r^2}\, h(u)\, du - \int_0^a uh(u)\, du\right\} \tag{5.1}$$

В частности, на границе площадки при $r = a$ будет

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\frac{P}{\pi a^2}, \qquad \sigma_z = 0 \tag{5.2}$$

в регулярных случаях.

На оси $r = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta = -\left(\tfrac{1}{2} + \nu\right)\chi(z) - \tfrac{1}{2} z\chi'(z) \\ \sigma_z &= -\chi(z) + z\chi'(z), \qquad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$\chi(z) = -\frac{1}{2\pi\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\bigg|_{r=0} = \frac{1}{2\pi\vartheta}\int_0^a \frac{uh(u)\, du}{z^2 + u^2} \tag{5.4}$$

В случае $f(r) = Ar^2$ функция $h(u) = 8A / \pi u$ и из последних формул получаются известные результаты А. Н. Динника ([3], стр. 33).

Поступила 3 VII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1953.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. ГИТТЛ, 1949.
3. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. Изд. АН УССР, 1950.
4. Morton W. B., Close L. I. Notes on the Hertz's Theory of the contact of elastic bodies. Phil. Mag., vol. 43, p. 320—329, 1922.