Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИЗГИБА СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФЕРА В ШАРНИРНОЙ ЗАДЕЛКЕ

Л. Н. Гродко

(Москва)

Уравнение колебаний изгиба упругого стержня имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = qe^{i\omega t} \tag{1}$$

где EJ, ρ, q — заданные функции x.

Рассмотрим колебания стержня, свободного на одном конце ($x = l$) и шарнирно опертого на другом ($x = 0$), при наличии линейного демпфера в шарнире, дающего момент, пропорциональный угловой скорости поворота поперечного сечения стержня в точке $x = 0$. Граничные условия для этого случая следующие:

$$\begin{aligned} &y\,|_{x=0} = 0, \qquad && EJ\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = k\,\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=0} \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0, \qquad && \frac{\partial}{\partial x}\left[EJ\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

где k — коэффициент демпфирования. Полагая

$$y\,(x,\,t) = u\,(x)\,e^{i\omega t} \tag{3}$$

получим следующую краевую задачу:

$$(EJu'')'' - \omega^2 \rho u = q \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &u\,(0) = 0, \qquad && EJu''\,(0) = ik\omega u'\,(0) \\ &u''\,(l) = 0, \qquad && (EJu'')'\,|_{x=l} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Решение будем искать в виде

$$u = \varphi\,(x) + \alpha\psi\,(x) \tag{6}$$

где $\psi\,(x)$ — известная функция, а α — некоторая постоянная.

Для определения $\varphi\,(x)$ имеем уравнение

$$(EJ\varphi'')'' - \omega^2\rho\varphi = q + \alpha q^*, \qquad q^* = -\,[(EJ\psi'')'' - \omega^2\rho\psi] \tag{7}$$

Возьмем в качестве $\psi\,(x)$ функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$\psi'\,(0) = 0, \quad \psi\,(0) = 0, \quad \psi''\,(l) = 0, \quad (EJ\psi'')'\,|_{x=l} = 0 \tag{8}$$

Тогда $\varphi\,(x)$ должна на основании (5) удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} \varphi\,(0) = 0, \quad \varphi''\,(l) = 0, \quad (EJ\varphi'')'\,|_{x=l} = 0 \\ EJ\varphi''\,(0) + \alpha EJ\psi''\,(0) = ik\omega\varphi'\,(0) \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $\varphi_k\,(x)$ и $p_{k\varphi}$ представляют собой формы собственных колебаний и собственные частоты стержня при отсутствии демпфера в шарнире (при $k = 0$), т. е.

являются собственными функциями и значениями однородной краевой задачи:

$$(EJ\varphi'')'' - p^2\rho\varphi = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= 0, & \varphi''(l) &= 0 \\ \varphi(0) &= 0, & (EJ\varphi'')'\,|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Возьмем решение уравнения (7) в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q, \varphi_k)}{p_k^2 - \omega^2}\,\varphi_k(x) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^*, \varphi_k)}{p_k^2 - \omega^2}\,\varphi_k(x) \tag{12}$$

где

$$(q, \varphi) = \int_0^l q\varphi\, dx \qquad \int_0^l \rho\varphi_k^2\, dx = 1$$

При произвольном выборе α это решение удовлетворяет первым трем из условий (9), но не удовлетворяет последнему, так как $\varphi''(0) = 0$ в силу (11) и, следовательно, последнее из граничных условий (9) удовлетворится только, если

$$\alpha EJ\psi''(0) = ik\omega\varphi'(0) \tag{13}$$

Ряды (12) можно почленно дифференцировать, поэтому имеем

$$\varphi'(0) = A + \alpha B$$

где

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q, \varphi_k)}{p_k^2 - \omega^2}\,\varphi_k'(0), \qquad B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^*, \varphi_k)}{p_k^2 - \omega^2}\,\varphi_k'(0) \tag{14}$$

Таким образом, при произвольном выборе α значение $\varphi'(0)$ связано с α соотношением (14). Для того чтобы удовлетворить условию (13), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\alpha EJ\psi''(0) = ik\omega(A + \alpha B)$$

Отсюда получается следующее выражение для α:

$$\alpha = \frac{ik\omega A}{EJ\psi''(0) - ik\omega B} \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что при $k \neq 0$ для α получается вполне определенное значение, так как величины A и B представляют собой вполне определенные конечные числа, как это видно из (14). Величина A представляет собой угол поворота в точке $x = 0$ при колебаниях стержня без демпфера при нагрузке $q(x)$, а величина B — то же самое при нагрузке $q^*(x)$.

Итак, выражение (12) при значении α из (15) даст решение задачи при произвольной функции $\psi(x)$, удовлетворяющей условиям (8). При различном выборе функции $\psi(x)$ будут получаться различные функции $\varphi(x)$ и различные значения α, но функция

$$u(x) = \varphi(x) + \alpha\psi(x)$$

будет оставаться неизменной. В частности, будет оставаться неизменным значение

$$u'(0) = \varphi'(0) + \alpha\psi'(0) = \varphi'(0)$$

Подставляя α из (15), получим для $\varphi'(0)$ выражение

$$\varphi'(0) = A(\omega)\left[1 - \frac{ik\omega}{EJ\psi''(0)}\,B(\omega)\right]^{-1} \tag{16}$$

Таким образом, величина $B(\omega)/\psi''(0)$ инвариантна по отношению к виду функции $\psi(x)$, так как $A(\omega)$ не зависит от вида $\psi(x)$.

Из этого можно сделать несколько интересных выводов.

Возьмем в качестве $\psi(x)$ одну из форм собственных колебаний $\psi_n(x)$ жестко заделанного при $x=0$ стержня. Пусть $p_{n\psi}$ — соответствующая собственная частота. В этом случае дифференциальное выражение для $q^*(x)$ (17) может быть преобразовано следующим образом:

$$-q^*(x) = (EJ\psi_n'')'' - \omega^2\rho\psi_n = [(EJ\psi_n')'' - p_{n\psi}^2\rho\psi_n] + (p_{n\psi}^2 - \omega^2)\rho\psi_n = \\ = (p_{n\psi}^2 - \omega^2)\rho\psi_n$$

Для этого случая получается следующее выражение для $B(\omega)$:

$$\frac{B(\omega)}{\psi_n''(0)} = \frac{\omega^2 - p_{n\psi}^2}{\psi_n''(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho\psi_n, \varphi_k)}{p_{k\varphi}^2 - \omega^2}\varphi_k'(0) \tag{17}$$

Причем это выражение на основании всего изложенного выше не должно зависеть от выбора n. Поэтому для произвольных m и n должно соблюдаться равенство

$$\frac{\omega^2 - p_{n\psi}^2}{\psi_n''(0)} \sum_{=1}^{\infty} \frac{(\rho\varphi_n, \varphi_k)}{p_{k\varphi}^2 - \omega^2}\varphi_k'(0) = \frac{\omega^2 - p_{m\psi}^2}{\psi_m''(0)} \sum \frac{(\rho\psi_m, \varphi_k)}{p_{k\varphi}^2 - \omega^2}\varphi_k'(0) \tag{18}$$

Будем называть однородную краевую задачу, соответствующую собственным колебаниям стержня, шарнирно заделанного при $x=0$, краевой задачей φ, а задачу, соответствующую собственным колебаниям стержня, жестко заделанного при $x=0$,— краевой задачей ψ. Заметим, что краевая задача φ получается из (4) как предельный случай при $k \to 0$, а задача ψ при $k \to \infty$.

Из выражения (18) видно, что при $\omega = p_{n\psi}$ величина

$$\beta_m(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho\psi_m, \varphi_k)}{p_{k\varphi}^2 - \omega^2}\varphi_k'(0) \tag{19}$$

должна обратиться в нуль для любого значения $m \neq n$. Таким образом, если известны собственные функции и значения краевой задачи φ и какая-нибудь одна из функций $\psi_n(x)$ краевой задачи ψ, то все собственные значения $p_{n\psi}$ краевой задачи ψ, за исключением $n=m$, могут быть определены как нули функции $\beta_m(\omega)$.

Совершенно аналогично можно показать, что собственные значения $p_{k\varphi}$ краевой задачи φ даются нулями функции

$$\gamma_m(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p\varphi_m, \varphi_k)}{p_{k\psi}^2 - \omega^2}\psi_k''(0) \tag{20}$$

где φ_m — одна из функций краевой задачи φ. Кроме того, из выражений (17) и (18) нетрудно видеть, что функция $B(\omega)/\psi_n''(0)$ обращается в бесконечность всякий раз, когда $\omega = p_{k\varphi}$, и в нуль, когда $\omega = p_{k\psi}$.

С другой стороны, функция $B(\omega)/\psi_n''(0)$ является мероморфной функцией ω и, следовательно, с точностью до постоянного множителя определяется своими нулями и полюсами.

Таким образом, функция $\psi_n''(0)/B(\omega)$ представляет собой с точностью до постоянного множителя динамическую жесткость [1] шарнирно закрепленного при $x=0$ стержня по отношению к гармоническому моменту, приложенному в шарнире.

Следовательно, формулы (19) и (20) позволяют вычислять динамическую жесткость шарнирно закрепленного стержня по известному решению только одной из краевых задач φ или ψ и какой-либо собственной функции другой.

Формула для угла поворота в шарнире может быть теперь записана в виде

$$\varphi'(0) = \varphi_0(m)\left[1 - ik\omega\frac{c}{D(\omega)}\right]^{-1}$$

где $\varphi_0(\omega) = A$ — угол поворота при отсутствии демпфера, $D(\omega)$ — динамическая жесткость, c — некоторая постоянная.

Значение c может быть получено следующим образом. При предельном переходе при $\omega \to 0$ формула для упругого стержня должна совпасть с формулой для жесткого стержня. При этом получается $c = -1$.

Окончательно формула для угла поворота в шарнире примет вид:

$$\varphi'(0) = \varphi_0(\omega)\left[1 + \frac{ik\omega}{D(\omega)}\right]^{-1} \tag{21}$$

Нетрудно показать, что эта формула остается верной и в том случае, когда возмущающаяся нагрузка представляет собой сосредоточенный момент, приложенный при $x = 0$. Это позволяет получить чрезвычайно простую формулу для комплексной динамической жесткости стержня, снабженного демпфером:

$$D^*(\omega) = D(\omega)\left[1 + \frac{ik\omega}{D(\omega)}\right] = D(\omega) + ik\omega \tag{22}$$

где $D(\omega)$ — динамическая жесткость стержня при отсутствии демпфера.

Граничные условия (5) можно рассматривать как обобщение граничных условий краевых задач φ и ψ, из которых первые получаются при $k \to 0$, а вторые при $k \to \infty$. Таким, образом, пример решения задачи о вынужденных колебаниях изгиба стержня с демпфером показывает, что путем обобщения краевых условий и решения соответствующей неоднородной задачи могут быть получены некоторые соотношения, связывающие собственные значения и функции однородных краевых задач с различными краевыми условиями.

Поступила 18 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф. Н. Метод динамической жесткости в применении к определению частот колебаний системы с сопротивлением. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1948.
2. Biot M. A. JAS, vol. 7, Nr. 9, 1940.