Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Е. И. Ким

(Ростов-на-Дону)

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку, состоящую из двух различных однородных листов, спаянных вдоль прямой. Требуется определить температуру в каждой точке пластинки по первоначальной температуре (при этом возможное излучение температуры через поверхность пластинки не учитывается).

Для математической формулировки этой задачи выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось y была параллельна прямой соприкосновения этих листов. При таком выборе системы координат задачу можно формулировать следующим образом: найти решение уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1^2 \triangle u \quad \text{при } x < x_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \triangle u \quad \text{при } x > x_0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

удовлетворяющие начальному условию

$$u|_{t=0} = f(x, y) \qquad (-\infty < x,\ y < +\infty) \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$u(x_0 - 0,\ y,\ t) = u(x + 0,\ y,\ t) \tag{1.3}$$

$$k_1 u_x'(x_0 - 0,\ y,\ t) = k_2 u_x'(x_0 + 0,\ y,\ t) \tag{1.4}$$

где a_1^2 и a_2^2 — коэффициенты теплопроводности, k_1 и k_2 — коэффициенты внутренней теплопроводности [1].

Будем искать решение уравнения (1.1), удовлетворяющее, кроме (1.2), (1.3) и (1.4), еще условиям [5]

$$|u(x, y, t)|\, e^{-M(x^2+y^2)} < N, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| e^{-M(x^2+y^2)} < N, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| e^{-M(x^2+y^2)} < N \tag{1.5}$$

для любого значения x, y при $t < \delta$, где $M > 0$, $N > 0$, а δ зависит от M.

---

[1] Эту задачу в случае одномерной среды рассматривали Ф. Франк, Р. Мизес [1], Х. С. Карслоу [2], М. Е. Швец [3], С. А. Усольцев и др.; в многомерном случае Г. Мюнц [4] указал на возможность сведения ее к системе уравнений типа Вольтерра второго рода. Но подробное исследование показывает, что один из интегралов системы уравнений не является абсолютно сходящимся. В силу этого доказательство сходимости процесса последовательности приближения становится неясным.

Ниже указывается метод, который избавляет нас от этого затруднения.

§ 2. О свойствах интегралов. Вычислим предел интеграла

$$\iint\limits_S \Phi(\xi, \eta)\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta$$

где

$$G(x-\xi, y-\eta, h; a) = \frac{1}{4a^2\pi h}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2h}\right] \tag{2.1}$$

при h, стремящемся к нулю, принимая положительный знак, где функция $\Phi(\xi, \eta)$ непрерывна и удовлетворяет условию (1.5), а S — любая область изменения переменных ξ, η, в частности, она может быть полуплоскостью. С этой целью сначала докажем, что

$$\lim_{h\to 0}\iint\limits_S [\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)]\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим через K круг с центром в точке (x, y) и с таким достаточно большим радиусом R, чтобы этот круг покрывал область S; тогда

$$\begin{gathered}\left|\iint\limits_S [\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)]\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta\right| \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_K |\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)|\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{K_1} |\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)|\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta + \\ + \iint\limits_{K_\varepsilon} |\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)|\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta\end{gathered} \tag{2.3}$$

где K_ε — круг с центром в точке (x, y) и с радиусом ε, а $K_1 = K - K_\varepsilon$. Но

$$\begin{gathered}\iint\limits_{K_1} |\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)|\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta \leqslant \\ \leqslant 2N\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^R \exp\left\{-M[\rho^2+r^2+2\rho r\cos(\rho r)]-\frac{r^2}{4a^2h}\right\}\frac{r\,dr\,d\theta}{4\pi a^2h} < \\ < \frac{2N}{1-4a^2hM}\exp\left(M\rho^2+\frac{4a^2h\rho}{1-4a^2hM}\right)\left\{\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{4a^2h}-M}\,\varepsilon-\frac{2a\sqrt{h}\,\rho}{1-4a^2hM}\right)^2\right]-\right. \\ \left.-\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{4a^2h}-M}\,R-\frac{2a\sqrt{h}\,\rho}{1-4a^2hM}\right)^2\right]\right\}+8Na^2h\rho\exp\left(M\rho^2+\frac{4a^2h\rho^2}{1-4a^2hM}\right)\end{gathered} \tag{2.4}$$

где ρ — расстояние от начала до точки (ξ, η).

Для любого заданного $\delta > 0$ выберем ε такое, что, когда точка (ξ, η) находится в K_ε, имело бы место следующее неравенство:

$$|\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)| < \tfrac{1}{2}\delta$$

Тогда

$$\begin{gathered}\iint\limits_{K_\varepsilon} |\Phi(\xi, \eta)-\Phi(x, y)|\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta < \\ < \frac{\delta}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2h}\right)\frac{r\,dr\,d\theta}{4\pi a^2h} = \frac{\delta}{2}\left[1-\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4a^2h}\right)\right] < \frac{\delta}{2}\end{gathered}$$

При таком выборе ε можно выбрать h так, чтобы правая часть неравенства (2.4) была меньше $\frac{1}{2}\delta$.

Таким образом, при достаточно малом h имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_S [\Phi(\xi, \eta) - \Phi(x, y)]\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta\right| < \delta$$

и этим самым равенство (2.2) доказано.

Непосредственным вычислением легко можно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\iint\limits_S G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta = \begin{cases} 1 & \text{для } (x, y) \text{ в обл. } S \\ 0 & \text{для } (x, y) \text{ вне обл. } S \\ \frac{1}{2} & \text{для } (x, y) \text{ на контуре } S \end{cases}$$

В угловой точке контура, где касательные образуют угол α, правая часть последнего равенства заменяется $\frac{1}{2}\alpha/\pi$.

Таким образом, мы имеем следующую формулу: (2.5)

$$\lim_{h\to 0}\iint\limits_S \Phi(\xi, \eta)\, G(x-\xi, y-\eta, h; a)\, d\xi\, d\eta = \begin{cases} \Phi(x, y) & \text{для } (x, y) \text{ в обл. } S \\ 0 & \text{для } (x, y) \text{ вне обл. } S \\ \frac{\alpha}{2\pi}\Phi(x, y) & \text{для } (x, y) \text{ на контуре } S \end{cases}$$

Рассмотрим предел интеграла

$$\int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{(t-\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, \Phi(\eta, \tau)\, d\eta \qquad \text{при } \beta\to 0$$

когда функция $\Phi(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (1.5), а функция G определена (2.1). Для этого интеграл

$$J = \int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, [\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)]\, d\eta$$

разобьем на четыре интеграла J_1, J_2, J_3, J_4, так что

$$J_1 = \int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{y-\varepsilon_1} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, [\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)]\, d\eta$$

$$J_2 = \int_0^{t-\varepsilon_3} \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{y-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_2} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, [\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)]\, d\eta$$

$$J_3 = \int_{t-\varepsilon_3}^{t} \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{y-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_2} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, [\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)]\, d\eta$$

$$J_4 = \int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{y+\varepsilon_2}^{+\infty} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, [\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)]\, d\eta$$

Для любого заданного $\delta > 0$ выберем ε_1, ε_2, ε_3 так, что при $y-\varepsilon_1 < \eta < y+\varepsilon_2$, $t-\varepsilon_3 < \tau < t$ имело место

$$|\Phi(\eta, \tau) - \Phi(y, t)| < \frac{1}{4}\delta$$

Тогда непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$|J_3| < \frac{1}{4}\delta \int_{t-\varepsilon_3}^{t} \frac{|\beta|\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_2} G(\beta, y-\eta, t-\tau; a)\, d\eta < \frac{1}{4}\delta$$

После выбора ε_1, ε_2, ε_3 выберем β так, чтобы каждый из оставшихся интегралов J_1, J_2 и J_4 был меньше $\frac{1}{4}\delta$. Таким образом, $|J| < \delta$ при достаточно малом β, т. е. $\lim J = 0$ при $\beta \to 0$. Но интеграл

$$\int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\beta,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a)\, d\eta$$

стремится к ± 1, когда $\beta \to 0$, причем знак совпадает со знаком величины β. Отсюда мы получаем следующую формулу:

$$\lim_{\beta \to 0} \int_0^t \frac{\beta\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\beta,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a)\, d\eta = \pm \Phi(y,\ t) \tag{2.6}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x_0,\ y-\eta,\ \tau;\ a_1)\, G(0,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_2)\, d\eta$$

Вычисляя внутренний интеграл и производя замену

$$\sqrt{\frac{t}{\tau}-1} = \frac{2a_1\sqrt{t}}{|x-x_0|}\, z \tag{2.7}$$

получаем

$$I = \frac{1}{2a_2^2\pi^{3/2}\, t\, |x-x_0|} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2 t} - \frac{(y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] \int_0^{\infty} e^{-z^2}\psi\, dz \tag{2.8}$$

где

$$\psi = \psi(z,\ x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2) =$$

$$= \frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + 4a_1^2 t z^2}{(x-x_0)^2 + 4a_2^2 t z^2}} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2 (x-x_0)^2 (a_2^2 - a_1^2)}{4a_1^2 a_2^2 t\, [(x-x_0)^2 + 4a_2^2 t z^2]}\right] \tag{2.9}$$

Очевидно, что функция

$$\Phi(x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2) = \int_0^{\infty} e^{-z^2}\psi(z;\ x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2)\, dz \tag{2.10}$$

обладает следующим свойством:

$$\Phi(x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Phi(\pm 0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.11}$$

Для дальнейшего исследования найдем производную функции Φ. Легко можно показать, что если $x \neq x_0$, то интеграл (2.10) можно дифференцировать под знаком интеграла.

После дифференцирования, производя замену переменных

$$z = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}} \frac{1}{z_1} \tag{2.12}$$

получим

$$\Phi_x'(x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2) =$$

$$= \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \frac{a_2^2 - a_1^2}{4a_1^3 a_2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{t z_1^2} - \frac{(y-\eta)^2 (a_2^2 - a_1^2)\, z_1^2}{4a_1^2 a_1^2 t\, (z_1^2 + 4a_2^2)}\right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{z_1^2 + 4a_1^2}{z_1^2 + 4a_2^2}} \left[\frac{1}{(z_1^2 + 4a_1^2)(z_1^2 + 4a_2^2)} - \frac{(y-\eta)^2}{2a_1^2 t\, (z_1^2 + 4a_2^2)^2}\right] \sqrt{t}\, dz_1 \tag{2.13}$$

Очевидно, что последний интеграл сходится равномерно. Беря предел при $x \to x_0$, имеем

$$\Phi_x'(\pm 0, y-\eta, t;\ a_1, a_2) = \pm \frac{a_2^2 - a_1^2}{4a_1^3 a_2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{t}\varphi(z)\right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{z^2+4a_1^2}{z^2+4a_2^2}} \left[\frac{1}{(z^2+4a_1^2)(z^2+4a_2^2)} - \frac{(y-\eta)^2}{2a_1^2 t (z^2+4a_2^2)^2}\right] \sqrt{t}\, dz \qquad (2.14)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{(a_2^2 - a_1^2)\, z^2}{4a_1^2 a_2^2 (z^2 + 4a_2^2)} \qquad (2.15)$$

Перейдем к оценке функции Φ_x'. Функция $\varphi(z)$ — монотонная в интервале $(0, +\infty)$; при этом

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(+\infty) = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4a_1^2 a_2^2}$$

Следовательно, ее нижняя грань

$$\gamma = \min\left[\frac{a_2^2 - a_1^2}{4a_1^2 a_2^2};\ 0\right] \qquad (2.16)$$

Таким образом,

$$|\Phi_x'(\pm 0, y-\eta, t;\ a_1, a_2)| \leqslant \left[A\sqrt{t} + B\frac{(y-\eta)^2}{\sqrt{t}}\right] \exp\left(-\gamma\frac{(y-\eta)^2}{t}\right) \qquad (2.17)$$

где A и B — некоторые положительные постоянные, равные нулю при $a_1 = a_2$. Рассмотрим еще интеграл

$$J = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_0, y - \eta_1, \tau;\ a_1)\, G(x_0 - \xi, \eta_1 - \eta, t - \tau;\ a_2)\, d\eta_1$$

Аналогично предыдущему после предварительного вычисления внутреннего интеграла, производя замену переменного (2.12), имеем

$$J = \frac{\Phi_1(x - x_0, x_0 - \xi, y - \eta, t;\ a_1, a_2)}{2a_2^2 \pi^{3/2} t\, |x - x_0|} \exp\left[-\left(\frac{|x - x_0|}{2a_1\sqrt{t}} + \frac{|x_0 - \xi|}{2a_2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{(y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] \qquad (2.18)$$

где

$$\Phi_1(x - x_0, x_0 - \xi, y - \eta, t;\ a_1, a_2) =$$

$$= \int_0^\infty \psi(z, x - x_0, y - \eta, t;\ a_1, a_2) \exp\left[-\left(z - \frac{|x_0 - \xi|\, |x - x_0|}{4a_1 a_2 t z}\right)^2\right] dz \qquad (2.19)$$

Очевидно, что функция $\Phi_1(x - x_0, x_0 - \xi, y - \eta, t;\ a_1, a_2)$ обладает следующим свойством:

$$\Phi_1(x - x_0, x_0 - \xi, y - \eta, t;\ a_1, a_1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Phi_1(\pm 0, \quad x_0 - \xi, y - \eta, t;\ a_1, a_2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Phi_1(x - x_0, \qquad 0, y - \eta, t;\ a_1, a_2) = \Phi(x - x_0, y - \eta, t;\ a_1, a_2)$$

Найдем производную этой функции:

$$\Phi_{1x}'(x-x_0,\ x_0-\xi,\ \ y-\eta,t;\ a_1,a_2)=\pm\int_0^\infty\psi(z,x-x_0,\ \ y-\eta,t;\ a_1,a_2)\times$$

$$\times\ \exp\left[-\left(z-\frac{|x_0-\xi|\,|x_0-x|}{4a_1a_2tz}\right)^2\right]\left(\frac{|x_0-\xi|\,|x-x_0|}{4a_1a_2tz}-z\right)dz+ \tag{2.20}$$

$$+\int_0^\infty\psi_x'(z,x-x_0,y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2)\exp\left[-\left(z-\frac{|x_0-\xi|\,|x_0-x|}{4a_1a_2tz}\right)^2\right]dz$$

Перед интегралом знак плюс берется, если $x>x_0$, а минус при $x<x_0$. Интегрируем отдельно:

$$I_1=\int_0^\infty\psi(z,x-x_0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2)\exp\left[-\left(z-\frac{|x_0-\xi|\,|x-x_0|}{4a_1a_2tz}\right)^2\right]\frac{|x_0-\xi|}{2a_1a_2t}dz$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to x_0}I_1=\frac{|x_0-\xi|}{2a_1a_2t}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.21}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_2=\int_0^\infty\psi(z,x-x_0,y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_2)\times$$

$$\times\exp\left[-\left(z-\frac{|x_0-\xi|\,|x-x_0|}{4a_1a_2tz}\right)^2\right]\frac{|x_0-\xi|^2\,|x-x_0|}{8a_1^2a_2^2t^2z^2}dz$$

Заменяя переменное $z=\dfrac{|x_0-\xi|\,|x_0-x|}{4a_1a_2tz_1}$ и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to x_0}I_2=\frac{|x_0-\xi|}{2a_1^2t}\int_0^\infty\sqrt{\frac{(x_0-\xi)^2+4a_2^2tz^2}{(x_0\xi)^2+4a_1^2tz^2}}\times$$

$$\times\exp\left[-z^2-\frac{(y-\eta)^2}{t}\frac{a_2^2-a_1^2}{4a_1^2a_2^2\left[(x_0-\xi)^2/4a_1^2tz^2+1\right]}\right]dz$$

Нижняя грань функции

$$\frac{a_2^2-a_1^2}{4a_1^2a_2^2\left[(x_0-\xi)^2/4a_1^2tz^2+1\right]}$$

равна γ. Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0}|I_2|\leqslant M_1\frac{|x_0-\xi|}{t}\exp\left(-\frac{\gamma(y-\eta)^2}{t}\right) \tag{2.22}$$

И, наконец,

$$I_3=\int_0^\infty\psi_x'(z,x-x_0,y-\eta,t;\ a_1,a_2)\exp\left[-\left(z-\frac{|x_0-\xi|\,|x_0-x|}{4a_1a_2tz}\right)^2\right]dz$$

имеет предел, для которого справедливо (2.17). Таким образом,

$$|\Phi_{1x}'(\pm0,x_0-\xi,y-\eta,t;\ a_1,a_2)|\leqslant$$

$$\leqslant\left(A\sqrt{t}+B\frac{(y-\eta)^2}{\sqrt{t}}+C\frac{|x_0-\xi|}{t}\right)\exp\left(-\frac{\gamma(y-\eta)^2}{t}\right) \tag{2.23}$$

где γ, A, B и C — некоторые постоянные.

§ 3 Интегральное представление решения. Обозначим через

$D_\varepsilon^{(1)}$ — область $(-\infty < \xi < x_0,\ -\infty < \eta < +\infty,\ 0 < \tau \leqslant t - \varepsilon)$

$D_\varepsilon^{(2)}$ — область $(x_0 < \xi < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty,\ 0 < \tau \leqslant t - \varepsilon)$

Поверхность, ограничивающую область $D_\varepsilon^{(i)}$, обозначим через $S_\varepsilon^{(i)}$. Область, к которой стремится область $D_\varepsilon^{(i)}$ при $\varepsilon \to 0$, обозначим через $D^{(i)}$, а соответствующую поверхность через $S^{(i)}$. Пусть

$$F_i(u) = a_i^2 \triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad G_i(v) = a_i^2 \triangle v + \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (i = 1, 2)$$

Имеем следующее тождество:

$$vF_i(u) - uG_i(v) = a_i^2 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial t}(uv)$$

Предполагая, что u и v удовлетворяют условиям (1.5), и применяя к этому тождеству формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\iiint_{D_\varepsilon^{(i)}} [vF_i(u) - uG_i(v)]\, d\xi\, d\eta = \tag{3.1}$$

$$= \iint_{S_\varepsilon^{(i)}} a_i^2 \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) d\eta\, d\tau + \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\tau\right] - uv\, d\xi\, d\eta$$

Предположим, что существует решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5).

В тождестве (3.1) вместо u поставим решение нашей задачи, а вместо v — функцию $G(x-\xi,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_i)$; тогда получим

$$\iint_{S_\varepsilon^{(i)}} a_i^2 \left[G\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{x-\xi}{2a_i^2(t-\tau)}G\right] d\eta\, d\tau + \tag{3.2}$$

$$+ \iint_{S_\varepsilon^{(i)}} a_i^2 \left[G\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{y-\eta}{2a_i^2(t-\tau)}G\right] d\xi\, d\eta + \iint_{S_\varepsilon^{(i)}} uG\, d\xi\, d\eta = 0$$

Первые два интеграла обращаются в нуль на плоскостях $\tau = 0$, $\tau = t - \varepsilon$, так как $d\tau = 0$. Кроме того, второй и третий интегралы также равны нулю на плоскости $\xi = x_0$.

Таким образом, для области $D_\varepsilon^{(1)}$ формула (3.2) принимает следующий вид:

$$\int_0^{t-\varepsilon} dt \int_{-\infty}^{+\infty} a_1^2 \left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi = x_0 - 0} G(x-\xi,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_1) - \right.$$

$$\left. - u\bigg|_{\xi = x_0 - 0} \frac{x-\xi}{2a_1^2(t-\tau)} G(x-\xi,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_1)\right] d\eta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} u\bigg|_{\tau=0} G(x-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_1)\, d\xi -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} u\bigg|_{\tau = t-\varepsilon} G(x-\xi,\ y-\eta,\ \varepsilon;\ a_1)\, d\xi = 0$$

На основании формулы (2.5) последний интеграл стремится к $u(x, y, t)$ при $\varepsilon \to 0$ и когда точка (x, y, t) находится в области $D^{(1)}$. Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, из последнего равенства получаем

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, t; a)\, d\xi\, d\eta - \tag{3.3}$$

$$-\int_0^t \frac{(x-x_0)\,d\tau}{2(t-\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_0, \eta, \tau) G(x-x_0, y-\eta, t-\tau; a_1)\, d\eta +$$

$$+ a_1^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0-0, \eta, \tau) G(x-x_0, y-\eta, t-\tau; a_1)\, d\eta$$

Таким образом, решение поставленной задачи в области $D^{(1)}$, если оно существует, может быть выражено формулой (3.3). Аналогично можно найти решение в области $D^{(2)}$, которое выражается следующей формулой:

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, t; a_2)\, d\xi + \tag{3.4}$$

$$+\int_0^t \frac{(x-x_0)\,d\tau}{2(t-\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_0, \eta, \tau) G(x-x_0, y-\eta, t-\tau; a_2)\, d\eta -$$

$$- a_2^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0+0, \eta, \tau) G(x-x_0, y-\eta, t-\tau; a_2)\, d\eta$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что функции, определяемые формулами (3.3) и (3.4), соответственно удовлетворяют уравнениям (1.1). Кроме того, они удовлетворяют начальному условию (1.2).

Теперь определим функции $u(x_0, \eta, \tau)$, $u_x'(x_0-0, \eta, \tau)$ и $u_x'(x_0+0, \eta, \tau)$ при помощи условий (1.3) и (1.4).

Переходя к пределу, когда $x \to x_0$, и учитывая равенство (2.6), из равенств (3.3) и (3.4) имеем

$$\frac{u(x_0, y, t)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi, \eta) G(x_0-\xi, y-\eta, t; a_1)\, d\xi +$$

$$+ a_1^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0-0, \eta, \tau) G(0, y-\eta, t-\tau; a_1)\, p\eta \tag{3.5}$$

$$\frac{u(x_0, y, t)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi, \eta) G(x_0-\xi, y-\eta, t; a_2)\, d\xi -$$

$$- a_2^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0+0, \eta, \tau) G(0, y-\eta, t-\tau; a_2)\, d\eta \tag{3.6}$$

Система уравнений (3.5), (3.6), (1.3) и (1.4) дает возможность определить функции $u(x_0, y, t)$, $u_x'(x_0-0, y, t)$ и $u_x'(x_0+0, y, t)$.

§ 4. Решение системы интегральных уравнений. Из двух равенств (3.5) и (3.6), исключая $u(x_0, y, t)$, получим

$$a_1^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 - 0, \eta, \tau)\, G(0, y - \eta, t - \tau; a_1)\, d\eta +$$
$$+ a_2^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 + 0, \eta, \tau)\, G(0, y - \eta, t - \tau; a_2)\, d\eta =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, G(x_0 - \xi, y - \eta, t; a_2)\, d\xi -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi, \eta)\, G(x_0 - \xi, y - \eta, t; a_1)\, d\xi \tag{4.1}$$

В последнем равенстве вместо t и y подставим соответственно t_1 и η_1. Умножив равенство (4.1) на $(t - t_1)^{-1} G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1)$ и интегрируя по η_1 от $-\infty$ до $+\infty$, а по t_1 от 0 до t, получим

$$\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1^2 G(x - x_0, y - \eta, t_1 - t_1; a_1)}{t - t_1}\, d\eta_1 \int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 - 0, \eta, \tau) \times$$
$$\times G(0, \eta_1 - \eta, t_1 - \tau; a_1)\, d\eta +$$
$$+ \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_2^2 G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1)}{t - t_1}\, d\eta_1 \int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 + 0, \eta, \tau) \times$$
$$\times G(0, \eta_1 - \eta, t_1 - \tau; a_2)\, d\eta =$$
$$= \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1)}{t - t_1}\, d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, G(x_0 - \xi, \eta_1 - \eta, t_1; a_2)\, d\xi -$$
$$- \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1)}{t - t_1}\, d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi, \eta)\, G(x_0 - \xi, \eta_1 - \eta, t_1; a_1)\, d\xi \tag{4.2}$$

Переставляя интегралы, имеем

$$a_1^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 - 0, \eta, \tau)\, d\eta \int_\tau^t \frac{dt_1}{t - t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1) \times$$
$$\times G(0, \eta_1 - \eta, t_1 - \tau; a_1)\, d\eta_1 +$$
$$+ a_2^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0 + 0, \eta, \tau)\, d\eta \int_\tau^t \frac{dt_1}{t - t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1) \times$$
$$\times G(0, \eta_1 - \eta, t_1 - \tau; a_2)\, d\eta_1 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, d\xi \int_0^t \frac{dt_1}{t - t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1) \times$$
$$\times G(x_0 - \xi, \eta_1 - \eta, t_1; a_2)\, d\eta_1 -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi, \eta)\, d\xi \int_0^t \frac{dt_1}{t - t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_0, y - \eta_1, t - t_1; a_1) \times$$
$$\times G(x_0 - \xi, \eta_1 - \eta, t_1; a_1)\, d\eta_1 \tag{4.3}$$

На основании формул (2.8), (2.11), (2.18) и (2.19) можно переписать последнее равенство следующим образом:

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x'(x_0-0,\eta,\tau)}{4\pi(t-\tau)|x-x_0|}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-\eta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right]d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x'(x_0+0,\eta,\tau)}{2\pi^{3/2}(t-\tau)|x-x_0|}\Phi(x-x_0,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_1,a_2)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}-\frac{(y-\eta)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right]d\eta =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{2a_2^2\,\pi^{3/2}t\,|x-x_0|}\Phi_1(x-x_0,\ x_0-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_1,a_2)\times$$

$$\times\exp\left[-\left(\frac{|x_0-\xi|}{2a_2\sqrt{t}}+\frac{|x-x_0|}{2a_2\sqrt{t}}\right)^2-\frac{(y-\eta)^2}{4a_2^2\sqrt{t}}\right]d\xi -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} \frac{f(\xi,\eta)}{4a_1^2\pi t\,|x-x_0|}\exp\left[-\frac{(|x-x_0|+|x_0-\xi|)^2+(y-\eta)^2}{4a_1^2t}\right]d\xi \qquad (4.4)$$

После умножения $2a_1|x-x_0|$ дифференцируем по x, а затем перейдем к пределу, когда $x\to x_0-0$. Тогда

$$a_1u_x'(x_0-0,\ y,\ t)+a_2u_x'(x_0+0,\ y,\ t)+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x'(x_0+0,\ \eta,\ \tau)\,K(y-\eta,\ t-\tau)\,d\eta = F(y,\ t) \qquad (4.5)$$

где

$$K(y-\eta,\ t-\tau)=\frac{a_1}{\pi^{3/2}(t-\tau)}\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right)\Phi_x'(-0,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_1,\ a_2)$$

(4.6)

$$F(y,t)=-\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\xi-x_0}{a_2t}G(x_0-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_2)\,f(\xi,\eta)\,d\xi -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{x_0} \frac{x_0-\xi}{a_1t}G(x_0-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_1)\,f(\xi,\eta)\,d\xi +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{x_0}^{+\infty} \frac{4a_1}{\sqrt{\pi}}G(x_0-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_2)\,\Phi_{1x}'(-0,\ x_0-\xi,\ y-\eta,\ t;\ a_1,a_2)\,f(\xi,\eta)\,d\xi$$

Таким образом, в результате получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Из равенств (1.4) и (4.5) исключим $u_x'(x_0-0,\ y,\ t)$ и обозначим $u'(x_0+0,\ y,\ t)$ через $\varphi(y,\ t)$, тогда (4.7)

$$\varphi(y,t)+\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta,\tau)\,K(y-\eta,\ t-\tau)\,d\eta\,d\tau=\lambda F(y,t)\ \left(\lambda=\frac{k_1}{a_1k_2+a_2k_1}\right)$$

§ 5. Решение интегрального уравнения. Решение уравнения (4.7) будем искать в виде следующего ряда:

$$\varphi(y, t) = \lambda\varphi_1(y, t) + \lambda^2\varphi_2(y, t) + \cdots + \lambda^{n+1}\varphi_n(y, t) + \cdots \tag{5.1}$$

Тогда

$$\varphi_0(y, t) = F(y, t) \tag{5.2}$$

$$\varphi_n(y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(y-\eta, t-\tau)\,\varphi_{n-1}(\eta, \tau)\,d\eta\,d\tau \tag{5.3}$$

Докажем сходимость ряда (5.1). Непосредственным вычислением можно показать, что

$$|\varphi_0(y, t)| = |F(y, t)| < \frac{P}{\sqrt{t}} \tag{5.4}$$

где P — некоторое положительное число. Далее, имеем

$$|\varphi_1(y, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |K(y-\eta, t-\tau)|\frac{P}{\sqrt{\tau}}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{P\,d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_0}{\sqrt{t-\tau}} + B_0\frac{(y-\eta)^2}{(t-\tau)^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{\gamma_0(y-\eta)^2}{t-\tau}\right)d\eta =$$

$$= \frac{2P\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma_0}}\left(A_0 + \frac{B_0}{2\gamma_0}\right)\sqrt{t} \tag{5.5}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{4a_2^2} + \gamma > 0, \qquad A_0 = \frac{a_1}{\pi^{3/2}}A, \qquad B_0 = \frac{a_1}{\pi^{3/2}}B$$

Пусть

$$|\varphi_n(y, t)| \leqslant B_n t^{1/2(2n-1)} \tag{5.6}$$

Тогда

$$|\varphi_{n+1}(y, t)| \leqslant B_n\frac{2}{2n+1}\,t^{1/2(2n+1)} \tag{5.7}$$

Отсюда равномерная сходимость ряда (5.1) совершенно очевидна.

После определения функции $u_x'(x_0+0, y, t)$ функция $u_x'(x_0-0, y, t)$ определяется из равенства (1.4), а $u(x_0, y, t)$ определяется по формуле (3.5).

Подставляя в формулы (3.3) и (3.4) найденные $u_x'(x_0+0, y, t)$, $u_x'(x_0-0, y, t)$ и $u(x_0, y, t)$, получаем решение поставленной задачи.

§ 6. Частный случай. Допустим, функция $f(x, y)$ не зависит от y, т. е. $f(x, y) = f(x)$. Легко можно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x'(\pm 0, y-\eta, t-\tau; a_1, a_2)\,d\eta = 0 \tag{6.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{1x}'(\pm 0, y-\eta, t-\tau; a_1, a_2)\,d\eta = 0 \tag{6.2}$$

В правой части (4.5) после интегрирования по η имеем (6.3)

$$F(y,t) = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{(x_0-\xi)f(\xi)}{2\sqrt{\pi}\,a_2^2\,t^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a_2^2 t}\right]d\xi + \int_{-\infty}^{x_0} \frac{(\xi-x_0)f(\xi)}{2\sqrt{\pi}\,a_1^2\,t^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x_0-\xi)^2}{4a_1^2 t}\right]d\xi$$

А последнее слагаемое равно нулю в силу равенства (6.2). Из этого видно, что функция $F(y, t)$ также не зависит от y. Интегрируя уравнение (4.7) методом последовательного приближения, получаем

$$\varphi(y, t) = \lambda\varphi_0(y, t) \tag{6.4}$$

так как $\varphi_n(y, t) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ в силу (6.1). Таким образом,

$$u_x'(x_0 + 0, y, t) = \frac{k_1}{a_1 k_2 + a_2 k_1}\left\{\int_{x_0}^{+\infty} \frac{(x_0 - \xi) f(\xi)}{2\sqrt{\pi}\, a_2^2 t^{3/2}} \exp\left[\frac{(x_0 - \xi)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x_0} \frac{(\xi - x_0)}{2\sqrt{\pi}\, a_1^2 t^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4a_1^2 t}\right] d\xi\right\} \tag{6.5}$$

Из формулы (6.5) видим, что функция $u_x'(x_0 + 0, y, t)$ не зависит от y. После интегрирования правой части (3.5) по η имеем

$$u(x_0, y, t) = \frac{1}{a_1\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4a_1^2 t}\right) d\xi + \frac{a_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_x'(x_0 - 0, \tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau \tag{6.6}$$

Отсюда видно, что функция $u(x_0, y, t)$ также не зависит от y. Таким образом, в формуле (3.3) правую часть можно интегрировать по η. Тогда

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a_1^2 t}\right] d\xi -$$

$$- \frac{x - x_0}{4a_1\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(x_0, \tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau)}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{a_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_x'(x_0 - 0, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau)}\right] d\tau \tag{6.7}$$

Для нахождения решения нужно определить два последних слагаемых. С этой целью в равенстве (6.6) вместо t подставим τ_1 и умножим на:

$$\frac{x - x_0}{4a_1\sqrt{\pi}} \frac{1}{(t - \tau_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau_1)}\right)$$

а затем интегрируем по τ_1 от 0 до t. Тогда

$$\frac{x - x_0}{4a_1\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(x_0, \tau_1)}{(t - \tau_1)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau_1)}\right] d\tau_1 = \tag{6.8}$$

$$= \frac{x - x_0}{4a_1^2 \pi} \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_0^t \frac{f(\xi)}{\sqrt{\tau_1}\,(t - \tau_1)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4a_1^2 \tau_1} - \frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau)}\right] d\tau_1 +$$

$$+ \frac{x - x_0}{4\pi} \int_0^t \frac{u_x'(x_0 - 0, \tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau_1 - \tau}\,(t - \tau_1)^{3/2}} \int_\tau^t \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4a_1^2 (t - \tau_1)}\right) d\tau_1$$

Но, как известно,

$$\int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t - \tau}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\tau} - \frac{\beta^2}{(t - \tau)}\right) d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(|\alpha| + |\beta|)^2}{t}\right) \tag{6.9}$$

На основании последней формулы равенство (6.8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{x-x_0}{2a_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(x_0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)d\tau = \tag{6.10}$$
$$= -\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x_0} f(\xi)\exp\left[-\frac{(|x_0-\xi|+|x-x_0|)^2}{4a_1^2t}\right]d\xi -$$
$$-\frac{a_1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u_x'(x_0-0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)d\tau$$

Аналогично из равенства (3.5) получаем

$$\frac{x-x_0}{4a_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(x_0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)d\tau = \tag{6.11}$$
$$= -\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{+\infty} f(\xi)\exp\left[-\frac{(a_1|x_0-\xi|+a_2|x-x_0|)^2}{4a_1^2a_2^2t}\right]d\xi +$$
$$+\frac{a_1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(x_0+0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)d\tau$$

Исключая из двух уравнений (6.10) и (6.11) выражение, содержащее $u_x'(x_0\pm 0,\tau)$, имеем

$$\frac{x-x_0}{4a_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(x_0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)d\tau = \tag{6.12}$$
$$= -\frac{1}{a_1k_2+a_2k_1}\left\{\frac{a_2k_1}{2a_1\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x_0} f(\xi)\exp\left[-\frac{(|x_0-\xi|+|x-x_0|)^2}{4a_1^2t}\right]d\xi +\right.$$
$$\left.+\frac{a_1k_2}{2a_2\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{+\infty} f(\xi)\exp\left[-\frac{(a_1|x_0-\xi|+a_2|x-x_0|)^2}{4a_1^2a_2^2t}\right]d\xi\right.$$

Из равенств (6.10) и (6.12)

$$-\frac{(x-x_0)}{4a_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(x_0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right]d\tau +$$
$$+\frac{a_1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u_x'(x_0-0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right]d\tau =$$
$$= -\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x_0} f(\xi)\exp\left[-\frac{(|x_0-\xi|+|x-x_0|)^2}{4a_1^2t}\right]d\xi +$$
$$+\frac{1}{a_1k_2+a_2k_1}\left\{\frac{a_2k_1}{a_1\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x_0} f(\xi)\exp\left[-\frac{(|x_0-\xi|+|x-x_0|)^2}{4a_2^2t}\right]d\xi +\right.$$
$$\left.+\frac{a_1k_2}{a_2\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{+\infty} f(\xi)\exp\left[\frac{(a_1|x_0-\xi|+a_2|x-x_0|)^2}{4a_1^2a_2^2t}\right]d\xi\right\}$$

Подставляя найденное выражение в (6.7), получаем решение нашей задачи, когда функция $f(x, y)$ не зависит от y:

для $x < x_0$

$$u = \frac{1}{2a_1 \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}\right] d\xi -$$

$$- \frac{1}{2a_1 \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left[-\frac{(|x_0 - \xi| + |x - x_0|)^2}{4a_1^2 t}\right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \left\{ \frac{a_2 k_1}{a_1 \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left[-\frac{(|x_0 - \xi)| + |x - x_0|)^2}{4a_1^2 t}\right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 k_2}{a_2 \sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(a_1 |x_0 - \xi| + a_2 |x - x_0|)^2}{4a_1^2 a_2^2 t}\right] d\xi \right\} \tag{6.13}$$

для $x > x_0$

$$u = \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi -$$

$$- \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(|x_0 - \xi| + |x - x_0|)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \left\{ \frac{a_1 k_2}{a_2 \sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(|x_0 - \xi| + |x - x_0|)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2 k_1}{a_1 \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{x_0} f(\xi) \exp\left[-\frac{(a_2 |x_0 - \xi| + a_1 |x - x_0|)^2}{4a_1^2 a_2^2 t}\right] d\xi \right\} \tag{6.14}$$

В частности, когда $f(x) = c_1$ при $x < x_0$, $f(x) = c_2$ при $x > x_0$, получаем известные нам формулы [1]

$$u = c_0 - (c_0 - c_1)\, \psi\left(\frac{x_0 - x}{2a_1 \sqrt{t}}\right) \qquad \text{при} \quad x < x_0 \tag{6.15}$$

$$u = c_0 - (c_0 - c_2)\, \psi\left(\frac{x - x_0}{2a_2 \sqrt{t}}\right) \qquad \text{при} \quad x > x_0 \tag{6.16}$$

где

$$c_0 = \frac{c_1 k_1 a_2 + c_2 k_2 a_1}{k_1 a_2 + k_2 a_1}, \qquad \psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Поступила 2 III 1953

Ростовский государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
2. Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. ГТТИ, 1947.
3. Швец М. Е. О нагревании неоднородного стержня. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.
4. Мюнц Г. Интегральные уравнения, т. I. ГТТИ, 1934.
5. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. I. ГТТИ, 1933.