Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХРЯДНЫХ РЕШЕТОК ПО МЕТОДУ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

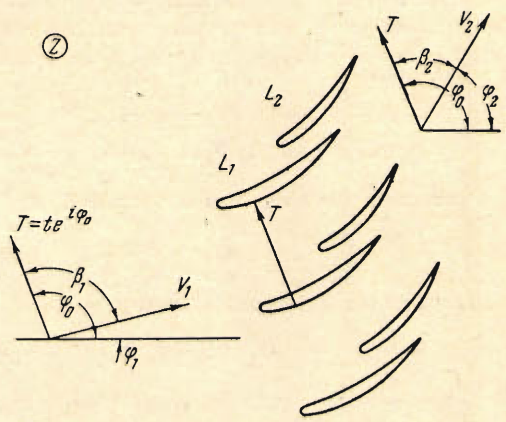
Г. Ю. Степанов

(Москва)

Двухрядная решетка, или решетка бипланов (фиг. 1), образуется путем бесконечного числа поступательных смещений двух профилей L_1 и L_2 на период $T = te^{i\varphi_0}$ и $-T$. Иначе двухрядную решетку можно рассматривать как две неподвижные относительно одна к другой однорядные решетки профилей L_1 и L_2 с равными периодами T.

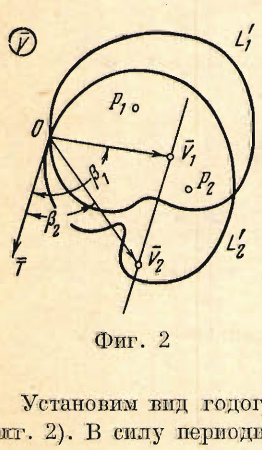
Общее решение задачи построения установившегося потенциального потока несжимаемой жидкости во внешности двух профилей (биплана) имеется в книге Л. И. Седова ([1], гл. VI). Та же задача для двухрядной решетки сводится непосредственно к задаче о биплане путем конформного отображения внешности двухрядной решетки на некоторую двухсвязную область при помощи функции, имеющей тот же период T, например:

$$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i z}{T}\right)$$



Фиг. 1

Ниже рассматривается другой подход к решению задачи построения двухрядных решеток с использованием известного метода годографа скорости, примененного ранее Л. А. Симоновым для построения одиночных профилей и профилей однорядных решеток[2].



Фиг. 2

В соответствии с методом годографа скорости комплексный потенциал $W = \Phi + i\Psi$ искомого течения в плоскости z находится как аналитическая функция комплексной скорости $\overline{V} = Ve^{-i\varphi} = dW / dz$ в заданной области годографа скорости, после чего течение строится путем интегрирования:

$$z = \int \frac{dW}{\overline{V}} + \text{const} \qquad (1)$$

Вдоль любой линии тока $\Psi = \text{const}$ и, в частности, на границах профилей

$$z = \int \frac{d\Phi}{\overline{V}} + \text{const}$$

Установим вид годографа скорости $W(\overline{V})$ течения через двухрядную решетку (фиг. 2). В силу периодичности функции $\overline{V}(z)$ при однозначности функции $W(z)$

область годографа скорости бесконечнолистна. Однако можно рассматривать комплексный потенциал $W(z)$ в полосе одного периода, исключив точки $z=\infty_1$ до решетки и $z=\infty_2$ за ней, причем устраняются точки разветвления поверхности $W(\overline{V})$ логарифмического типа в точках $\overline{V}=\overline{V}_1$ и $\overline{V}=\overline{V}_2$ и соответственно бесконечнолистность годографа скорости. Если на границах профилей скорость $\overline{V}$ конечна и изменяется непрерывно, профилям L_1 и L_2 в плоскости годографа скорости отвечают два замкнутых контура L_1' и L_2'. Модуль и аргумент комплексной скорости $\overline{V}$, как ограниченной во всей области течения, принимают максимальные и минимальные значения на границах области, поэтому внешности профилей отвечает внутренность контуров L_1' и L_2'; в частности, каждая из точек $\overline{V}=\overline{V}_1$ и $\overline{V}=\overline{V}_2$ расположена внутри хотя бы одного из контуров, а точка $\overline{V}=0$ не может быть в области годографа. Контуры L_1' и L_2' должны заключать в себе одну (двухсвязную) область, поэтому они оказываются наложенными один на другой, находясь на двух различных листах плоскости годографа скорости. Соединение этих листов осуществляется по крайней мере через один разрез между двумя точками разветвления поверхности (P_1 и P_2) первого порядка[1].

Функцию $W(\overline{V})$ можно считать комплексным потенциалом фиктивного течения от вихреисточника и вихрестока, помещенных в концах векторов $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$ в области годографа скорости. Интенсивности вихреисточника и вихрестока равны приращению комплексного потенциала при обходе их в положительном направлении:

$$\begin{aligned} \Gamma_1+iQ_1 &= T\overline{V}_1 = te^{i\varphi_0}V_1e^{-i\varphi_1} = tV_1\cos\beta_1+itV_1\sin\beta_1 \\ \Gamma_2+iQ_2 &= -T\overline{V}_2 = -te^{i\varphi_0}V_2e^{-i\varphi_2} = -tV_2\cos\beta_2-itV_2\sin\beta_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая, что везде вне профилей L_1 и L_2

$$\oint \overline{V}\,dz \equiv 0$$

и вычисляя этот интеграл, найдем

$$Q_1+Q_2=0 \qquad \gamma_1+\gamma_2+\Gamma_1+\Gamma_2=0 \tag{3}$$

где γ_1 и γ_2 — циркуляции скорости вокруг профилей L_1 и L_2. Из первого уравнения (3) следует, что прямая, проходящая через точки $\overline{V}=\overline{V}_1$ и $\overline{V}=\overline{V}_2$, параллельна вектору сопряженного периода $\overline{T}=te^{-i\varphi_0}$ (фиг. 2).

Нетрудно проверить, что выполнение условий (2) обеспечивает замкнутость любого контура, охватывающего оба профиля:

$$\oint\limits_{L_1L_2} dz = \oint\limits_{L_1} dz + \oint\limits_{L_1} dz = \oint\limits_{L_1'L_2'} \frac{dW}{\overline{V}} = \oint\limits_{L_1'L_2'} \frac{1}{\overline{V}}\frac{dW}{d\overline{V}}\,d\overline{V}$$

Последний интеграл вычисляется как сумма $2\pi i$ вычетов подинтегральной функции в особых точках этой функции $\overline{V}=\overline{V}_1$ и $\overline{V}=\overline{V}_2$, в которых она имеет простые полюсы:

$$\oint \frac{1}{\overline{V}}\frac{dW}{d\overline{V}}\,d\overline{V} = 2\pi i\left(\frac{1}{\overline{V}_1}\frac{\Gamma_1+iQ_1}{2\pi i}+\frac{1}{\overline{V}_2}\frac{\Gamma_2+iQ_2}{2\pi i}\right)=T-T=0$$

Особенности в точках границы $\overline{V}=0$ при обходе области исключаются. В то же время каждый из профилей может быть незамкнутым и соответственно полоса каждого периода решетки — бесконечнолистной. Для замкнутости одного из профи-

---

[1] Точка разветвления $z=z_p$ функции $f(z)$ имеет порядок $k-1$, если в окрестности этой точки справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_p)^{n/k}$$

лей L_1 или L_2 при выполнении условий (2) и (3) должен быть замкнут другой профиль. В каждом конкретном случае построения двухрядной решетки по заданному годографу скорости замкнутость одновременно обоих профилей L_1 и L_2 может быть обеспечена путем подходящего задания контуров годографа L_1' и L_2', положения точек разветвления P_1 и P_2 и величины циркуляции γ_1 (или γ_2).

Приведем некоторые качественные соображения, имеющие значение при задании годографа скорости двухрядной решетки. При удалении рядов решетки друг от друга точки разветвления P_1 и P_2 сближаются, и в пределе, при бесконечно большом удалении рядов, они сливаются в одну точку, расположенную на прямой, соединяющей концы векторов $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$, а годограф превращается в два годографа однорядных решеток, имеющих общую точку $\overline{V}=0$. В другом предельном случае, когда решетки одинаковых и одинаково расположенных профилей L_1 и L_2 превращаются в одну решетку (с периодом $^1/_2\, T$), точки P_1 и P_2 переходят в концы векторов $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$, а контуры годографов L_1' и L_2' совпадают. При расположении профилей L_1 между профилями L_2 направление прямой P_1P_2 близко к направлению сопряженного периода $\overline{T}$, и к перпендикулярному направлению, если профили L_1 и L_2 располагаются на одной линии тока.

Если какая-либо критическая точка течения в области годографа (в которой $dW\,/\,d\overline{V}=0$) не совпадает с точкой $\overline{V}=0$, то ей соответствует бесконечно тонкая входная или выходная кромка профиля. В этих точках производная отображающей функции

$$\frac{dz}{d\overline{V}}=\frac{1}{\overline{V}}\frac{dW}{d\overline{V}}=0$$

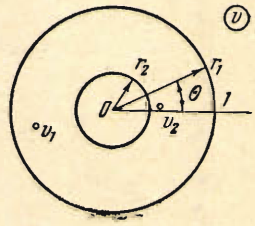
и, следовательно, происходит нарушение конформности отображения. Кроме того, конформность нарушается в точках разветвления, в соответствующих которым точках плоскости z линии тока течения имеют нулевую кривизну [2].

Для получения кромок конечной кривизны каждый контур годографа L_1' и L_2' должен дважды пройти через точку $\overline{V}=0$, причем в целях обеспечения конформности отображения в этой точке необходимо достигнуть (путем надлежащего задания области годографа скорости) совпадения с ней всех критических точек течения в области годографа.

Для определения комплексного потенциала течения находится отображение заданной области годографа на каноническую область, которой в случае двухсвязной области является кольцо или прямоугольник.

Прежде всего годограф скорости двухрядной решетки отображается из плоскости $\overline{V}$ на кольцеобразную однолистную область во вспомогательной плоскости ζ при помощи преобразования Н. Е. Жуковского

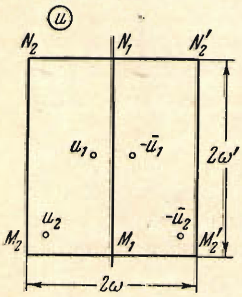
$$\frac{2\overline{V}-\overline{V}_{p1}-\overline{V}_{p2}}{\overline{V}_{p1}-\overline{V}_{p2}}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \qquad (4)$$



Фиг. 3

При преобразовании (4) отрезок P_1P_2 переводится в единичную окружность, точка $\overline{V}=\overline{V}_{p1}$ переходит в точку $\zeta=1$, а точка $\overline{V}=\overline{V}_{p2}$ переходит в точку $\zeta=-1$. Дополнительное условие перехода контура L_1' (из первого листа плоскости $\overline{V}$) в больший контур в плоскости ζ полностью определяет отображение. Если контуры L_1' и L_2' в плоскости годографа гладкие и не самопересекающиеся, как на фиг. 2, то они останутся такими же и в плоскости ζ. В противном случае следует применить дополнительно необходимое число преобразований (типа $\zeta_n=(\zeta-\zeta_0)^{1/k}$) для обеспечения гладкости контуров и однолистности кольцеобразной области в плоскости ζ_n.

Далее необходимо найти конформное отображение кольцеобразной области на кольцо в плоскости v (фиг. 3). Как известно, любую двухсвязную область можно конформно отобразить на кольцо, имеющее $r=1$ и $r_2=\rho<1$. Отображение единственно, если контур L_1' переходит в окружность $v = e^{i\theta}$, и одна его точка переходит в точку $v = 1$. При этом точки $\overline{V} = \overline{V}_1$ и $\overline{V} = \overline{V}_2$ переходят во вполне определенные точки кольца (v_1 и v_2). Указанное отображение $v(\zeta)$ при заданном годографе произвольной формы получается при помощи известных численных методов или с применением моделирования. Ввиду практических трудностей численного отображения может оказаться более целесообразным проведение указанных выше преобразований в обратном порядке и построение теоретических годографов некоторых специальных форм. В качестве простейшего способа построения теоретических годографов двухрядных решеток можно указать следующий. Путем дробно-линейного преобразования кольцо из плоскости v переводится в эксцентричное кольцо в плоскости ζ, из которого затем преобразованием типа Жуковского может быть получен теоретический годограф. Наличие свободных параметров, которыми можно распорядиться для вариации формы годографа и удовлетворения указанных выше условий замкнутости профилей решетки, обеспечено возможностью выбора эксцентриситета кольца в плоскости ζ, положения в нем точек 1, -1, v_1 и v_2, а также величины циркуляции γ_1. Теоретические годографы более общего вида можно получить, задавая коэффициенты разложения отображающей функции:



Фиг. 4

$$\zeta(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n v^n \tag{5}$$

Поскольку все особенности функции (5) должны находиться вне кольца, целесообразно задавать ее в виде

$$\zeta(v) = \prod_{-\infty}^{\infty} (v - v_n)^k, \qquad \rho > v_n > 1 \qquad (k = \pm 1, \mp 2, \ldots)$$

Для построения комплексного потенциала в кольце $\rho \leqslant |v| \leqslant 1$ отобразим его в плоскость u (фиг. 4):

$$u = \ln v \tag{6}$$

При отображении (6) бо́льшая окружность кольца $v = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ переходит в отрезок M_1N_1 мнимой оси ($u = i\theta$), а меньшая окружность $v = \rho e^{i\theta}$ — в параллельный ему отрезок M_2N_2 ($u = \ln\rho + i\theta$). Точки v_1 и v_2 переходят в некоторые точки $u_1 = a_1 + ib_1$ и $u_2 = a_2 + ib_2$.

Главная часть разложения комплексного потенциала $W(u)$ вблизи этих точек имеет вид:

$$\frac{\Gamma_1 + iQ_1}{2\pi i} \ln (u - u_1), \qquad \frac{\Gamma_2 + iQ_2}{2\pi i} \ln (u - u_2)$$

Отрезки M_1N_1 и M_2N_2 суть линии токов $\Psi = \text{const}$; при переходе от точки M_1 к N_1 потенциал скорости Φ возрастает на γ_1. Продолжая аналитически функцию $W(u)$ через стороны прямоугольника $M_1N_1M_2N_2$, найдем, что она должна выражаться эллиптической функцией с периодами

$$2\omega = 2 \ln \frac{1}{\rho}, \qquad 2\omega' = 2\pi i$$

Все указанные выше свойства имеет функция (см., например, [3])

$$W(u) = \frac{\Gamma_1 + iQ_1}{2\pi i} \ln \sigma (u - u_1) - \frac{\Gamma_1 - iQ_1}{2\pi i} \ln \sigma (u + \bar{u}_1) + \tag{7}$$
$$+ \frac{\Gamma_2 + iQ_2}{2\pi i} \ln \sigma (u - u_2) - \frac{\Gamma_2 - iQ_2}{2\pi i} \ln \sigma (u + \bar{u}_2) + Cu + C'$$

В ней константа C' несущественна, а C определяется из условия

$$W(2\pi i) - W(0) = \gamma_1$$

Используя формулу прибавления периода σ-функций Вейерштрасса

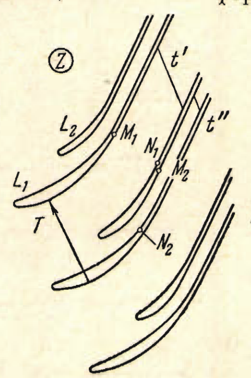
$$\sigma(u + 2\omega') = -\sigma(u) \exp 2\eta'(u + \omega') \tag{8}$$

где $\eta' = \zeta(\omega')$, найдем:

$$C = \frac{1}{2\pi i}\left[\gamma_1 + \frac{2\eta'}{\pi i}(\Gamma_1 a_1 + \Gamma_2 a_2 - Q_1 b_1 - Q_2 b_2)\right] \tag{9}$$

Для вычислений функцию $W(u)$ целесообразно выразить через θ-функции Якоби.

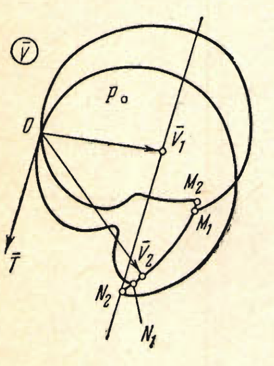
После вычисления функции $W(u)$ задачу построения двухрядной решетки по заданному годографу скорости можно считать решенной. Отметим, что те же формулы (7) и (9) определяют комплексный потенциал любого течения через построенную двухрядную решетку. В них Γ_1 и $Q_1 = -Q_2$ находятся по формулам (2) в соответствии с заданными величинами β_1 и V_1, а константы γ_1 и Γ_2 определяются из условия совпадения критических точек с выходными кромками профилей L_1 и L_2. В этих точках должно быть $dW / du = 0$, что дает систему двух линейных уравнений для определения γ_1 и Γ_2,. Из этого следует, что в случае двухрядной решетки также существует линейная зависимость от Γ_1, Γ_2 и относительной скорости V / V_0 в каждой точке профиля ($V_0 = V_1 = V_2$ при $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$).



Фиг. 5

В заключение рассмотрим задачу построения двухрядной решетки, обтекаемой с образованием струй на выходных кромках конечной толщины (фиг. 5). Пусть в точках M и N начинаются границы струй, уходящих в бесконечность, на которых скорость течения постоянна. Область течения в полосе одного периода в отличие от ранее рассмотренного случая односвязна, так как профили L_1 и L_2 имеют две общие бесконечно удаленные точки на границах струй.

Годограф скорости $\overline{V}$ струйного течения через двухрядную решетку (фиг. 6) также неоднолистный, причем соединение листов осуществляется по разрезу между точкой разветвления поверхности P и точкой разветвления контура (M_1 на фиг. 6). Границам струй отвечает дуга окружности радиуса V_2. В точке $\overline{V} = \overline{V}_1$ располагается вихреисточник с интенсивностью



Фиг. 6

$$\Gamma + iQ = tV_1 \cos\beta_1 + itV_1 \sin\beta_1$$

а в точке $\overline{V} = \overline{V}_2$ с двух сторон дуги MN — два стока с интенсивностями

$$Q' = -t'V_2 \sin\beta_2, \qquad Q'' = -t''V_2 \sin\beta_2 \tag{10}$$

причем

$$-Q' - Q'' = Q = tV_1 \sin\beta_1 = (t' + t'')\, V_2 \sin\beta_2 \tag{11}$$

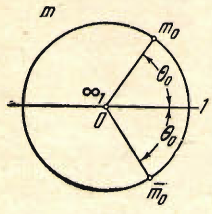
В выражениях (10) и (11) t' и t'' — ширины струй течения в бесконечности за решеткой в направлении периода (фиг. 5). Течение за решеткой однолистно, если $t' + t'' < t$, и отношение $Q' / Q'' = t' / t''$ находится в некоторых пределах, зависящих от формы годографа. В частности, это отношение можно выбрать так, чтобы толщины выходных кромок профилей были равными.

Односвязность годографа скорости струйного течения упрощает решение задачи.

Конформным отображением

$$\zeta = \sqrt{\overline{V} - \overline{V}_p} \tag{12}$$

область годографа скорости превращается в однолистную область во вспомогательной плоскости ζ.



Фиг. 7

Для вычисления комплексного потенциала полученную область целесообразно отобразить затем на внутренность единичного круга в плоскость m (фиг. 7).

Отображение определяется единственным образом, если потребовать, чтобы вихреисточник (∞_1) перешел в центр круга $m = 0$, а стоки с интенсивностями Q' и Q'' разместились на окружности соответственно в точках

$$m = m_0 = e^{i\theta_0}, \qquad m = \overline{m}_0 = e^{-i\theta_0}$$

Комплексный потенциал течения определяется выражением

$$W(m) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln m + \frac{Q'}{\pi i} \ln (m - m_0) + \frac{Q''}{\pi i} \ln (m - \overline{m}_0) + \mathrm{const} \tag{13}$$

На окружности $m = e^{i\theta}$

$$W(m) = \Phi(\theta) = \frac{1}{\pi}\left(\Gamma \frac{\theta}{2} + Q' \ln \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} + Q'' \ln \sin \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) + \mathrm{const} \tag{14}$$

В случае двухрядной решетки, у которой только профили L_1 (или L_2) обтекаются с образованием струй, область годографа скорости двухлистна, а сток в конце вектора $\overline{V}_2$ располагается на контуре L_1' (или L_2'').

Известное обобщение метода годографа скорости на случай дозвукового потенциального течения газа с применением приближения С. А. Чаплыгина ([1], гл. IX) может быть проведено и в рассматриваемой задаче.

Поступила 2 IX 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
2. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. ПММ, т. IV, вып. 4, 1940; т. V, вып. 2, 1941.
3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. ОГИЗ, М.— Л., 1948.