

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ СТЕНКАМИ

В. А. Бородин, Ю. Ф. Дитякин

(Москва)

Потеря устойчивости первоначально ламинарного течения рассматривается как переход его в турбулентное.

Обзор и анализ работ об устойчивости ламинарного течения, выполненных методами классической гидродинамики можно найти в статьях Г. И. Петрова^[1] и Ляна^[2].

Большая часть этих работ посвящена изучению возникновения турбулентности в пограничном слое при обтекании пластины.

Толлмиен показал^[3], что для возникновения неустойчивости достаточно, чтобы профиль скоростей течения в пограничном слое имел точку перегиба.

Такие профили реализуются при обтекании пластины, когда давление в направлении движения возрастает.

Вопросу изучения устойчивости течения в трубах и плоских течениях между двумя стенками в литературе уделено значительно меньшее внимание. В основном изучалась устойчивость плоских течений между параллельными стенками с распределением скоростей по параболе (плоская аналогия течения Пуазейля), а также течений с линейным распределением скоростей (случай течения Куэтта); при этом в большинстве работ утверждалась устойчивость ламинарных течений с распределением скоростей по параболе. В 1945 г. Лин^[2] пришел к выводу, что эти течения становятся неустойчивыми при достаточно больших числах Рейнольдса, и даже под считал для них критическое число Рейнольдса. Первоначально с этим выводом согласился ряд авторов, однако в последнее время большинство исследователей полагает правильным утверждение об устойчивости этих течений.

Указанные противоречивые результаты, повидимому, объясняются недостатками применявшегося математического аппарата.

В 1940 г. Г. И. Петров^[4] применил к задачам об устойчивости течений метод Галеркина. Г. И. Петров установил устойчивость плоских течений вязкой жидкости, у которых третья производная выражения профиля скорости по координате равна нулю. Следовательно, была доказана устойчивость плоского течения Пуазейля и течения Куэтта.

В данной работе метод Б. Г. Галеркина применяется к задаче об устойчивости плоских течений вязкой жидкости между двумя стенками с различными профилями скоростей основных течений. Исследуется устойчивость течений с профилями скоростей, имеющими точку перегиба. Течения с такими профилями могут быть реализованы, например, в плоских диффузорах.

Выведены формулы для вычисления нейтральных кривых последовательных приближений, позволяющие установить критическое число Рейнольдса для плоских течений с различными профилями скоростей и влияние характеристик профиля на возникновение неустойчивости.

При выборе приближающих функций применяются некоторые указания, которые содержатся в работе М. В. Келдыша^[5] по обоснованию метода Галеркина.

1. Задача об устойчивости плоского течения вязкой жидкости приводится к граничной задаче уравнения (см., например, [2])

$$L(\varphi) = \lambda \varphi^{IV} - [2\alpha^2 \lambda + i(U - c)] \varphi'' + [\alpha^4 \lambda + i\alpha^2(U - c) + iU''] \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{1}{\alpha R}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{l} h, \quad R = \frac{U_m h}{\nu}, \quad c = c_r + ic_i$$

причем $U = U(y)$ — безразмерная скорость основного течения, α — безразмерное волновое число, h — ширина канала (расстояние между стенками), l — длина волны возмущения, R — число Рейнольдса, U_m — скорость на оси канала, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, φ — амплитуда возмущения, c — комплексная волновая скорость.

Граничными условиями на стенках будут равенства нулю нормальной и тангенциальной составляющих скоростей возмущений:

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = 1 \quad (1.2)$$

Ставится задача отыскания такого числа λ , зависящего от c при заданных действительных α , чтобы решения уравнения (1.1) при условиях (1.2) не обращались тождественно в нуль.

Целью данной граничной задачи является построение в плоскости параметров α, R нейтральной кривой ($c_i = 0$), разделяющей плоскость αR на области нарастания ($c_i > 0$) и затухания ($c_i < 0$) колебаний. Эта кривая также определит критическое число Рейнольдса R_* .

Уравнение (1.1) с переменными коэффициентами не может быть приведено к самосопряженному. Поэтому применение метода Галеркина к этому уравнению требует обоснования.

Воспользуемся результатами работы М. В. Келдыша [5] применительно к уравнению (1.1) с граничными условиями (1.2).

Рассмотрим на интервале $0 \leq y \leq 1$ уравнение 4-го порядка (1.1), зависящее от параметра λ , изменяющегося в области D комплексной плоскости. Будем считать коэффициенты уравнения (1.1) непрерывными функциями от y и λ , когда y изменяется в интервале $[0, 1]$, а λ — в области D , и аналитическими функциями λ в D . Возьмем систему функций

$$\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_m(y), \dots \quad (1.3)$$

удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Положим

$$\varphi_m = e_1 \psi_1(y) + e_2 \psi_2(y) + \dots + e_m \psi_m(y) \quad (1.4)$$

и построим для определения констант e_k систему алгебраических уравнений следующим образом:

$$\int_0^1 L(\varphi_m) \psi_i dy = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.5)$$

Эта система будет иметь вид:

$$\sum_{k=1}^m D_{ik}(\lambda) e_k = 0 \quad (1.6)$$

Собственные значения системы (1.1), (1.2) ищутся как пределы собственных чисел системы (1.6). М. В. Келдыш^[5] доказал следующее предложение.

Если система функций, составленная из двух первых степеней и из вторых производных от функций последовательности (1.3)

$$1, y, y^2, \psi_1'', \psi_2'', \dots, \psi_m'', \dots \quad (1.7)$$

полна в смысле среднего квадратичного уклонения, то собственные значения системы (1.1), (1.2) получаются предельным переходом из собственных значений системы (1.6).

Таким образом, задача состоит в отыскании таких функций (1.3), которые удовлетворяют граничным условиям (1.2) и условию полноты последовательности (1.7).

2. Выберем в качестве приближающих функций (1.3) полиномы:

$$\psi_n = (1 - y)^2 y^{n+2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

и докажем полноту системы функций (1.7) в смысле среднего квадратичного уклонения. Эта система имеет вид:

$$1, y, y^2, 6y - 24y^2 + 20y^3, \dots \\ \dots, (n+1)(n+2)y^n - 2(n+2)(n+3)y^{n+1} + (n+3)(n+4)y^{n+2}, \dots \quad (2.2)$$

и является, как легко показать, системой линейно независимых функций.

Сначала докажем следующее предложение.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ система, полная в классе некоторых функций $f(x)$, т. е.

$$\int \left| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right|^2 dx < \epsilon \quad (2.3)$$

то последовательность сходящихся линейных комбинаций

$$\psi_m = \alpha_{m1}\varphi_1 + \dots + \alpha_{mm}\varphi_m \quad (2.4)$$

тоже является полной системой функций.

Действительно, обратное преобразование (2.4) дает

$$\varphi_k = b_{k1}\psi_1 + \dots + b_{km}\psi_m \quad (2.5)$$

что справедливо, если определитель системы (2.4) не равен нулю.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\int \left| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right|^2 dx = \int \left| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \sum_{j=1}^m b_{kj} \psi_j \right|^2 dx \quad (2.6)$$

Выражение

$$\sum_{k=1}^n C_k \sum_{j=1}^m b_{kj} \psi_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m C_k b_{kj} \psi_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k^{(j)}$$

является двойным рядом. Сумма этого двойного ряда равна сумме повторного ряда (с переставленным порядком суммирования), если эта сумма существует (первое условие) и если сходятся ряды по строкам (второе условие).

Второе условие выполняется в силу (2.4), так как

$$\sum_{j=1}^n a_k^{(j)} = \sum_{j=1}^n C_k b_{kj} \psi_j = C_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \psi_j = C_k \varphi_k$$

Первое условие, т. е. существование предела двойного ряда, выполняется в силу (2.3), так как

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m C_k b_{kj} \psi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m b_{kj} \psi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k$$

Последний предел существует в силу (2.3). Следовательно,

$$\int \left| f(x) - \sum_{j=1}^m \psi_j \sum_{k=1}^n C_k b_{kj} \right|^2 dx = \int \left| f(x) - \sum_{j=1}^m \psi_j a_j \right|^2 dx < \varepsilon \quad (2.7)$$

т. е. система функций ψ_j также является полной.

Система функций (2.2) составлена из линейных комбинаций системы степеней. Поскольку система степеней $1, y, y^2, y^3, \dots$ полна, то в силу доказанного предложения и система функций (2.2) также полна.

3. Для составления системы (1.6) представим разложение (1.4) в виде:

$$\varphi_m = \sum_{n=1}^{n=m} (1-y)^2 y^{n+2} e_n \quad (3.1)$$

т. е. функции ψ_m будут иметь вид:

$$\psi_m = (1-y)^2 y^{k+2} \quad (k=1, \dots, m) \quad (3.2)$$

Подставим разложение (3.1) в выражение оператора (1.1) и в выражение (1.5). Положим $c_i = 0$. Тогда получим систему однородных алгебраических уравнений:

$$\lambda \sum_{n=1}^{n=m} \beta_{kn} e_n + i \left[c_r \sum_{n=1}^{n=m} \gamma_{kn} e_n + \sum_{n=1}^{n=m} \delta_{kn} e_n \right] = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

При этом величины β_{kn} , γ_{kn} и δ_{kn} выражаются формулами

$$\beta_{kn} = a_{kn} - 2b_{kn} \alpha^2 + d_{kn} \alpha^4, \quad \gamma_{kn} = b_{kn} - d_{kn} \alpha^2, \quad \delta_{kn} = p_{kn} - f_{kn} \alpha^2 \quad (3.4)$$

Коэффициенты a_{kn} , b_{kn} , d_{kn} , p_{kn} и f_{kn} выражаются интегралами:

$$\begin{aligned} a_{kn} &= \int_0^1 (1-y)^2 y^{k+2} \frac{d^4}{dy^4} [(1-y)^2 y^{n+2}] dy, & d_{kn} &= \int_0^1 (1-y)^4 y^{k+n+4} dy \\ b_{kn} &= \int_0^1 (1-y)^2 y^{k+2} \frac{d^2}{dy^2} [(1-y)^2 y^{n+2}] dy, & f_{kn} &= \int_0^1 U (1-y)^4 y^{k+n+4} dy \\ p_{kn} &= \int_0^1 U'' (1-y)^4 y^{k+n+4} dy - \int_0^1 U (1-y)^2 \frac{d^2}{dy^2} [(1-y)^2 y^{n+2}] dy \end{aligned} \quad (3.5)$$

Три первых коэффициента не зависят от профиля скоростей и могут быть вычислены сразу:

$$\begin{aligned} a_{kn} &= \frac{24(n+1)(n+2)(k+1)(k+2)}{(k+n+1)(k+n+2)(k+n+3)(k+n+4)(k+n+5)} \\ b_{kn} &= \frac{4[(n-k)^2 - 2kn - 5(n+k) - 12]}{(k+n+3)(k+n+4)(k+n+5)(k+n+6)(k+n+7)} \\ d_{kn} &= \frac{24}{(k+n+5)(k+n+6)(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что коэффициенты (3.6) симметричны относительно k и n т. е. $a_{kn} = a_{nk}$ и т. д.).

Для вычисления коэффициентов f_{kn} и p_{kn} , зависящих от профиля скоростей U , зададимся профилем скоростей основного течения в виде полинома четвертой степени

$$U(y) = E_1 y^4 + E_2 y^3 + E_3 y^2 + E_4 y \quad (3.7)$$

Пусть профиль (3.7) имеет при абсциссах $y = s$ и $y = 1 - \zeta s$ точку перегиба, где $U''(y) = 0$. Величина ζ есть показатель асимметрии расположения точек перегиба профиля, причем для симметричного профиля $\zeta = 1$ и $\zeta \geq 1$ для асимметричного профиля.

Течения, имеющие профили скоростей с несимметричным расположением точек перегиба, могут быть реализованы, например, в плоских диффузорах с несимметричным расширением потока.

Коэффициенты E_j будут выражаться формулами

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{16}{24Ns - 12(s+N) + 7}, & E_3 &= -\frac{96sN}{24Ns - 12(s+N) + 7} \\ E_2 &= \frac{32(s+N)}{24Ns - 12(s+N) + 7}, & E_4 &= \frac{16[6sN + 1 - 2(s+N)]}{24Ns - 12(s+N) + 7} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $N = 1 - \zeta s$.

Уравнение профиля скоростей (3.7) при различных s и ζ характеризует различные плоские течения жидкости за исключением случая, когда знаменатель коэффициентов (3.8) обращается в нуль, что имеет место при

$$s = \frac{3(1+\zeta) \pm \sqrt{9(1+\zeta)^2 - 30\zeta}}{12\zeta} \quad (3.9)$$

В частности, $s_1 = 0.29583$ и $s_2 = 0.70416$ для симметричного профиля ($\zeta = 1$). Обратные течения для симметричного профиля могут возникнуть в том случае, когда уравнение профиля (3.7) имеет, кроме нулевого, еще три действительных корня. Это будет иметь место, когда дискриминант уравнения

$$E_1 y^3 + E_2 y^2 + E_3 y + E_4 = 0 \quad (3.10)$$

будет меньше нуля.

Дискриминант уравнения (3.10) переходит через нуль тогда, когда координата точки перегиба s переходит через один из корней уравнения $6s(1-s) - 1 = 0$. Корни этого уравнения будут

$$s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}, \quad \text{или} \quad s_1 = 0.2112, \quad s_2 = 0.78868 \quad (3.11)$$

Следовательно, для симметричного профиля при $0 < s < 0.2112$ обратные течения отсутствуют, а при $0.2112 < s < 0.5$ обратные течения имеются.

Вычисляя коэффициенты f_{kn} , получим

$$f_{kn} = M_{kn}^{(1)} E_1 + M_{kn}^{(2)} E_2 + M_{kn}^{(3)} E_3 + M_{kn}^{(4)} E_4$$

где

$$\begin{aligned} M_{kn}^{(1)} &= -\frac{24}{(k+n+9)(k+n+10)(k+n+11)(k+n+12)(k+n+13)} \\ M_{kn}^{(2)} &= -\frac{24}{(k+n+8)(k+n+9)(k+n+10)(k+n+11)(k+n+12)} \\ M_{kn}^{(3)} &= -\frac{24}{(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)(k+n+10)(k+n+11)} \\ M_{kn}^{(4)} &= -\frac{24}{(k+n+6)(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)(k+n+10)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для коэффициентов p_{kn} получаем

$$p_{kn} = B_{kn}^{(1)} E_1 + B_{kn}^{(2)} E_2 + B_{kn}^{(3)} E_3 + B_{kn}^{(4)} E_4$$

где

$$\begin{aligned} B_{kn}^{(1)} &= \frac{4(88 + 21n - 3k + 4kn - k^2 - n^2)}{(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)(k+n+10)(k+n+11)} \\ B_{kn}^{(2)} &= \frac{4(54 + 17n - k + 4kn - k^2 - n^2)}{(k+n+6)(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)(k+n+10)} \\ B_{kn}^{(3)} &= \frac{4(30 + 13n + k + 4kn - k^2 - n^2)}{(k+n+5)(k+n+6)(k+n+7)(k+n+8)(k+n+9)} \\ B_{kn}^{(4)} &= \frac{4(16 + 9n + 3k + 4kn - k^2 - n^2)}{(k+n+4)(k+n+5)(k+n+6)(k+n+7)(k+n+8)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

4. Для построения нейтральной кривой $R = f(\alpha)$ рассмотрим систему (3.3). Эта система будет иметь решения, отличные от нуля, если определитель, составленный из коэффициентов уравнений, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda\beta_{11} + iA_{11} & \dots & \lambda\beta_{1n} + iA_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\beta_{n1} + iA_{n1} & \dots & \lambda\beta_{nn} + iA_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

где

$$c_r \gamma_{ij} + \delta_{ij} = A_{ij} \quad (4.2)$$

В дальнейшем для краткости определитель будем обозначать одной строкой, характеризующей его структуру; при этом если не виден порядок определителя, то будем указывать его индексом справа.

Таким образом, для (4.1) получим

$$|\lambda\beta_{n1} + iA_{n1}, \dots, \lambda\beta_{nn} + iA_{nn}| = 0, \quad \text{или} \quad |\lambda\beta + iA, \dots, \lambda\beta + iA|_n = 0 \quad (4.3)$$

Будем строить нейтральные кривые последовательных приближений, вырезая из определителя n -го порядка (4.1) определители последовательно повышающихся порядков. Порядок определителя будет соответствовать номеру приближения. Разделяя действительную и мнимую части для

уравнения каждого последовательного приближения, будем получать систему двух уравнений и, исключая из них величину c_r , получим уравнение для построения нейтральных кривых.

Для первого приближения имеем

$$|\lambda\beta + iA| = 0 \quad \text{или} \quad \lambda\beta_{11} = 0, \quad A_{11} = 0 \quad (4.4)$$

Отсюда

$$\lambda = 0 \quad (4.5)$$

Нейтральная кривая первого приближения представляет собой бесконечно удаленную гиперболу

$$\frac{1}{\alpha R} = 0 \quad (4.6)$$

Следовательно, первое приближение является недостаточно точным.

Для второго приближения имеем

$$|\lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA| = 0$$

или

$$\lambda^2 |\beta, \beta| - |A, A| = 0, \quad \lambda [|\beta, A| + |A, \beta|] = 0 \quad (4.7)$$

Для третьего приближения

$$|\lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA| = 0$$

или

$$\begin{aligned} \lambda^3 |\beta, \beta, \beta| - \lambda [|\beta, A, A| + |A, \beta, A| + |A, A, \beta|] &= 0 \\ \lambda^2 [|\beta, \beta, A| + |\beta, A, \beta| + |A, \beta, \beta|] - |A, A, A| &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для четвертого приближения

$$|\lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA, \lambda\beta + iA| = 0$$

или

$$\begin{aligned} \lambda^4 |\beta, \beta, \beta, \beta| - \lambda^2 [|\beta, \beta, A, A| + |\beta, A, \beta, A| + |\beta, A, A, \beta| + \\ + |A, \beta, \beta, A| + |A, \beta, A, \beta| + |A, A, \beta, \beta| + |A, A, A, A|] &= 0 \\ \lambda^3 [|\beta, \beta, \beta, A| + |\beta, \beta, A, \beta| + |\beta, A, \beta, \beta| + |A, \beta, \beta, \beta|] - \\ - \lambda [|\beta, A, A, A| + |A, \beta, A, A| + |A, A, \beta, A| + |A, A, A, \beta|] &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

и т. д.

Обозначим коэффициенты при разных степенях λ в различных приближениях буквой l с индексами, равными: первый — номеру приближения, а второй — показателю степени λ . Так, для λ^k в r -м приближении коэффициент будет иметь вид l_{rk} . Тогда получим:

для второго приближения

$$\lambda^2 l_{22} - l_{20} = 0, \quad \lambda l_{21} = 0 \quad (4.10)$$

для третьего приближения

$$\lambda^3 l_{33} - \lambda l_{31} = 0, \quad \lambda^2 l_{32} - l_{30} = 0 \quad (4.11)$$

для четвертого приближения,

$$\lambda^4 l_{44} - \lambda^2 l_{42} + l_{40} = 0, \quad \lambda^3 l_{43} - \lambda l_{41} = 0 \quad (4.12)$$

и т. д.

Таким образом, коэффициенты l_{rk} вычисляются так:

$$l_{rk} = \sum \left| \underbrace{\beta, \beta, \beta, \dots, \beta}_k, A, A, \dots, A \right|_r \quad (4.13)$$

т. е. l_{rk} равен сумме определителей порядка r , в каждом из которых содержится k столбцов из элементов β с различными индексами и $r-k$ столбцов из элементов A с различными индексами. Все определители под знаком суммы получены из первого определителя всевозможными перестановками его столбцов (букв), причем все индексы в определителе остаются на своих местах.

Так как число перестановок из r элементов с повторениями k и $r-k$ элементов равно

$$P = \frac{r!}{k!(r-k)!} \quad (4.14)$$

то число слагаемых суммы (4.13) равно числу перестановок (4.14).

Воспользовавшись введенными обозначениями, можно написать уравнение для n -го приближения, т. е. произвести разделение действительной и мнимой частей уравнения (4.1). Имеем

для четного n

$$\begin{aligned} \lambda^n l_{nn} - \lambda^{n-2} l_{n,n-2} + \lambda^{n-4} l_{n,n-4} - \dots + (-1)^{1/2 n} l_{n0} &= 0 \\ \lambda^{n-1} l_{n,n-1} - \lambda^{n-3} l_{n,n-3} + \dots + (-1)^{1/2 n+1} \lambda l_{n1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

для нечетного n

$$\begin{aligned} \lambda^n l_{nn} - \lambda^{n-2} l_{n,n-2} + \lambda^{n-4} l_{n,n-4} - \dots + (-1)^{1/2(n-1)} \lambda l_{n1} &= 0 \\ \lambda^{n-1} l_{n,n-1} - \lambda^{n-3} l_{n,n-3} + \lambda^{n-5} l_{n,n-5} - \dots + (-1)^{1/2(n-1)} l_{n0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для исключения λ из систем (4.15) или (4.16) поступаем следующим образом. Составим результат левых частей этих уравнений в виде определителя; приравняв его нулю, определяем c_r .

Найденное значение c_r подставим в одно из уравнений (4.15) или соответственно в (4.16), после этого определяем λ .

Имея в виду численные расчеты для последовательных приближений, выпишем формулы для определения λ .

Для второго приближения величину c_r находим из $l_{21} = 0$ и, подставляя в

$$\lambda^2 = \frac{l_{20}}{l_{22}} \quad (4.17)$$

получим величину λ .

Для третьего приближения имеем

$$\begin{vmatrix} l_{33} & -l_{31} \\ l_{32} & -l_{30} \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{l_{31}}{l_{33}} = \frac{l_{30}}{l_{32}} \quad (4.18)$$

Для четвертого приближения имеем

$$\begin{vmatrix} l_{44} & -l_{42} & l_{40} \\ l_{43} & -l_{41} & -0 \\ 0 & l_{43} & -l_{41} \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{l_{41}}{l_{43}} \quad (4.19)$$

Для пятого приближения имеем

$$\begin{vmatrix} l_{55} & -l_{53} & l_{51} & 0 \\ 0 & l_{55} & -l_{53} & l_{51} \\ l_{54} & -l_{52} & l_{50} & 0 \\ 0 & l_{54} & -l_{52} & l_{50} \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{l_{52} \pm \sqrt{l_{52}^2 - 4l_{54}l_{50}}}{2l_{54}} \quad (4.20)$$

5. Рассмотрим устойчивость плоских течений, имеющих профиль скоростей с несимметрично расположенными точками перегиба при условии постоянного расхода жидкости

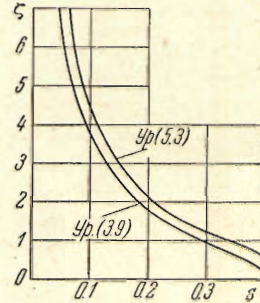
$$Q = \int_0^1 U dy = 1 \quad (5.1)$$

Тогда из (5.1) получим условие

$$12E_1 + 15E_2 + 20E_3 + 30E_4 = 60 \quad (5.2)$$

Подставив в (5.2) E_j из (3.8), получим

$$\zeta = \frac{9 - 20s}{20s(1 - 2s)} \quad (5.3)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 изображен график $\zeta = f(s)$ согласно (5.3). Все точки, лежащие на кривой, удовлетворяют условию $Q = 1$, в то время как точки плоскости ζs , лежащие над кривой, — условию $Q > 1$.

На фиг. 1. также нанесена кривая согласно уравнению (3.9), которая соответствует случаю, когда знаменатель коэффициентов (3.8) превращается в нуль. Как видим, кривые (5.3) и (3.9) не пересекаются.

Построим нейтральную кривую второго приближения для течения с асимметричным расположением точек перегиба, например для $\zeta = 0.8$. Тогда из (5.3) получим значение абсцисс точек перегиба:

$$s = 0.375, \quad N = 1 - \zeta s = 0.75$$

По формулам (3.8) найдем

$$E_1 = -40, \quad E_2 = 86, \quad E_3 = -63, \quad E_4 = 17.$$

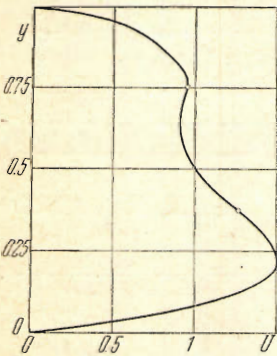
На фиг. 2 изображен профиль скоростей для выбранных значений ζ и s .

Подсчитывая коэффициенты (3.6), (3.12) и (3.13), получим:

kn	a_{kn}	$b_{kn} 10^3$	$d_{kn} 10^4$	$f_{kn} 10^4$	$p_{kn} 10^3$
11	0.34286	-6.3492	4.3290	-4.3000	7.0865
12	0.25714	-3.9683	2.5253	-2.4420	3.8600
21	0.25714	-3.9683	2.5253	-2.4420	4.2069
22	0.22857	-2.8860	1.5540	-1.4740	2.6418

Пользуясь формулой (4.17) для разных значений α , найдем величину c_r из уравнения

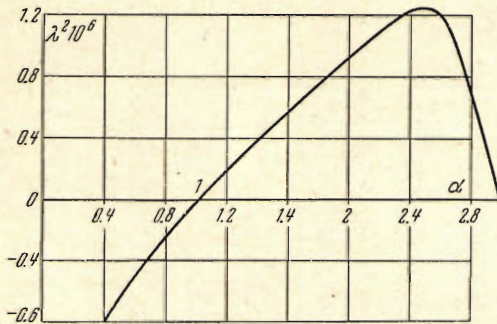
$$l_{21} = |\beta\delta| + |\delta\beta| + c_r (|\beta\gamma| + |\gamma\beta|) = 0$$



Фиг. 2

Подставляя найденное значение c_r в уравнение

$$\lambda^2 = \frac{l_{20}}{l_{22}} = \frac{c_r^2 |\gamma\gamma| + c_r (|\gamma\delta| + |\delta\gamma|) + |\delta\delta|}{|\beta\beta|}$$



Фиг. 3

са R_* , соответствующее минимуму $\alpha = 2.54$, т. е. при $R < 340$ возмущения, наложенные на поток с выбранным профилем скоростей, затухают. Вычисление одной точки нейтральной кривой третьего приближения по формулам (4.18) для $\alpha = 2$ дает $R = 527$; сравнение с $R = 524$ для второго приближения показывает, что имеет место быстрая сходимость разработанного алгоритма.

Проведенные расчеты показывают, что плоские течения с несимметрично расположенными точками перегиба профиля скоростей неустойчивы.

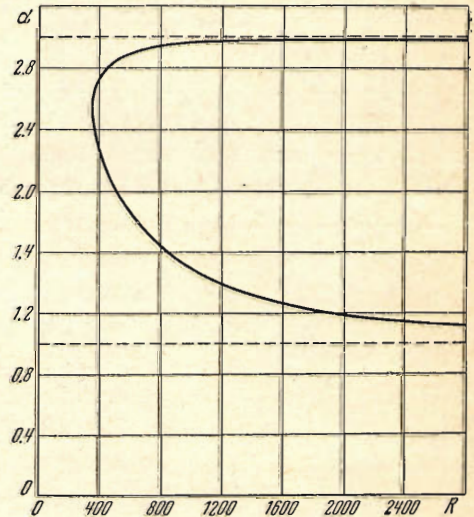
Поступила 10 IV 1953

найдем величины $\lambda^2 = \alpha^{-2} R^{-2}$.

На фиг. 3 изображена зависимость λ^2 от α . Как видим, $\lambda^2 = 0$ при $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$.

Перестроив кривую на фиг. 3 в координатах α , R , получим нейтральную кривую второго приближения на фиг. 4. Эта кривая отделяет область неустойчивости (внутри) от области устойчивости (снаружи).

Критическое число Рейнольдса кривой $R = f(\alpha)$, равно $R_* = 340$ при



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. О распространении колебаний в вязкой жидкости и о возникновении турбулентности. Труды ЦАГИ, № 345, 1938.
2. Lin C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Quarterly Appl. Math., vol. 3, No 2, 3, 1945; No 4, 1946.
3. Tollmien. Ueber die Entstehung der Turbulenz (Nr. 1). Ein allgemeines Kriterium der Unstabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen (Nr. 5). «Nachrichten v. d. Gesellschaft d. Wissen. zu Göttingen», Nr. 1, S. 21—44; 1929; Nr. 5, S. 79—114, 1935.
4. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ИММ, новая серия, т. IV, вып. 3, 1940.
5. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. Известия АН СССР. Сер. матем., т. VI, вып. 6, 1942.