

К ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНЫХ ЯВЛЕНИЙ В БИНАРНОЙ СМЕСИ

И. Г. Шапошников

(Мологов)

Выведены и обсуждены основные уравнения слабых гравитационно-температурных и гравитационно-концентрационных конвективных явлений в бинарной смеси¹.

Механическое равновесие смеси, температура и концентрация которой различны в разных точках, возможно не при всяких пространственных распределениях этих величин. Если их распределение таково, что механическое равновесие невозможно, то будет иметь место движение среды, сопровождающееся, вообще говоря, переносом тепла и массы компонент смеси, т. е. будут происходить гравитационно-температурные и гравитационно-концентрационные конвективные явления. Здесь выводятся уравнения для изучения этих явлений в бинарной смеси в том случае, когда состояния среды, в которой происходит конвекция, не слишком сильно отличаются от равновесных состояний. Используются уравнения гидродинамики для бинарной смеси, в которых производятся пренебрежения, допустимые схематизацией, аналогичной принятой в теории слабой гравитационно-температурной конвекции в чистой среде.

1. Уравнения гидродинамики для бинарной смеси с нереагирующими компонентами в поле тяжести можно записать в таком виде [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \left[-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \right] + \mathbf{g} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = \frac{1}{\rho T} (E - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mu \operatorname{div} \mathbf{j}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j} \quad (1.4)$$

Здесь ρ , p , T — плотность, давление и температура смеси, \mathbf{g} — ускорение тяжести c — концентрация одной из компонент смеси (будем называть эту компоненту первой), определенная как отношение массы этой компоненты к массе смеси для физически бесконечно малого элемента смеси, \mathbf{v} — гидродинамическая скорость смеси, определенная как скорость центра инерции физически бесконечно малого элемента среды η и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости смеси, s — энтропия единицы массы смеси, E — диссипативная функция; величина μ связана с химическими потенциалами μ_1 и μ_2 первой и второй компонент смеси соотношением

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2} \quad (1.5)$$

где m_1 и m_2 — массы молекулы первой и второй компонент; \mathbf{q} и \mathbf{j} — поток тепла и диффузионный поток массы первой компоненты, причем

$$\mathbf{j} = -a \nabla \mu - b \nabla T, \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T + \left(\mu + \frac{b}{a} T \right) \mathbf{j} \quad (1.6)$$

¹ Эта работа была доложена на заседании Всесоюзного совещания по гидроаэродинамике в Институте механики АН СССР 10 декабря 1952 г.

где κ — коэффициент теплопроводности смеси, a и b — характеризующие диффузию кинетические коэффициенты. Для того чтобы этими уравнениями можно было пользоваться, нужно еще, конечно, располагать видом какой-либо термодинамической характеристической функции для получения уравнения состояния $f(\rho, T, p, c) = 0$ и установления вида зависимости s и μ от тех или иных величин, принятых за равновесные термодинамические координаты.

Вместо кинетических коэффициентов a и b введем, как это обычно делается, коэффициент диффузии D и коэффициент термодиффузии λ (ср. [1]). Рассматривая μ как функцию от T , p и c , выражая $\nabla \mu$ в равенствах (1.6) через ∇c , ∇T и ∇p и пользуясь термодинамическими соотношениями, получаем

$$\mathbf{j} = -\rho D \left(\nabla c + \lambda \nabla T + \frac{\alpha}{\rho \mu_c}, \quad \nabla p \right) \mathbf{q} = -\kappa \nabla T + [\mu + T(\lambda \mu_c - \mu_T)] \mathbf{j} \quad (1.7)$$

где

$$\mu_T \equiv \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, c}, \quad \mu_c \equiv \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{T, p} \quad (1.8)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{T, p}, \quad D \equiv \frac{a \mu_c}{\rho}, \quad \lambda \equiv \frac{1}{\rho D} (a \mu_T + b) \quad (1.9)$$

2. Примем схематизацию (ср. [1]), согласно которой величиной E в правой части (1.2) можно пренебречь и при выборе в качестве равновесных термодинамических координат T , p и c все другие термодинамические величины будут зависеть только от T и c , причем зависимость эта будет настолько слабой, а отклонения θ и ξ величин T и c от их средних по пространству и по времени наблюдения значений T_0 и c_0 настолько малыми, что можно считать

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha_0 \xi - \beta_0 \theta) \quad (2.1)$$

где

$$\rho_0 \equiv \rho(T_0, c_0), \quad \alpha_0 \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{T, p} \right]_0, \quad \beta_0 \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, c} \right]_0$$

Заметим, что под T_0 и c_0 можно при этом понимать и любые постоянные, не слишком сильно отличающиеся от указанных средних.

При такой схематизации из (1.1) — (1.4) без труда получаются уравнения слабой свободной конвекции, которым можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha \xi + \beta \theta) \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= (\chi + N \lambda^2 D) \nabla^2 \theta + N \lambda D \nabla^2 \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi &= \lambda D \nabla^2 \theta + D \nabla^2 \xi, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь через π обозначено отношение разности давления к тому его значению, которое имело бы место в механическом равновесии при $T = T_0$ и $c = c_0$, к ρ_0 ; через ν и χ — кинематический коэффициент вязкости и коэффициент температуропроводности смеси при T_0 и c_0 ; через $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, указывающий направление вертикально вверх

$$N \equiv \left(\frac{T \mu_c}{c_p} \right)_0 \quad (2.3)$$

где μ_c — согласно (1.9), c_p — теплоемкость смеси при постоянных давлении и концентрации и индекс 0 у скобок указывает попережнему на то, что все стоящие в скобках величины нужно взять при $T = T_0$ и $c = c_0$; этот индекс у α_0 и β_0 опущен.

Уравнения конвекции (2.2) значительно упрощаются, если концентрация c мала. Тогда можно приближенно считать [2, 1]

$$\mu_c = \frac{kT}{m} \frac{1}{c}, \quad \lambda = \lambda' c \quad (2.4)$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы первой компоненты смеси и λ' — величина, не зависящая от концентрации, и при помощи (2.3) и (2.4) получаем из (2.2) приближенно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha \xi + \beta \theta) \gamma \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \chi \nabla^2 \theta + \frac{kT^2}{mc_p} \lambda' D \nabla^2 \xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi &= D \nabla^2 \xi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где α и D — соответствующие величины, взятые при $c = 0$.

3. Для перехода к случаю чистой среды нужно в уравнениях (2.5) положить $\xi = 0$ или в уравнениях (2.2) положить $\xi = 0$, $\lambda = 0$; тогда получаются обычные уравнения гравитационно-температурной (тепловой) конвекции [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g\beta \theta \gamma \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \chi \nabla^2 \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представляет интерес обсудить также вопрос о предельных случаях изотермической концентрационной конвекции (когда конвективные явления обусловлены только пространственной неоднородностью концентрации смеси) и изоконцентрационной температурной конвекции (когда причиной конвективных явлений оказывается только неравномерная нагретость смеси). Прежде всего нужно заметить, что, вообще говоря, такие предельные случаи неосуществимы. Действительно, в каждом из них из уравнений (2.2) выпадала бы одна из искомым функций θ или ξ , между тем как число уравнений (остающихся, конечно, независимыми) было бы прежним. Физически невозможность указанных предельных случаев связана с наличием в смеси термодиффузии и обратного ей эффекта (по поводу этих явлений см., например, [3]). Если, однако, концентрация настолько мала, что можно пользоваться уравнениями (2.5), и если α , β , θ , ξ таковы, что в первом уравнении (2.5) можно пренебречь членом $c \theta$, то величины \mathbf{v} и ξ можно искать из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g\alpha \xi \gamma \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi &= D \nabla^2 \xi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

совершенно аналогичных уравнениям гравитационно-температурной конвекции для \mathbf{v} и θ [см. уравнения (2.6)]; тогда может быть приемлемой схематизация изотермической концентрационной конвекции.

Поступила 30 VI 1953

Молотовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. ГТТИ, 1944.
2. Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. ГИТТЛ, 1951.
3. S. R. de Groot. Thermodynamics of irreversible processes. Amsterdam, 1951.