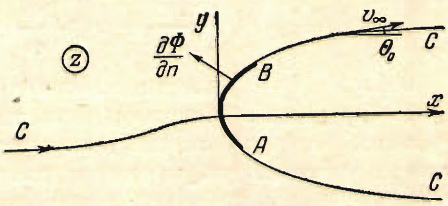
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ КОНТУРА, СОВЕРШАЮЩЕГО МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

М. И. Гуревич (Москва), М. Д. Хаскинд (Николаев)

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу о малых колебаниях произвольного контура, обтекаемого с отрывом струй потоком невесомой идеальной несжимаемой жидкости. Скорость потока в бесконечности направлена вдоль оси $x$ неподвижной декартовой системы координат и равна $v_\infty$ (фиг. 1).

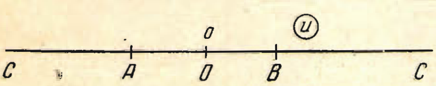
Пусть некоторый неподвижный контур совпадает с вибрирующим в какой-нибудь момент времени. Предположим, что комплексный потенциал $w_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ установившегося обтекания этого контура известен. Точнее, будем считать, что известно конформное отображение области изменения $w_0$ и области течения $z$ на верхнюю полуплоскость переменного $u$ (фиг. 2). Считая, что точке $z = \infty$ соответствует точка $u = \infty$, можно для любого контура осуществить отображение области комплексного потенциала при помощи формулы $w_0(u) = Qu^2$, где $Q$ — постоянная. Отображение $z(u)$ зависит от формы контура.




Фиг. 1

Комплексный потенциал обтекания колеблющегося контура можно рассматривать состоящим из двух частей: из комплексного потенциала обтекания неподвижного контура $w_0$ и из комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ возмущенного течения. Задача сводится к определению $W$ в функции $u$ и времени $t$.

Для отыскания $W(u, t)$ следует составить граничные условия на контуре и на свободной поверхности. Будем считать, что на свободной поверхности давление постоянно и равно давлению в набегающем потоке $p_\infty$, а на контуре известна нормальная скорость возмущенного движения (фиг. 1)




Фиг. 2

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = V(u, t)$$

В невозмущенном течении нормальная скорость на контуре $AB$ равна нулю, а в возмущенном течении потенциал $W(u, t)$ удовлетворяет на контуре условию [1]

$$\operatorname{Im}\frac{dW}{du} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}\left|\frac{dz}{\partial u}\right| = -V(u, t)\left|\frac{dz}{du}\right| \tag{1.1}$$

Действительно, при конформном отображении направление нормальное к границе переходит также в нормальное. Поэтому чтобы из нормальной производной $\partial\Phi / \partial n$ в плоскости $z$ получить нормальную производную потенциала $-\operatorname{Im} dW / du$ в плоскости $u$, следует только умножить $\partial\Phi / \partial n$ на отношение масштабов $|dz / du|$, откуда и получается формула (1.1).

Рассмотрим теперь граничное условие на свободной поверхности. При этом будет предполагаться, что возмущения затухают в бесконечности в набегающем потоке, но не в бесконечности на свободной поверхности. Так как было предположено, что давление на свободной поверхности равно $p_\infty$, то интеграл Эйлера дает

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 + p_\infty = p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2$$

где $\rho$ — плотность жидкости. В случае малых колебаний можно пренебречь квадратами составляющих возмущенной скорости. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 - v_\infty^2\right] = 0$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v \cos\theta \approx v_\infty \cos\theta_0, \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = v \sin\theta \approx v_\infty \sin\theta_0, \qquad \partial\varphi_0 \approx v_\infty\, ds$$

где $v$ и $\theta$ — скорость и угол наклона к оси $x$ в невозмущенном движении, а $\theta_0$ — угол наклона той же скорости на возмущенной свободной поверхности и, наконец, $ds$ — дифференциал дуги, то приближенное граничное условие на свободной поверхности представится в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_\infty^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{2}\left[v^2 - v_\infty^2\right] = 0 \tag{1.2}$$

В формулу (1.2) входят значения $\Phi$ и $v$ в точках возмущенной свободной поверхности, которая может выходить за пределы области невозмущенного течения. Очевидно, что при этом следует считать, что функция $w_0(z)$ аналитически продолжена на бесконечно узкую полоску, тянущуюся вдоль свободной поверхности невозмущенного течения. Однако в пределах принятой точности можно вычислять два первых члена формулы (1.2) в точках невозмущенной свободной поверхности. Поступать таким же образом в отношении третьего члена, строго говоря, нельзя, так как, полагая $v = v_\infty$, мы обращаем его в нуль, тогда как он является малой величиной того же порядка, что и первые два слагаемых.

С другой стороны, учет члена $^1/_2(v^2 - v_\infty^2)$ в (1.2) приводит к чрезвычайным математическим трудностям.

Линеаризация этого члена не всегда возможна. Действительно, если положить

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_\infty^2) \approx -v_\infty^2 \frac{\partial v}{\partial n}\eta = v_\infty^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial s}\eta$$

где $\eta$ — расстояние по нормали от невозмущенной до возмущенной свободной поверхности, а $\partial n$ — дифференциал по внутренней нормали, то вдали от контура этот член будет несущественным, так как кривизна невозмущенной свободной поверхности $\partial\theta_0 / \partial s$ при удалении в бесконечность стремится к нулю, а в окрестности кромок контура $\partial\theta_0 / \partial s$ может превращаться в бесконечность [1] и тогда линеаризация будет незаконной. Рассматривая настоящую работу как первую попытку исследовать поставленную задачу, можно попробовать пренебречь членом $^1/_2(v^2 - v_\infty^2)$; заметим, что аналогичное пренебрежение кривизной поверхности с большим успехом уже применялось в теории нестационарного глиссирования по поверхности невесомой жидкости [2]. Итак, оставляя в силе сделанные оговорки, приближенно условие (1.2) на невозмущенной свободной поверхности заменяем на условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_\infty^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} = 0 \tag{1.3}$$

---

[1] Например, при обтекании плоской пластинки $\partial\theta_0 / \partial s$ у кромок всегда бесконечна [3]. При обтекании дуги окружности $\partial\theta_0 / \partial s$ в точках отрыва потока, конечно, только тогда, когда центральный угол дуги примерно равен 110° (см. [4]).

**§ 2. Установившиеся колебания контура.** Пусть контур совершает установившиеся гармонические колебания. Тогда можно положить

$$-V(u,\ t)\left|\frac{dz}{du}\right| = v_c \cos kt + v_s \sin kt$$

и искать $W$ в виде

$$W = w_c \cos kt + w_s \sin kt$$

где $k$ — частота колебаний, а функции $v_c$, $v_s$, $w_c$, $w_s$ не зависят от времени. Формулы могут быть упрощены, если ввести новую мнимую единицу $j = \sqrt{-1}$, не связанную с $i = \sqrt{-1}$.

Можно условиться во всех формулах, в которые входит $j$, брать только действительные части относительно $j$ (но не относительно $i$).

Тогда предыдущие выражения запишутся в виде

$$-V\left|\frac{dz}{du}\right| = ve^{jkt}, \qquad W = we^{jkt} \qquad (v = v_c - jv_s,\ w = w_c - jw_s)$$

Вводя эти выражения в граничные условия (1.1) и (1.3), можно избавиться в них от времени и записать их в виде

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{du} = v(u), \qquad jk\varphi + v_\infty^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0} = 0 \qquad (w = \varphi + i\psi) \tag{2.1}$$

Здесь знак Im обозначает мнимую часть по $i$. Второе из граничных условий (2.1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для $\varphi$.

Легко видеть, что на свободной поверхности

$$\varphi = a \exp\left(-\frac{jk\varphi_0}{v_\infty^2}\right) \tag{2.2}$$

Произвольная постоянная $a$ имеет различные значения на поверхности струй $AC$ и $BC$. Для сокращения, но не для упрощения выкладок будем считать, что течение симметрично относительно оси $x$.

В этом случае $a$ будет иметь одинаковое значение на свободных поверхностях справа и слева от пластинки.

Кроме того, можно считать, что точкам $A$ и $B$ на действительной оси $u$ соответствуют точки $u = \pm 1$.

В дальнейшем основное внимание будет уделено подбору величины $a$ таким образом, чтобы скорости у кромок контура были конечны. Второе граничное условие 2.1) можно заменить граничным условием (2.2), а последнее представить в виде

$$\operatorname{Re} w = ae^{-j\nu u^2} \qquad \left(u^2 > 1,\ \nu = \frac{kQ}{v_\infty^2}\right) \tag{2.3}$$

Знак Re обозначает действительную часть относительно $i$.

**§ 3. Решение граничной задачи.** Для нахождения в верхней полуплоскости параметрического переменного $u$ комплексного потенциала $w$, удовлетворяющего граничным условиям (2.1) и (2.3), представим $w$ в виде суммы двух слагаемых $w_1$ и $w_2$, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

на контуре ($u^2 \leqslant 1$)

$$\operatorname{Im} w_1 = 0, \qquad \operatorname{Im}\frac{dw_2}{du} = v(u) \tag{3.1}$$

на свободной поверхности ($u^2 > 1$)

$$\operatorname{Re} w_1 = ae^{-j\nu u^2}, \qquad \operatorname{Re}\frac{dw_2}{du} = 0 \tag{3.2}$$

Пользуясь приемами теории тонкого крыла [2], легко получить

$$\frac{w_1}{\sqrt{u^2-1}} = -\frac{a}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-j\nu\xi^2}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi-u)} + \frac{a}{\pi i}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\xi^2}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi-u)} =$$

$$= \frac{a}{\pi i}\int \frac{e^{-j\nu\xi^2}}{\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{1}{\xi+u}+\frac{1}{\xi-u}\right)d\xi = \frac{2a}{\pi i}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\xi^2}\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi^2-u^2)}$$

или, полагая $\xi^2=\eta$:

$$\frac{w_1}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{a}{\pi i}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}}{\sqrt{\eta-1}}\,\frac{d\eta}{\eta-u^2} = \frac{a}{\pi i}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}-e^{-j\nu}}{\sqrt{\eta-1}\,(\eta-u^2)}\,d\eta + \frac{ae^{-j\nu}}{i\sqrt{1-u^2}} \tag{3.3}$$

Аналогичным образом имеем

$$\frac{dw_2}{du} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}}\int\limits_{-1}^{1} \frac{v(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-u}\,d\xi \tag{3.4}$$

Для плоской пластины длины $l$, совершающей поступательные колебания, формула (3.4) дает [1]

$$\frac{dw_2}{du} = \frac{2lv_0}{i\pi(\pi+4)}\left[\sqrt{u^2-1}\ln\frac{u+1}{u-1} - \frac{(2+\pi)\,u}{\sqrt{u^2-1}} + \pi\right] \tag{3.5}$$

где $v_0=\mathrm{const}$, а $v(u)=-v_0\,|\,dz\,/\,du\,|$. Отображение области течения на верхнюю полуплоскость дается формулой

$$z(u) = \frac{il}{\pi+4}\left(u\sqrt{1-u^2}+\arcsin u+2u\right) \tag{3.6}$$

Функции $dw_1\,/\,du$ и $dw_2\,/\,du$, а вместе с ними и $dw_1\,/\,dz$ и $dw_2\,/\,dz$ обращаются у кромок контура в бесконечность. Постоянную $a$ следует подобрать так, чтобы скорость $dw\,/\,dz$ у кромок контура была конечной величиной.

Из (3.3) следует, что в окрестности точек $u=\pm1$

$$\frac{dw_1}{du} \approx \frac{au}{\pi i\sqrt{u^2-1}}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}-e^{-j\nu}}{(\eta-1)^{3/2}}\,d\eta \tag{3.7}$$

Условия конечности скорости у кромок контура согласно (3.4) и (3.7) имеют вид:

$$\left[-au\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}-e^{-j\nu}}{(\eta-1)^{3/2}}\,d\eta + \int\limits_{-1}^{1} \frac{v(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-u}\,d\xi\right]_{u=\pm1} = 0 \tag{3.8}$$

Так как $v(\xi)=v(-\xi)$, то

$$\left[\int\limits_{-1}^{1} \frac{v(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-u}\,d\xi\right]_{u=1} = -\left[\int\limits_{-1}^{1} \frac{v(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-u}\,d\xi\right]_{u=-1}$$

и два условия (3.8) сводятся к одному:

$$a\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}-e^{-j\nu}}{(\eta-1)^{3/2}}\,d\eta + \int\limits_{-1}^{1} v(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi = 0 \tag{3.9}$$

Или в частном случае поступательных колебаний плоской пластинки

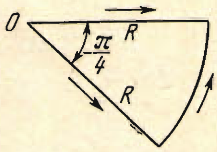
$$a\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-j\nu\eta}-e^{-j\nu}}{(\eta-1)^{3/2}}\,d\eta = \frac{2lv_0\,(2+\pi)}{\pi+4} \tag{3.10}$$

Интеграл

$$I = \int_1^\infty (e^{-j\nu\eta} - e^{-j\nu})(\eta - 1)^{-{}^3/_2} d\eta$$

входящий в формулы (3.9) и (3.10), может быть вычислен. Действительно, производя в $I$ интеграцию по частям, находим

$$I = -2j\nu \int_1^\infty \frac{e^{-j\nu\eta}}{\sqrt{\eta - 1}} d\eta \tag{3.11}$$




Фиг. 3

После замены переменного $\eta - 1 = t^2$ формула (3.11) сводится к виду

$$I = -2j\nu\, 2e^{-j\nu} \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-j\nu t^2} dt \tag{3.12}$$

Преобразуем контур интегрирования в четверть дуги окружности радиуса $R$ и луч, направленный под углом $-{}^1/_4\pi$ к действительной оси $t$ (фиг. 3).

Так как при $0 > \alpha > -{}^1/_4\pi$

$$\lim_{R \to \infty} \operatorname{Re} [-j\nu R^2 (\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha)] \to -\infty$$

то интеграл по дуге пропадает, откуда

$$I = -2j\nu\, 2e^{-j\nu} \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-\nu\tau^2} d\tau$$

где $\tau = te^{{}^1/_4 j\pi}$ — действительная величина. Таким образом,

$$I = -2j \sqrt{\nu} e^{-j\nu} \sqrt{\pi} \tag{3.13}$$

Отсюда

$$a = -\frac{je^{j\nu}}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_{-1}^{1} v(\xi) \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 - \xi}} d\xi \tag{3.14}$$

и в частном случае плоской пластинки

$$a = \frac{je^{j\nu}\, lv_0 (2 + \pi)}{\sqrt{\pi\nu} (\pi + 4)} \tag{3.15}$$

Коснемся в заключение общей физической картины полученного течения. Потенциал $w_2$ аналогичен потенциалу при ударе и дает колебания, не вызывающие волнообразования; вид течения, определяемого $w_2$, существенно зависит от формы контура. Потенциал $w_1$ погашает бесконечные скорости у кромок, вызванные «ударным» течением с потенциалом $w_2$, и дает волны, разбегающиеся от контура по поверхности невесомой жидкости. Характер этих волн не зависит от формы контура, точнее, от формы контура зависит только фаза и амплитуда этих волн.

Поступила 26 III 1953

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гуревич М. И. Удар пластинки при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
2. Седов Л. И. Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями. Труды ЦАГИ, вып. 252, 1936.
3. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Собр. соч., т. II, 1949.
4. Brodetsky. Diskontinuous Fluid Motion Past Circular and Elliptic Cylinders. Proc. of the Roy. Soc. of London, s. A, vol. 102, N A718, 1923.