

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ УДАР СФЕРЫ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Э. Л. Блох

(Москва)

Задачу о движении твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, или оболочки, частично заполненной жидкостью, имеющей свободную поверхность, в тех случаях, когда это движение происходит с весьма большими ускорениями, действующими в течение достаточно короткого промежутка времени, можно рассматривать как задачу о гидродинамическом ударе твердого тела о несжимаемую жидкость. Такая схематизация приводит к значительному упрощению математической стороны вопроса, позволяя в то же время выявить наиболее важные особенности движения с большими ускорениями.

Впервые задача о гидродинамическом ударе была решена в 1883 г. Н. Е. Жуковским [1], который разрешил проблему о вертикальном ударе шара, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство или заключенной в сферический сосуд.

Исследование горизонтального удара значительно сложнее исследования вертикального удара, так как последний, как показал Л. И. Седов [2], сводится к хорошо изученной в настоящее время задаче о плавном обтекании тела, полностью окруженного жидкостью.

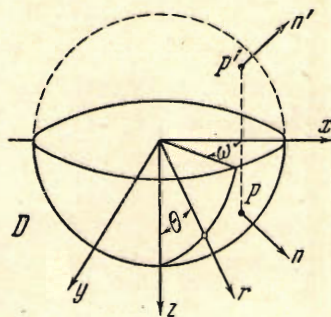
Плоская задача горизонтального удара рассматривалась в работах М. В. Келдыша, М. И. Лаврентьева, Л. И. Седова, А. И. Маркушевича, А. Б. Лотова [2-4].

В настоящей статье рассматривается простейший случай пространственного горизонтального удара, когда твердое тело представляет собой сферу, погруженную до половины в несжимаемую жидкость или сферическую оболочку, также до половины заполненную жидкостью.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим сферу, плавающую на поверхности идеальной жидкости (фиг. 1), или сферическую оболочку, заполненную жидкостью, имеющей свободную поверхность. В первом случае задачу будем называть внешней, а во втором — внутренней (на фиг. 1 в этом случае нормали n и n' следует направить внутрь). Пусть сфера, вначале неподвижная, в результате внезапно приложенной импульсивной силы начнет двигаться, тогда возмущенное движение жидкости, возникшее из состояния покоя, при отсутствии импульсивных массовых сил, как известно, будет потенциальным. Потенциал скоростей возмущенного движения жидкости $\varphi(x, y, z)$ связан с импульсивным давлением равенством

$$p_t = -\rho\varphi \quad (1.1)$$

и удовлетворяет следующим условиям.



Фиг. 1

Внутри жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

На свободной поверхности импульсивное давление $p_t = 0$ и, следовательно,

$$\varphi = 0 \quad (1.3)$$

На поверхности сферы при безотрывном ударе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n \quad (1.4)$$

где n — нормаль к поверхности сферы, направленная внутрь жидкости, v_n — проекция на нормаль скорости точек сферы.

Если жидкость занимает все нижнее полупространство, то на бесконечности она неподвижна и

$$\text{grad} \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Если жидкость ограничена неподвижными стенками, то на этих стенках

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (1.6)$$

Этими условиями потенциал φ определяется однозначно. Условие (1.3) позволяет аналитически продолжить потенциал φ сквозь свободную поверхность в верхнее полупространство при помощи соотношения $\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z)$, в силу которого

$$w_x(x, y, z) = -w_x(x, y, -z)$$

$$w_y(x, y, z) = -w_y(x, y, -z)$$

$$w_z(x, y, z) = w_z(x, y, -z)$$

где w_x, w_y, w_z — проекции скоростей жидкости на оси координат.

Таким образом, получаем, что потенциал φ есть гармоническая функция в области D (вне полной сферы в случае внешней и внутри всей сферы в случае внутренней задачи), в которой в точках, симметричных относительно свободной поверхности жидкости, вертикальные составляющие скорости равны по величине и направлению, а горизонтальные, будучи одинаковыми по величине, направлены в противоположные стороны.

Очевидно, что в точках p и p' , симметричных относительно свободной поверхности и лежащих на сфере:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_p = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{p'} \quad (1.7)$$

Таким образом, для определения φ в области D приходим к задаче Неймана, причем значения $\partial \varphi / \partial n$ на смоченной части сферы заданы условием (1.4), а на ее зеркальном изображении относительно свободной поверхности равенством (1.7).

Введем сферические координаты r, θ и ω , показанные на фиг. 1, причем $0 < \theta < \pi, 0 < \omega < 2\pi$.

Можно представить решение уравнения Лапласа в виде^[5]

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega}{r^{n+1}} P_n^m(\mu) \quad (1.8)$$

и

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) r^n P_n^m(\mu) \quad (1.9)$$

Здесь $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода

$$\mu = \cos \theta, \quad P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{1/2m} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \quad (P_n(\mu) \text{ — полиномы Лежандра})$$

Решение (1.8), конечное при $r \rightarrow \infty$, может быть использовано для внешней задачи, а решение (1.9), конечное при $r = 0$, для внутренней задачи.

Пусть сфера приходит во внезапное поступательное движение вдоль оси x со скоростью, равной U_0 . В этом случае $v_n = U_0 \cos \alpha$, где α — угол между нормалью n и осью x . Очевидно, что

$$\cos \alpha = \pm \cos \omega \sin \theta$$

С другой стороны, на поверхности сферы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

где знак плюс имеет место при внешней, а знак минус при внутренней задаче и, следовательно, согласно условиям (1.4), (1.7) на поверхности сферы при $r = r_0$ как для внешней, так и для внутренней задачи должно выполняться условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_0 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu \quad \left(\begin{array}{l} \operatorname{sign} \mu = +1 \text{ при } 0 < \mu \leq +1 \\ \operatorname{sign} \mu = -1 \text{ при } -1 \leq \mu < 0 \end{array} \right) \quad (1.10)$$

из которого и должны быть определены коэффициенты A_n^m и B_n^m .

§ 2. Внешняя задача. Используя (1.8), приводим условие (1.10) к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n+1}{r_0^{n+2}} (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) P_n^m(\mu) = -U_0 \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu \cos \omega \quad (2.1)$$

Очевидно, условие (2.1) может быть выполнено, если положить $B_n^m = 0$ при всех значениях n и $A_n^m = 0$ для всех $m \neq 1$ и если A_n^1 удовлетворяют равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 \frac{n+1}{r_0^{n+2}} P_n^m(\mu) = -U_0 \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu \quad (2.2)$$

Присоединенные функции Лежандра ортогональны в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = 0 \quad \text{при } n \neq k, \quad \int_{-1}^{+1} [P_n^m(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Пользуясь этим, находим

$$A_n^1 = -\frac{U_0}{2} \frac{2n+1}{n+1} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} r_0^{n+2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+\mu^2} \operatorname{sign} \mu P_n^1(\mu) d\mu$$

Так как $P_{2k}^1(\mu) = -P_{2k}^1(-\mu)$, то

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sign} \mu P_{2k}^1(\mu) d\mu = 2 \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} P_{2k}^1(\mu) d\mu = 2J_{2k} \quad (2.3)$$

Так как $P_{2k+1}^1(\mu) = P_{2k+1}^1(-\mu)$, то

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sign} \mu P_{2k+1}^1(\mu) d\mu = 0$$

Таким образом, окончательно для коэффициентов A_n^1 получаем

$$A_{2k+1}^1 = 0, \quad A_{2k}^1 = -U_0 r_0^{2k+2} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \quad (2.4)$$

Следовательно, потенциал скоростей φ принимает вид:

$$\varphi = -U_0 r_0 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k+1} P_{2k}^1(\mu) \quad (2.5)$$

Соответственно распределение импульсивных давлений по поверхности сферы $r = r_0$ определится равенством

$$p_t = \rho U_0 r_0 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} P_{2k}^1(\mu) \quad (2.6)$$

Величина J_{2k} легко вычисляется, так как

$$J_{2k} = \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} P_{2k}^1(\mu) d\mu = \int_0^1 (1-\mu^2) \frac{dP_{2k}}{d\mu} d\mu = -P_{2k}(0) + 2 \int_0^1 \mu P_{2k}(\mu) d\mu.$$

Но

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad \int_0^1 \mu P_{2k}(\mu) d\mu = (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}$$

Здесь $(2k-1)!! = 1, 3, 5, \dots, (2k-1)$ и $(2k)!! = 2, 4, 6, \dots, (2k)$, причем $(-1)!!$ принимается равным 1. Таким образом

$$J_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{2k}{2k-1} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \quad (2.7)$$

Для доказательства абсолютной и равномерной сходимости полученного решения в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ для всех значений $r \geq r_0$ воспользуемся известными неравенствами

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi(k+1)}}, \quad P_n^1(\mu) < n+1 \quad \text{при } |\mu| \leq 1$$

первое из которых следует из формулы Стирлинга [7] для $n!$, а второе из интегрального представления функций Лежандра [6].

Тогда абсолютная и равномерная сходимость ряда (2.5) непосредственно следует из сходимости ряда

$$S = -\frac{U_0 r_0 \cos \omega}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k+1}{\sqrt{k+1}} \quad (2.8)$$

составленного из положительных членов, не зависящих от r и μ ; каждый член этого ряда больше модуля соответствующего члена ряда (2.5) и при больших k убывает, как $k^{-3/2}$. Ряд (2.6) можно почленно интегрировать и, следовательно, равнодействующая импульсивных сил давления, действующих на смоченную поверхность сферы, проходящая через ее центр и направленная вдоль оси x в сторону, обратную движению сферы

$$P_t = - \int_S p_t \cos \alpha \, dS \quad (dS = r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\omega)$$

может быть представлена в виде

$$P_t = -\rho U_0 r_0^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\mu^2} P_{2k}^1(\mu) \cos^2 \omega \, d\mu \, d\omega$$

или

$$P_t = -\pi \rho U_0 r_0^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}^2 \quad (2.9)$$

Соответственно коэффициент присоединенной массы сферы при внешнем горизонтальном ударе, равный отношению величины $-P_t$ к массе жидкости, объем которой равен объему смоченной части сферы, умноженной на скорость U_0 , определяется равенством

$$\lambda_x = -\frac{P_t}{\rho^2/3\pi r_0^3 U_0} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}^2$$

или, заменяя J_{2k} его значением, получим

$$\lambda_x = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(4k+1)}{(4k^2-1)^2} \left[\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \right]^2$$

С точностью до единицы пятого знака после запятой величина λ_x оказывается равной 0.27322. Для сравнения укажем, что в плоской задаче при горизонтальном ударе круглого цилиндра коэффициент присоединенной массы $\lambda_x = 4\pi^{-2} = 0.405285$.

Найдем теперь приближенное выражение для потенциала скоростей на поверхности сферы. При $r = r_0$ выражение (2.5) принимает вид:

$$\varphi = -U_0 r_0 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{2k}^1(\mu) \left(\alpha_k = \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \right) \quad (2.10)$$

Но $P_{2k}^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2} (dP_{2k}/d\mu)$ и, следовательно,

$$\varphi(\mu) = -U_0 r_0 \cos \omega \sqrt{1-\mu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{dP_{2k}}{d\mu} \quad (2.11)$$

Так как ряд (2.11) равномерно сходится в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ и в том же интервале равномерно сходится ряд $\alpha_1 P_2 + \alpha_2 P_4 + \alpha_3 P_6 + \dots$, то потенциал $\varphi(\mu)$ можно записать в виде

$$\varphi(\mu) = -U_0 r_0 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{2k}(\mu) \quad (2.12)$$

Для приближенного вычисления последнего ряда воспользуемся известным разложением^[7] полного эллиптического интеграла второго рода в ряд по полиномам Лежандра

$$\frac{2E(\theta)}{\pi} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4k+1}{(2k-1)(2k+2)} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 P_{2k}(\cos \theta) \quad (2.13)$$

где

$$E(\theta) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \cos \theta = \mu$$

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{2k} = \left[\frac{2E}{\pi} - \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \beta_k) P_{2k} \quad (2.14)$$

Здесь

$$\beta_k = \frac{\pi}{2} (-1)^{k+1} \frac{4k+1}{(2k-1)(2k+2)} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2$$

При больших значениях k

$$\beta_k \rightarrow \alpha_k$$

Члены ряда, стоящего в правой части последнего выражения, убывают при больших k , как $k^{-7/2}$, причем уже первый коэффициент $\alpha_1 - \beta_1 = -0.0371$ в пять с половиной раз меньше величины $\alpha_1 = 0.2081$.

Второй коэффициент $\alpha_2 - \beta_2 = 0.0038$ почти в десять раз меньше $|\alpha_2| = 0.0375$ и составляет всего 0.0186 от α_1 .

Учитывая сказанное, заменим ряд (2.13) приближенным выражением

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{2k}(\mu) \approx \frac{2E(\theta)}{\pi} - \frac{\pi}{2} + (\alpha_1 - \beta_1) P_2(\mu) + (\alpha_2 - \beta_2) P_4(\mu) \quad (2.15)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{dE(\theta)}{d \sin \theta} = \frac{E(\theta) - K(\theta)}{\sin \theta}$$

где $K(\theta)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, получаем из (2.12) для потенциала φ на поверхности сферы

$$\varphi(\theta) = -r_0 U_0 \cos \omega \left[\frac{2}{\pi} \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} - (\alpha_1 - \beta_1) \frac{dP_2}{d\theta} - (\alpha_2 - \beta_2) \frac{dP_4}{d\theta} \right] \quad (2.16)$$

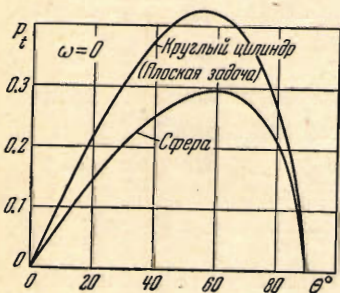
в котором после дифференцирования по μ величина μ заменена через $\cos \theta$. Точность этого приближенного выражения можно косвенно оценить, вычисляя при помощи него коэффициент присоединенной массы. Тогда после

вычисления соответствующих квадратур получим $\lambda_x = 0.2742$, что всего на 0.37% отличается от точного решения.

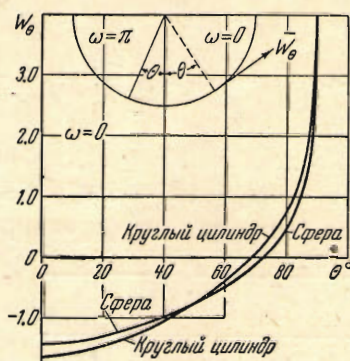
Заменяя $\alpha_1 - \beta_1$ и $\alpha_2 - \beta_2$ их значениями, имеем для распределения импульсивных давлений по смоченной поверхности сферы $\theta \leq \frac{1}{2} \pi$ выражение

$$P_t = \rho U_0 r_0 \cos \omega \left[\frac{2}{\pi} \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} + 0.037 \frac{dP_2}{d\theta} - 0.0038 \frac{dP_5}{d\theta} \right] \quad (2.17)$$

Распределение импульсивных давлений, отнесенных к $\rho U_0 r_0$, для $\omega = 0$ показано на фиг. 2, где для сравнения построена аналогичная величина, соответствующая горизонтальному удару круглого, бесконечно длинного цилиндра (плоская задача).



Фиг. 2



Фиг. 3

Воспользуемся формулой (2.16) для определения тангенциальной составляющей скорости частиц жидкости, примыкающих к сфере:

$$w_\theta = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_0 \cos \omega \left\{ \frac{2}{\pi} \left[E(\theta) - \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\sin^2 \theta} \right] - \right.$$

$$\left. - (\alpha_1 - \beta_1) \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} - (\alpha_2 - \beta_2) \frac{d^2 P_4}{d\theta^2} \right\}$$

Но

$$\frac{d^2 P_n}{d\theta^2} = -n(n+1) P_n - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{dP_n}{n\theta}$$

и, следовательно,

$$w_\theta = -U_0 \cos \omega \left\{ \frac{2}{\pi} \left[E(\theta) - \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\sin^2 \theta} \right] + 6(\alpha_1 - \beta_1) P_2 + 20(\alpha_2 - \beta_2) P_4 + \right.$$

$$\left. + \left[(\alpha_1 - \beta_1) \frac{dP_2}{d\theta} + (\alpha_2 - \beta_2) \frac{dP_4}{d\theta} \right] \operatorname{ctg} \theta \right\}$$

Тангенциальная составляющая скоростей точек сферы равна $v_\theta = U_0 \cos \theta \cos \omega$ и, следовательно, относительная тангенциальная скорость жидкости на поверхности сферы определится равенством (2.18)

$$W_\theta = \frac{w_\theta - v_\theta}{U_0} = -\cos \omega \left\{ \frac{2}{\pi} \left[E(\theta) - \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\sin^2 \theta} \right] + \cos \theta + \right.$$

$$\left. + 6(\alpha_1 - \beta_1) P_2(\theta) + 20(\alpha_2 - \beta_2) P_4(\theta) + \left[(\alpha_1 - \beta_1) \frac{dP_2}{d\theta} + (\alpha_2 - \beta_2) \frac{dP_4}{d\theta} \right] \operatorname{ctg} \theta \right\}$$

Распределение скоростей W_θ при $\omega = 0$ показано на фиг. 3, где дано также сравнение с результатами, полученными для плоской задачи.

Следует отметить, что скорость W_0 в точке $\theta = 0$ для плоской задачи равна $1 + 2/\pi$, что на 18.5% меньше максимальной скорости при плавном обтекании круглого цилиндра безграничным потоком жидкости; для сферы это различие значительно меньше: $W_0 = 1.427$ при $\theta = 0$ вместо 1.5.

В заключение вычислим вертикальную составляющую скорости на свободной поверхности, равную

$$w_0^* = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\theta=1/2\pi}$$

Учитывая, что $\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu}$, дифференцированием (2.5) по θ получим

$$w_0^* = \left\{ U_0 \frac{r_0}{r} \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k+1} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2k}^1}{d\mu} \right\}_{\mu=0}$$

Легко показать, что ряд, стоящий в фигурных скобках, сходится равномерно в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ для всех значений $r_0/r < 1$ и, следовательно, операция дифференцирования законна. Но при $\mu = 0$

$$\frac{dP_{2k}^1}{d\mu} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!!}{(2k-2)!!}$$

Заменяя J_{2k} его значением, имеем

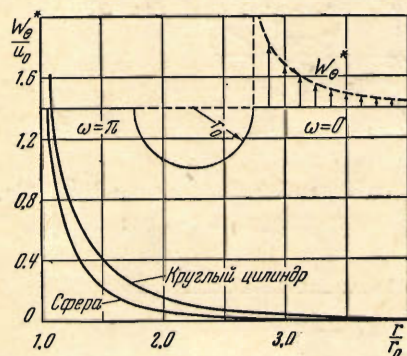
$$w_0^* = U_0 \frac{r_0}{r} \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k+1} \quad (2.19)$$

где

$$\lambda_k = \frac{k(4k+1)}{(2k-1)(k+1)} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

Сравним ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k+1}$$



Фиг. 4

Коэффициент $\lambda_k \rightarrow \nu_k$ при больших k . Сравнение нескольких первых коэффициентов

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = 0.625, & \lambda_2 = 0.282, & \lambda_3 = 0.190, & \lambda_4 = 0.145 \\ \nu_1 = 0.637, & \nu_2 = 0.318, & \nu_3 = 0.212, & \nu_4 = 0.159 \end{array}$$

показывает, что можно приближенно заменить коэффициенты λ_k коэффициентами $2/\pi k$, тогда

$$w_0^* \approx U_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{2}{\pi} \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k}$$

и, следовательно,

$$w_0^* \approx \frac{2U_0}{r} \cos \omega \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \ln \frac{1}{1 - (r_0/r)^2} \quad (2.20)$$

Распределение скоростей w_0^*/U_0 вдоль свободной поверхности при $\omega = 0$ показано на фиг. 4, где для сравнения приведено распределение вертикальных скоростей на свободной поверхности для круглого цилиндра (плоская задача).

Следует отметить, что если в плоской задаче ω_0^*/U_0 убывает по r , как $(r_0/r)^3$, то в случае пространственной задачи ω_0^*/U_0 убывает, как $(r_0/r)^4$. При $r_0/r \rightarrow 1$ в полном соответствии с результатом плоской задачи ω_0^*/U_0 стремится к бесконечности, как

$$\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{1-r_0/r}$$

§ 3. Внутренняя задача. Рассматривая горизонтальный удар сферической оболочки, до половины заполненной жидкостью, следует в качестве решения уравнения (1.2) взять выражение (1.9), конечное при $r=0$.

В этом случае граничное условие (1.10) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) r^{n-1} P_n^m(\mu) = U_0 \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sign} \mu \cos \omega \quad (3.1)$$

Отсюда, так же как и в § 2, получаем

$$\begin{aligned} B_n^m &= 0 \quad \text{для всех } n, & A_n^m &= 0 \quad \text{для } m \neq 1 \\ A_{2k+1}^1 &= 0, & A_{2k}^1 &= U_0 \frac{1}{r_0^{2k-1}} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

и, следовательно,

$$\varphi = U_0 r_0 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2k} P_{2k}^1(\mu) \quad (3.3)$$

Равномерная и абсолютная сходимость этого решения в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ доказывается точно так же, как и для внешней задачи. Равнодействующая сил импульсивных давлений, действующих на внутреннюю смоченную часть сферической оболочки, проходящая через ее центр и направленная в сторону, обратную движению оболочки, после соответствующих преобразований принимает вид:

$$P_t = -\pi \rho U_0 r_0^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}^2 \quad (3.4)$$

а коэффициент присоединенной массы после замены J_{2k} его значением

$$\lambda_x^* = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k+1)}{(4k^2-1)^2} \left[\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \right]^2 = \lambda_x + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{(4k^2-1)^2} \left[\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \right]^2$$

где λ_x — коэффициент присоединенной массы при внешнем ударе.

С точностью до единицы пятого знака после запятой $\lambda_x^* = 0.39822$.

Найдем приближенное выражение для потенциала скоростей на поверхности сферической оболочки. Полностью повторяя рассуждения, приведенные в § 2, получим

$$\varphi(\theta) = U_0 r_0 \cos \omega \left[\frac{2}{\pi} \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} - (\alpha_1^* - \beta_1) \frac{dP_2}{d\theta} - (\alpha_2^* - \beta_2) \frac{dP_4}{d\theta} \right] \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_1^* - \beta_1 = 0.0670, \quad \alpha_2^* - \beta_2 = -0.0055$$

Точность приближенного выражения (3.5) косвенно оценим, используя его для вычисления коэффициента присоединенной массы. После соответствующих вычислений получаем, что $\lambda_x^* = 0.3972$, что достаточно хорошо согласуется с его точным значением.

Для относительной тангенциальной скорости жидкости на поверхности сферической оболочки получаем

$$W_0 = \cos \omega \left\{ \frac{2}{\pi} \left[E(\theta) - \frac{K(\theta) - E(\theta)}{\sin^2 \theta} - \cos \theta + 6(\alpha_1^* - \beta_1) P_2(\theta) - \right. \right. \\ \left. \left. - 20(\alpha_2^* - \beta_2) P_4(\theta) + [(\alpha_1^* - \beta_1) \frac{dP_2}{d\theta} + (\alpha_2^* - \beta_2) \frac{dP_4}{d\theta}] \operatorname{ctg} \theta \right] \right\} \quad (3.6)$$

Распределение скоростей W_0 при $\omega = 0$ показано на фиг. 5.

Вычислим теперь вертикальную скорость на свободной поверхности:

$$w_0^* = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Заменяя

$$\frac{dP_{2k}}{d\theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2k}}{d\mu}$$

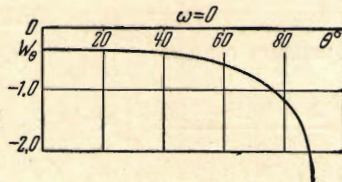
его выражением при $\mu = 0$, получим из (3.3), что

$$w_0^* = -U_0 \frac{r_0}{r} \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(4k+1)}{(2k-1)(2k+2)} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2k} \quad (3.7)$$

Приблизительно суммируя ряд (3.7) с той же точностью, что и для внешней задачи, получаем

$$w_0^* = -\frac{2U_0}{\pi} \cos \omega \frac{r_0}{r} \ln \frac{1}{1 - (r/r_0)^2} - \frac{U_0 \cos \omega}{\pi} \frac{r_0}{r} \int_0^{(r/r_0)^2} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \frac{dx}{x} \quad (3.8)$$

Распределение скоростей w_0^*/U_0 в зависимости от r/r_0 вдоль сво-

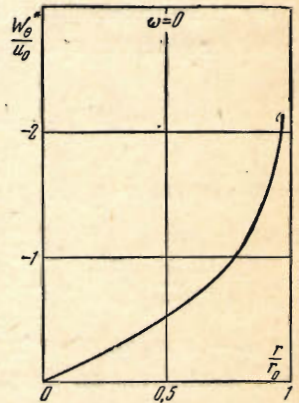


Фиг. 5

бодной поверхности при значении $\omega = 0$ показано на фиг. 6.

Из графика видно, что вблизи центра сферической оболочки скорость изменяется с изменением r/r_0 по закону, близкому к линейному.

§ 4. Смешанная задача. Опираясь на полученное решение для внешней и внутренней задач, можно рассмотреть также смешанную задачу, под которой будем понимать горизонтальный удар сферы, плавающей на поверхности идеальной жидкости, заполняющей сферический сосуд, концентричный с плавающей сферой (фиг. 7).



Фиг. 6

Обозначим радиус плавающей сферы через r_1 , а сферического сосуда через r_2 . Пусть одновременно и сфера и сосуд начинают внезапно двигаться, так что скорости их центров равны соответственно U_1 и U_2 .

Легко показать, что в случае горизонтального удара, когда скорости U_1 и U_2 лежат в плоскости xy и составляют угол, отличный от нуля или π , задача сводится к независимому решению двух задач о горизонтальном ударе, в каждой из которых движение сферы и сосуда происходит вдоль одной оси. Если скорости U_1 и U_2 имеют также вертикальную составляющую, то к задаче о горизонтальном ударе добавляется также независимая от нее задача о вертикальном ударе.

Таким образом, при рассмотрении горизонтального удара, не уменьшая общности, достаточно ограничиться случаем, когда U_1 и U_2 направлены вдоль одной оси, например оси x , и могут отличаться лишь знаком. В рассматриваемом случае необходимо взять наиболее общее решение уравнения (4.2). Положим φ равным

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left(\frac{A_n^m}{r^{n+1}} + B_n^m r^n \right) \cos m\omega + \left(\frac{C_n^m}{r^{n+1}} + D_n^m r^n \right) \sin m\omega \right\} P_n^m(\mu) \quad (4.1)$$

Для определения коэффициентов A_n^m , B_n^m , C_n^m и D_n^m имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= U_1 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu & \text{при } r = r_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= U_2 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu & \text{при } r = r_2 \end{aligned}$$

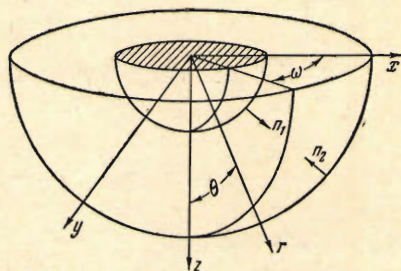
Подставляя в эти условия выражение φ , приводим их к виду

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left[(n+1) \frac{A_n^m}{r_1^{n+2}} - n B_n^m r_1^{n-1} \right] \cos m\omega + \right. & \quad (4.2) \\ \left. + \left[(n+1) \frac{C_n^m}{r_1^{n+2}} - n D_n^m r_1^{n-1} \right] \sin m\omega \right\} P_n^m(\mu) = U_1 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left[(n+1) \frac{A_n^m}{r_2^{n+2}} - n B_n^m r_2^{n-1} \right] \cos m\omega + \right. & \quad (4.3) \\ \left. + \left[(n+1) \frac{C_n^m}{r_2^{n+2}} - n D_n^m r_2^{n-1} \right] \sin m\omega \right\} P_n^m(\mu) = U_2 \cos \omega \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{sign} \mu \end{aligned}$$

Очевидно, условиям (4.2) и (4.3) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned} C_n^m &= 0, & D_n^m &= 0 & \text{при всех } n \\ A_n^m &= 0, & B_n^m &= 0 & \text{при } m \neq 1 \end{aligned}$$



Фиг. 7

Тогда для определения A_n^1 и B_n^1 получаем более простые условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \frac{A_n^1}{r_1^{n+2}} - n B_n^1 r_1^{n-1} \right] P_n^1(\mu) = -U_1 \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sign} \mu \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \frac{A_n^2}{r_2^{n+2}} - n B_n^1 r_2^{n-1} \right] P_n^1(\mu) = -U_2 \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sign} \mu \quad (4.5)$$

Откуда

$$(n+1) \frac{A_n^1}{r_1^{n+2}} - n B_n^1 r_1^{n-1} = -U_1 \frac{2n+1}{2} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} P_n^1(\mu) \operatorname{sign} \mu \, d\mu$$

$$(n+1) \frac{A_n^1}{r_2^{n+2}} - n B_n^1 r_2^{n-1} = -U_2 \frac{2n+1}{2} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} P_n^1(\mu) \operatorname{sign} \mu \, d\mu$$

и, следовательно

$$A_{2k+1}^1 = B_{2k+1}^1 = 0$$

$$(2k+1) \frac{A_{2k}^1}{r_1^{2k+2}} - 2k B_{2k}^1 r_1^{2k-1} = -U_1 (4k+1) \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}$$

$$(2k+1) \frac{A_{2k}^1}{r_2^{2k+2}} - 2k B_{2k}^1 r_2^{2k-1} = -U_2 (4k+1) \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}$$

Решая полученную систему относительно A_{2k}^1 и B_{2k}^1 , окончательно находим

$$A_{2k}^1 = -\frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} r_1^{2k+2} \frac{U_1 - U_2 R^{2k-1}}{1 - R^{4k+1}} \quad (4.6)$$

$$B_{2k}^1 = \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \frac{1}{r_2^{2k-1}} \frac{U_2 - U_1 R^{2k+2}}{1 - R^{4k+1}} \quad (4.7)$$

где

$$R = \frac{r_1}{r_2} < 1$$

Подставляя значения коэффициентов A_n^m , B_n^m , C_n^m и D_n^m в уравнение (4.1), получаем для потенциала скоростей выражение

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (4.8)$$

где

$$\varphi_1 = -r_1 U_1 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2k+1} P_{2k}^1(\mu)$$

$$\varphi_2 = r_2 U_2 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2k} P_{2k}^1(\mu)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & -\cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{r_1}{2k+1} R^{2k-1} \frac{U_1 R^{2k+2} - U_2}{1 - R^{4k+1}} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2k+1} - \right. \\ & \left. - \frac{r_2}{2k} R^{2k+2} \frac{U_2 R^{2k-1} - U_1}{1 - R^{4k+1}} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2k} \right] (4k+1) \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} P_{2k}^1(\mu) \end{aligned}$$

Этот результат позволяет трактовать потенциал скоростей для смешанной задачи как сумму трех потенциалов: $\varphi_1(r_1, U_1)$, — соответствующего внешней задаче для сферы радиусом r_1 , скорость которой равна U_1 , $\varphi_2(r_2, U_2)$, — соответствующего внутренней задаче для сферического сосуда радиусом r_2 , скорость которого равна U_2 , и дополнительного потенциала $\varphi_3(r_1, r_2, U_1, U_2)$.

Равномерная и абсолютная сходимость рядов, выражающих φ_1 и φ_2 в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$, была доказана выше.

Следовательно, для выяснения характера сходимости решения смешанной задачи достаточно исследовать сходимость ряда, определяющего потенциал φ_3 .

Потенциал φ_3 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & -U_1 r_1 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} (4k+1) \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left[\frac{R^{2k+1}}{2k+1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2k+1} + \frac{R}{2k} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2k} \right] \times \\ & \times \frac{R^{2k}}{1-R^{4k+1}} P_{2k}^1(\mu) + U_2 r_2 \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} (4k+1) \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left[\frac{1}{2k+1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2k+1} + \right. \\ & \left. + \frac{R^{2k+1}}{2k} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2k} \right] \frac{R^{2k}}{1-R^{4k+1}} P_{2k}^1(\mu) \end{aligned}$$

Так как $R < 1$ и

$$\frac{R^{2k}}{1-R^{4k+1}} : \left(\frac{R^{2k}}{1-R^{4k+1}} \right)_{k=1} = \frac{1-R^5}{1-R^{4k+1}} R^{2k-2} < 1 \quad \text{при } k > 1$$

и ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2k+1} P_{2k}^1(\mu) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2k} P_{2k}^1(\mu) \end{aligned}$$

сходятся абсолютно и равномерно в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$, следует, что ряды, определяющие φ_3 , также сходятся равномерно в этом интервале для всех значений $R < 1$.

Таким образом, равенство (4.8) является решением смешанной задачи.

Используя найденное решение для φ , можно подсчитать равнодействующую импульсивных сил давления, приложенных к плавающей сфере P_{t1} и к сферическому сосуду P_{t2} .

После соответствующего вычисления находим для плавающей сферы

$$\begin{aligned} P_{t1} = & -\pi \rho U_1 r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k+1} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}^2 - \\ & -\pi \rho r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(4k+1)}{2k(2k+1)} J_{2k} \right]^2 \frac{U_1 R^{4k+1} - U_2 R^{2k-1}}{1-R^{4k+1}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

и для сферического сосуда

$$P_{t_2} = -\pi\rho U_2 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} J_{2k}^2 - \quad (4.10)$$

$$- \pi\rho r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4k+1}{4k(2k+1)} J_{2k} \right]^2 \frac{U_2 R^{4k+1} - U_1 R^{2k+2}}{1 - R^{4k+1}}$$

Первые суммы, входящие в равенства (4.9) и (4.10), были вычислены в §§ 2 и 3; вторые суммы вследствие быстрого убывания их членов легко могут быть подсчитаны для конкретных значений U_1 , U_2 и R .

Выражения (4.9), (4.10) показывают, что при стремлении R к единице импульсивные силы P_{t_1} и P_{t_2} в отдельности могут принимать сколь угодно большие значения, если $U_1 \neq U_2$, в то время, как их сумма $P_t = P_{t_1} + P_{t_2}$, равная главному вектору импульсивных сил, приложенных к системе сфера—сосуд, сохраняет при этом конечную величину.

Поступила 13 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. Собр. соч., т. I. ГТТИ, 1949.
2. Седов Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, № 187, 1937.
3. Лаврентьев М. И., Келдыш М. В., Маркушевич А. И., Седов Л. И., Лотов А. Б. Сборник статей по вопросам удара о поверхность воды. Труды ЦАГИ, № 152, 1935.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
5. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, 1947.
6. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.
7. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, 1951.