Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ В ЦЕЛОМ И ПОСТРОЕНИЕ С ЛЮБОЙ ТОЧНОСТЬЮ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Плисс

(Ленинград)

§ 1. В работе [1] Н. П. Еругина рассмотрена система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + a'y, \qquad \frac{dy}{dt} = b'x + c'y \tag{1.1}$$

где a', b' c' — постоянные, а $f(x)$ непрерывна и подчинена условиям

$$x[f(x) + c'x] < 0, \qquad x[c'f(x) - a'b'x] > 0 \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0 \tag{1.2}$$

В работе показано, что тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом во всех случаях, кроме одного. Этот исключительный случай представляется тогда, когда $c'^2 + a'b' = 0$ и

$$\text{либо} \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x [c'f(x) - a'b'x]\, dx < +\infty \tag{1.3}$$

$$\text{либо} \qquad \lim_{x \to -\infty} \int_0^x [c'f(x) - a'b'x]\, dx < +\infty \tag{1.4}$$

При этом, если реализуется (1.3), то должно быть

$$\overline{\lim}\, [c'f(x) - a'b'x] < +\infty \qquad \text{при} \quad x \to +\infty$$

а если (1.4), то

$$\underline{\lim}\, [c'f(x) - a'b'x] > -\infty \qquad \text{при} \quad x \to -\infty$$

Разберем подробнее этот случай. В работе [2] показано, что система (1.1) при $c'^2 + a'b' = 0$ линейной заменой переменной $y = a'y - c'x$ приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = y - \varphi(x), \qquad \frac{dy}{dt} = c\varphi(x) \tag{1.5}$$

Условия (1.2) переходят в условия

$$c < 0, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad x\varphi(x) > 0 \qquad (x \neq 0) \tag{1.6}$$

а неравенства (1.3) и (1.4) соответственно в неравенства

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \varphi(x)\, dx < +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \int_0^x \varphi(x)\, dx < +\infty$$

Кроме того, предположим, что система (1.5) удовлетворяет условиям существования и единственности при любых начальных значениях (x, y).

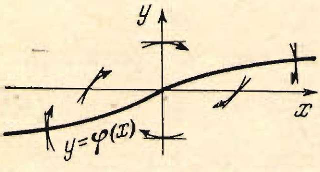
Для определенности будем считать, что

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = D < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_0^{-\infty} \varphi(x)\,dx \tag{1.7}$$

Кроме того, предполагаем, что

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = a < +\infty \qquad \text{при } x \to +\infty \tag{1.8}$$

Основной целью предлагаемых рассуждений является нахождение границы области асимптотической устойчивости для системы (1.5) в тех случаях, когда эта граница существует. Как показал Н. П. Еругин [2], эта граница состоит из целых траекторий системы (1.5), их мы и будем отыскивать. Попутно мы выясним качественную картину поведения траекторий за пределами области устойчивости.



Фиг. 1

В работе [1] доказано, что траектория системы (1.5), пересекающая положительную полуось оси x, входит при $t \to +\infty$ в начало координат. Известно [2], что система (1.5) не имеет периодических решений.

Легко видеть, что система (1.5) определяет следующее поле направлений (фиг. 1). Все движения пересекают ось x под одним и тем же углом. На кривой $y = \varphi(x)$ абсцисса всякого движения достигает максимума при $x > 0$ и минимума при $x < 0$. На оси y ордината достигает максимума при $y > 0$ и минимума при $y < 0$.

Обратим внимание на два доказанных Н. П. Еругиным факта (см. доказательство теоремы 28.1 работы [2]).

Замечание 1. Для всякой неустойчивой положительной полутраектории системы (1.5) в первом координатном угле выполняется

$$y(t) \geqslant \varphi(x(t)) \tag{1.9}$$

Замечание 2. Если неустойчивая положительная полутраектория системы (1.5) целиком лежит ниже оси x, то в третьем координатном угле для нее выполняется

$$y(t) \leqslant \varphi(x(t)) \tag{1.10}$$

§ 2. Докажем несколько теорем относительно движений, определяемых системой (1.5).

Теорема 1. Если положительно неустойчивая траектория $M(t)$ системы (1.5) имеет точки, лежащие в верхней полуплоскости, то вдоль нее

$$\lim x = +\infty, \qquad \lim y = b \qquad \text{при } t \to +\infty \tag{2.1}$$

при этом

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = a \leqslant b < +\infty \qquad \text{при } x \to +\infty$$

Доказательство. Пусть при $t = t_0$ $M(t)$ проходит через точку (x_0, y_0), где $y_0 > 0$. Пусть $x_0 < 0$. Тогда, как видно из системы (1.5), x и y возрастают вместе с t при всех $t > t_0$ и таких, что траектория остается во втором координатном угле. При этом не может быть, чтобы при всех $t > t_0$ было $x < 0$. Действительно, так как траектория $M(t)$ неустойчива и $dy/dt > 0$, то при $x < 0$ должно оказаться $y \to +\infty$, но тогда из (1.5) следует, что $dx/dt \to +\infty$, а это несовместимо с выполнением при всех $t > t_0$ неравенства $x < 0$.

Следовательно, траектория, начинающаяся при $t=t_0$ в точке (x_0, y_0), должна пересечь ось y при конечном времени, т. е. попасть в первый координатный угол.

В первом координатном угле вдоль $M(t)$ выполняются неравенства

$$\frac{dy}{dt}<0, \qquad \frac{dx}{dt}\geqslant 0 \tag{2.2}$$

Это следует из (1.9), и

$$\frac{dx}{dt}=y-\varphi(x)<B \tag{2.3}$$

где B — достаточно большая положительная постоянная, это следует из (2.2); кроме того, в первом координатном угле для $M(t)$ справедливо неравенство $y>0$, так как неустойчивые траектории не пересекают положительную полуось x.

Попав в первый координатный угол, $M(t)$ оттуда не выходит, что следует из неравенств (2.2) и из $y>0$. Но $M(t)$ — неустойчивая траектория; следовательно, x вдоль нее должен стремиться к бесконечности, так как y ограничен и выполняется второе неравенство (2.2); в силу (2.3) это возможно лишь при $t\to+\infty$. Таким образом, доказано, что $\lim x=+\infty$ вдоль $M(t)$ при $t\to+\infty$.

Второе из равенств (2.1) вытекает из $y>0$ и первого неравенства (2.2).

Осталось показать, что $b\geqslant a$. Предположим обратное, что $b<a$. Тогда по определению чисел a и b и в силу первого неравенства (2.2) и первого из равенств (2.1) найдется такое t_1, что на $M(t)$ окажется $y(t_1)<\varphi(x(t_1))$; а это невозможно в силу (1.9). Теорема доказана. Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Если положительно неустойчивая траектория целиком лежит ниже оси x, то вдоль нее выполняется

$$\lim x=-\infty, \qquad \lim y=b_1 \qquad \text{при } t\to+\infty \tag{2.4}$$

при этом

$$-\infty<b_1\leqslant\varliminf\varphi(x)=a_1 \qquad \text{при } x\to-\infty$$

Заметим, что попутно установлен факт продолжимости всех решений на все положительные моменты времени до $+\infty$.

Лемма. Если

$$\lim\int_0^x\varphi(x)\,dx=D<+\infty, \qquad \varlimsup\varphi(x)=a<+\infty \qquad \text{при } x\to+\infty$$

то по любому $y_0>a$ можно найти такое $x_0>0$, что траектория $M(t)$ системы (1.3), проходящая при $t=t_0$ через точку (x_0, y_0), уходит в бесконечность при $t\to+\infty$.

Доказательство. Положим $\frac{1}{3}(y_0-a)=\varepsilon$. По свойству наибольшего предела функции найдется такое A, что $\varphi(x)<a+\varepsilon$ при $x>A$. В силу непрерывной зависимости решения от аргумента t можно утверждать, что найдется такое $T>t_0$, что при $t_0\leqslant t\leqslant T$ окажется $y_0-y<\varepsilon$.

Тогда из первого уравнения системы (1.5) следует, что для таких t

$$\frac{dx}{dt} > \varepsilon \tag{2.5}$$

Заменим второе уравнение системы (1.5) соотношением

$$y - y_0 = c\int_{t_0}^{t} \varphi(x)\,dt \tag{2.6}$$

Так как при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется (2.5), то для таких t можем написать

$$y - y_0 = c\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\frac{dt}{dx}\,dx$$

Отсюда можно заключить, что при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ будет

$$y_0 - y < -\frac{c}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \tag{2.7}$$

Но интеграл справа в неравенстве (2.7) по условию сходится, следовательно, найдется такое $x_0 > A$, что

$$-\frac{c}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx < \varepsilon \qquad \text{при} \quad x > x_0 \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что при x_0, удовлетворяющем неравенству (2.8), в качестве T можно взять $+\infty$.

Действительно, предположим, напротив, что этого сделать нельзя; иными словами, предположим, что найдется такое t_1, что

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = \varepsilon \tag{2.9}$$

Относительно t_1 предположим еще, что это первая такая точка, т. е. что при $t_0 \leqslant t < t_1$ выполняется неравенство (2.5).

Тогда из предыдущих рассуждений ясно, что $y_0 - y < \varepsilon$ при $t = t_1$; но тогда не может быть выполнено (2.9); следовательно, наше предположение неверно, а потому (2.5) должно быть выполнено при всех $t > t_0$. А отсюда вытекает, что $\lim x = +\infty$ при $t \to +\infty$ и лемма, таким образом, доказана.

Теорема 3. Если

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = D < +\infty, \qquad \overline{\lim_{x\to+\infty}}\, \varphi(x) = a < +\infty$$

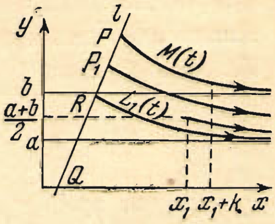
то существует траектория $L_1(t)$ такая, что вдоль нее

$$\lim x = +\infty, \qquad \lim y = a \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.10}$$

и эта траектория единственна.

Доказательство. 1. Для доказательства существования траектории $L_1(t)$ выберем произвольное число $y_0 > a$; по этому числу согласно лемме найдется такое $x_0 > 0$, что проходящая через точку $P(x_0, y_0)$ траектория $M(t)$ уходит в бесконечность при $t \to +\infty$. Если при этом вдоль $M(t)$ оказывается $\lim y = a$ при $t \to \infty$, то $M(t)$ и есть искомая $L_1(t)$.

Пусть $y \to b > a$ вдоль $M(t)$ при $t \to +\infty$. Проведем через точку P прямую l с положительным конечным угловым коэффициентом, но таким, чтобы точка Q пересечения прямой l с осью x имела положительную абсциссу. Тогда любая неустойчивая траектория может иметь лишь одну общую точку с прямой l (фиг. 2). Назовем точку отрезка PQ точкой типа P, если она лежит ниже P и если траектория, через нее проходящая, неустойчива, и покажем, что множество таких точек не пусто. Действительно, как следует из леммы, по ординате $\frac{1}{2}(b+a)$ можно найти такую абсциссу x_1, что траектория $M_1(t)$, проходящая через точку $\left(x_1, \frac{1}{2}(b+a)\right)$, неустойчива. По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных на отрезке PQ найдется такая точка P_1, что траектория, проходящая через P_1 при $t = t_0$, будет обладать тем свойством, что на интервале (t_0, T) ее абсцисса будет отличаться от абсциссы траектории $M(t)$ меньше чем на k, а ордината меньше чем на $\frac{1}{2}(b-a)$. Здесь под k понимается произвольное положительное число, а T — момент времени, в который на траектории $M(t)$ оказывается $x = x_1 + k$. Но $M_1(t)$ уходит в бесконечность; следовательно, вдоль нее выполняется (1.9), поэтому траектория, проходящая через P_1, тоже уходит в бесконечность.



Фиг. 2

Действительно, она может не уйти в бесконечность лишь при условии, что при некотором t на ней окажется $dx/dt < 0$, т. е. $y < \varphi(x)$, а это возможно только в том случае, если в один из предыдущих моментов произошло пересечение траекторий.

Итак, показано, что множество точек типа P не пусто. Кроме того, оно ограничено снизу, например, точкой Q. Значит, существует точка R, являющаяся точной нижней границей множества точек типа P.

Проведем через точку R траекторию $L_1(t)$. Эта траектория и будет искомой. Действительно, предположим, что она неустойчива и вдоль нее $\lim y > a$ при $t \to \infty$; тогда, повторяя предыдущие рассуждения, можно построить точку типа P, лежащую ниже точки R, что противоречит определению последней. Пусть $L_1(t)$ — положительно устойчивая траектория, но это противоречит теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных, ибо в любой сколь угодно малой окрестности точки R существуют точки, через которые проходят неустойчивые траектории с монотонно возрастающей абсциссой. Таким образом, существование траектории $L_1(t)$ доказано.

2. Для доказательства единственности траектории $L_1(t)$ поделим второе уравнение системы (1.5) на первое, тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\varphi(x)}{y - \varphi(x)} \tag{2.11}$$

Предположим, что существуют две траектории типа $L_1(t)$; пусть их ординаты отличаются при $x = x_0 > 0$ на ε. Но, как следует из (2.11) и (1.9), угловой коэффициент нижней из них меньше углового коэффициента верхней при всех $x > x_0$.

Следовательно, при $x > x_0$ ординаты двух таких кривых отличаются больше чем на ε при одинаковых абсциссах x, а потому вдоль обеих траекторий не может выполняться (2.10). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Если

$$\int_0^{-\infty} \varphi(x)\,dx = D_1 < +\infty, \qquad \underline{\lim}\, \varphi(x) = a_1 > -\infty \qquad \text{при } x \to -\infty$$

то существует траектория $L_2(t)$ такая, что вдоль нее выполняется

$$\lim x = -\infty, \qquad \lim y = a_1 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.12}$$

и эта траектория единственна.

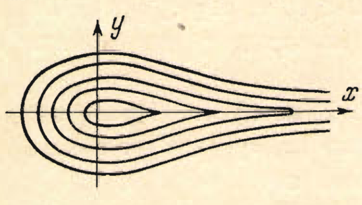
§ 3. Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(x)$ такова, что

$$\int_0^{-\infty} \varphi(x)\,dx = +\infty$$

И. Г. Малкин показал [5], что семейство кривых

$$-2c\int_0^x \varphi(x)\,dx + y^2 = k^2 \tag{3.1}$$

где k^2 — параметр, пересекается траекториями системы (1.5) таким образом, что вдоль каждой траектории параметр k^2 убывает с возрастанием времени.



Фиг. 3

В рассматриваемом случае семейство (3.1) имеет такой вид, как показано на фиг. 3, т. е. все кривые семейства замыкаются на отрицательной полуоси оси x.

Поэтому в рассматриваемом случае положительно неустойчивая траектория на бесконечности может вести себя лишь следующим образом:

$$\lim x = +\infty, \qquad \lim y = b \geqslant a \qquad \text{при } t \to \infty \tag{3.2}$$

Покажем, что траектория $L_1(t)$, как и всякая другая неустойчивая траектория, пересекает ось y.

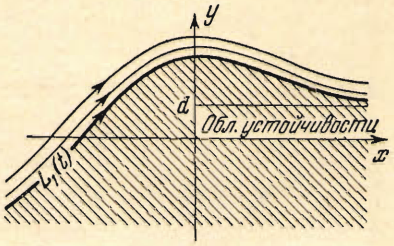
Действительно, так как единственное состояние равновесия нашей системы — начало координат — устойчиво в смысле Ляпунова (см. работу [1]), то $L_1(t)$ уходит на бесконечность при убывании времени (см. теорему 1.1 работы [2]). В первом координатном угле x убывает, а y возрастает с убыванием времени.

Если предположить, что траектория $L_1(t)$ остается в первом координатном угле, т. е. не пересекает ось y, то должно оказаться, что $y \to +\infty$

при убывании времени, а тогда $dx / dt \to +\infty$ и невозможно, чтобы при всех t было $x > 0$; следовательно, $L_1(t)$ пересекает ось y.

Теорема 5. Траектория $L_1(t)$ в рассматриваемом случае делит всю плоскость на области устойчивости и неустойчивости.

Доказательство. Все траектории, имеющие начальные точки вне заштрихованной на фиг. 4 области, неустойчивы, так как эти траектории не могут пересечь $L_1(t)$, чтобы войти в начало координат. Все траектории, имеющие точки в заштрихованной области, устойчивы. Действительно, пусть траектория $N(t)$ лежит внутри заштрихованной области и неустойчива, тогда вдоль нее должны выполняться соотношения (3.2). Но в силу теоремы единственности решения системы дифференциальных уравнений и в силу единственности траектории $L_1(t)$ (см. теорему 3 предыдущего параграфа) это невозможно. Теорема доказана.



Фиг. 4

Таким образом, траектория $L_1(t)$ и есть искомая граница области устойчивости.

Для нахождения этой траектории достаточно указать хотя бы одну из ее точек. Покажем, как можно заключить точку ее пересечения с осью y в сколь угодно узкий сегмент этой оси. Пусть требуется заключить искомую точку в сегмент шириной $\varepsilon > 0$. По этому ε найдем такое x_0, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$-c \int_{x_0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx < \frac{1}{9}\varepsilon^2 \tag{3.3}$$

и чтобы при всех $x > x_0$ было $\varphi(x) < a + \frac{1}{3}\varepsilon$. Тогда по лемме траектория $N(t)$, проходящая через точку $(x_0, a+\varepsilon)$, неустойчива; кроме того, как показывалось, она пересекает ось y. Построим ее до пересечения с осью y в точке y_{20}. Тогда искомая точка y_{10} пересечения траектории $L_1(t)$ с осью y лежит в сегменте $[y_{20} - \varepsilon, y_{20}]$.

Действительно, если $N(t)$ совпадает с $L_1(t)$, то наше утверждение тривиально. Предположим, что это не так, пусть тогда ордината траектории $L_1(t)$ есть y_1, а $N(t)$ есть y_2, тогда $y_2 - y_1 < \varepsilon$ при $x = x_0$.

Составим функцию

$$g(x) = \int_0^x \left[\frac{c\varphi(x)}{y_2 - \varphi(x)} - \frac{c\varphi(x)}{y_1 - \varphi(x)}\right] dx$$

Очевидно, что $y_2 - y_1 = y_{20} - y_{10} + g(x)$, где y_{i0} есть y_i при $x = 0$, но в силу (1.9)

$$g'(x) = \frac{c\varphi(x)}{y_2 - \varphi(x)} - \frac{c\varphi(x)}{y_1 - \varphi(x)} > 0$$

следовательно, $y_{20} - y_{10} < y_2 - y_1 < \varepsilon$; значит, рассматриваемое утверждение доказано.

§ 4. Обратимся теперь к случаю, когда

$$\int_0^{-\infty} \varphi(x)\, dx = D_1 < +\infty$$

Из (1.7) вытекает, что в этом случае

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = D \leqslant D_1$$

Теорема 6. Если интегралы

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx, \qquad \int_0^{-\infty} \varphi(x)\, dx$$

сходятся и если неустойчивая траектория $M(t)$ системы (1.5) имеет точки, лежащие в нижней полуплоскости, то вдоль нее выполняется

$$\lim x = +\infty, \qquad \lim y = h \leqslant 0 \quad \text{при } t \to -\infty \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть при $t = t_0$ $M(t)$ проходит через точку (x_0, y_0), где $y_0 < 0$.

Пусть, кроме того, $x_0 < 0$ и $y_0 > \varphi(x_0)$. Как видно из системы (1.5), x и y убывают вместе с t при всех $t < t_0$ и таких, что вдоль траектории $M(t)$ остается $y > \varphi(x)$. Заметим теперь, что

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

так как в противном случае интеграл

$$\int_0^{-\infty} \varphi(x)\, dx$$

расходился бы, а это по условию не так. Следовательно, по y_0 найдется такое $x_1 < x_0$, что $\varphi(x_1) > y_0$. Тогда вдоль $M(t)$ должно быть $x \geqslant x_1$, ибо x возрастает с убыванием времени во всех точках третьего координатного угла, в которых $y < \varphi(x)$. Но $M(t)$ — неустойчивая в отрицательную сторону траектория, поэтому, если предположить, что $x(t) < 0$ вдоль $M(t)$ при всех $t < t_0$, то должно оказаться, что при убывании времени $y \to -\infty$ (так как в третьем координатном угле $dy\,/\,dt > 0$), а это несовместимо с неравенством $x < 0$ при $t < t_0$. Таким образом, траектория $M(t)$ пересекает отрицательную полуось оси y при $t = t_1$ в точке $y = y_1$, попадая в четвертый координатный угол. В четвертом координатном угле вдоль $M(t)$ выполняются неравенства

$$\frac{dy}{dt} < 0, \qquad \frac{dx}{dt} < 0, \qquad y < 0 \tag{4.2}$$

Последнее справедливо в силу того, что $M(t)$ неустойчива в положительную сторону. Кроме того, имеем

$$x = \int_{t_1}^{t} y\, dt - \int_{t_1}^{t} \varphi(x)\, dt, \qquad \int_{t_1}^{t} \varphi(x)\, dt > -\frac{y_1}{c}$$

(последнее неравенство в силу системы (1.5)); поэтому

$$x < \int_{t_1}^{t} y_1 \, dt + \frac{y_1}{c} \tag{4.3}$$

Так как $M(t)$ — отрицательно неустойчивая траектория, то в силу (4.2) должно быть $x \to +\infty$ при убывании времени. А в силу (4.3) это возможно лишь при $t \to -\infty$. Итак, первое из соотношений (4.1) доказано. Из первого и третьего неравенств (4.2) вытекает и второе соотношение (4.1). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 7. Если интегралы

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx, \qquad \int_0^{-\infty} \varphi(x)\, dx$$

сходятся и если неустойчивая траектория $M(t)$ системы (1.5) целиком лежит в верхней полуплоскости, то вдоль нее выполняется

$$\lim x = -\infty, \qquad \lim y = h_1 \geqslant 0 \quad \text{при } t \to -\infty \tag{4.4}$$

В рассматриваемом в этом параграфе случае, так же как и в предыдущем, нетрудно показать, что траектория $L_1(t)$ пересекает ось y и точка пересечения может быть заключена в сколь угодно узкий сегмент $[\alpha, \beta]$ оси y. Поэтому для любого конечного промежутка времени эта траектория может быть найдена с любой точностью.

Изучим подробнее поведение траектории $L_1(t)$ в рассматриваемом случае. С этой целью сформулируем теорему.

Теорема 8. Если интегралы

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx, \qquad \int_0^{-\infty} \varphi(x)\, dx$$

сходятся, то существует одна и только одна траектория $N_1(t)$ такая, что вдоль нее выполняется

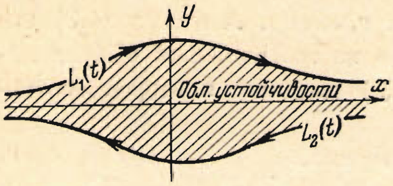
$$\lim x = -\infty, \qquad \lim y = 0 \quad \text{при } t \to -\infty \tag{4.5}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 и потому не приводится.

Так же как для $L_1(t)$, можно показать, что траектория $N_1(t)$ пересекает ось y и точка n_1 пересечения может быть заключена в сколь угодно узкий сегмент $[\gamma, \delta]$ оси y. Если удается найти столь узкие сегменты $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$, что $[\alpha, \beta]$ лежит выше $[\gamma, \delta]$, т. е. $\alpha > \delta$, то $L_1(t)$ целиком лежит выше оси x, так как x вдоль этой траектории убывает вместе с t, а $L_1(t)$ не может пересечь $N_1(t)$. В этом случае граница области устойчивости состоит из двух траекторий — траектории $L_1(t)$ и траектории $L_2(t)$, упоминаемой в теореме 4.

Прежде чем доказать это предложение, заметим, что траектория $L_2(t)$ целиком лежит ниже оси x.

Кроме того, траектория $L_2(t)$ пересекает отрицательную полуось оси y и точка пересечения l_2 может быть заключена в сколь угодно узкий сегмент $[\xi, \eta]$ оси y. Показываем теперь, что область устойчивости ограничивается траекториями $L_1(t)$ и $L_2(t)$. Действительно, любая траектория, лежащая вне заштрихованной на фиг. 5 области, неустойчива, так как траектории не пересекаются. Любая траектория, имеющая начальную точку внутри заштрихованной области, устойчива — это следует из теоремы 1, теоремы 2 и единственности траекторий $L_1(t)$ и $L_2(t)$.



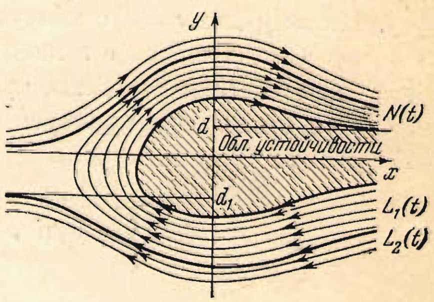
Фиг. 5

Предположим теперь, что находятся такие сегменты $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$, что $[\alpha, \beta]$ лежит ниже $[\gamma, \delta]$, т. е. $\beta < \gamma$.

Тогда в силу единственности траектории $N_1(t)$ траектория $L_1(t)$ пересекает ось x. Следовательно, по теореме 6 вдоль $L_1(t)$ выполняются соотношения (4.1).

Нетрудно видеть, что в этом случае границей области устойчивости служит траектория $L_1(t)$ (фиг. 6).

Мыслима, наконец, еще одна возможность: какими узкими ни выбирались бы сегменты $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$, всегда окажется, что эти сегменты налегают один на другой. Это говорит либо о том, что траектории $L_1(t)$ и $N_1(t)$ совпадают, либо о том, что сегменты выбраны недостаточно узкими. Во всех предыдущих случаях, как показано, имелась возможность заключить границу области устойчивости в сколь угодно узкую полосу для любого конечного промежутка времени. Покажем, что такая возможность имеется и в данном случае. Пусть требуется при $|x| \leqslant H$ заключить границу области устойчивости в полосу шириной h. Здесь под H и h подразумеваются произвольные положительные числа.



Фиг. 6

Введем обозначения. Пусть попрежнему $[\alpha, \beta]$ — сегмент, в котором заключена точка l_1 пересечения траектории $L_1(t)$ с положительной полуосью оси y; $[\xi, \eta]$ — аналогичный сегмент для $L_2(t)$. Пусть $M(\alpha, t)$, $M(\beta, t)$, $M(\xi, t)$ и $M(\eta, t)$ — траектории, проходящие соответственно через точки α, β, ξ и η оси y.

Приступим к построению искомой полосы. Предположим, что $[\alpha, \beta]$ — сегмент, настолько узкий, что обе траектории $M(\alpha, t)$ и $M(\beta, t)$ пересекают прямую $x = -H$, имея при этом $y > 0$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных это предположение законно всегда, кроме случая, когда $M(\beta, t)$ при достаточно малом $\beta - \alpha$ пересекает ось x при $x \geqslant -H$. Но в этом случае траектория $L_1(t)$

пересекает ось x при $x > -H$, и вопрос упирается лишь в достаточно точное ее построение. По ширине h искомой полосы найдется такое $\varepsilon > 0$, что если $\beta - \alpha < \varepsilon$ и $\eta - \xi < \varepsilon$, то траектории $M(\alpha, t)$ и $M(\beta, t)$, равно как и траектории $M(\xi, t)$ и $M(\eta, t)$, не разойдутся соответственно больше чем на h при $-H < x < H$.

Кроме того, будем предполагать, что траектория $M(\xi, t)$ строилась так, как указано в лемме, при этом в качестве y_0 было взято число $a_1 - \frac{1}{2}\varepsilon$. Предполагается еще, что $\eta - \xi = \varepsilon$.

Возможны два случая: либо $L_1(t)$ пересекает ось x, либо нет. Если пересекает, то, как показывалось, граница области устойчивости состоит лишь из траектории $L_1(t)$.

Если $L_1(t)$ не пересекает ось, то граница области состоит из двух траекторий $L_1(t)$ и $L_2(t)$.

Для доказательства возможности построения искомой полосы, не зная, пересекает ли $L_1(t)$ ось x, достаточно показать, что если $L_1(t)$ пересекает ось x, имея при этом $x < -A$ (где $A > 0$ достаточно велико), то точка ее пересечения с отрицательной полуосью оси y лежит в сегменте $[\xi, \eta]$. Этого действительно будет достаточно, если мы покажем, что можно найти такое $E > 0$, что при $\beta - \alpha < E$ по поведению траекторий $M(\alpha, t)$ и $M(\beta, t)$ можно выяснить, пересекает ли траектория $L_1(t)$ ось x при $x > -A$.

Позже будет установлено, что такое E всегда можно найти.

Доказываем, что если $L_1(t)$ пересекает ось x при $x < -A$, то она проходит через сегмент $[\xi, \eta]$ оси y. Заметим, что вдоль $M(\xi, t)$ y возрастает вместе со временем при $x < 0$. Поэтому в силу построения $M(\xi, t)$ и определения числа a_1 найдется такое $x_1 < -H$, что $\varphi(x_1)$ отличается от соответствующей ординаты траектории $M(\xi, t)$ меньше чем на ε. От A потребуем, чтобы было $A > -x_1$.

Итак, пусть $L_1(t)$ пересекает ось x при $x < -A$, тогда, как показывалось (см. доказательство теоремы 6), траектория $L_1(t)$ пересекает кривую $y = \varphi(x)$ при $t = t_1$ и при $x < x_1$.

Но вдоль $L_1(t)$ y убывает вместе со временем в третьем координатном угле; следовательно, при $t < t_1$ там окажется

$$y < \varphi(x) \tag{4.6}$$

Действительно, $L_1(t)$ может пересечь график функции $y = \varphi(x)$ при $t < t_1$ лишь при условии, что на некотором промежутке изменения времени $x(t)$ строго возрастает с убыванием времени, в то время как на этом промежутке оказывается $y > \varphi(x)$, но это невозможно, так как из системы (1.5) видно, что при этом $dx/dt > 0$.

Неравенство (4.6) выполняется, в частности, и при $x = x_1$, а, значит, при $x = x_1$ ордината траектории $L_1(t)$ отличается от ординаты траектории $M(\xi, t)$ меньше чем на ε.

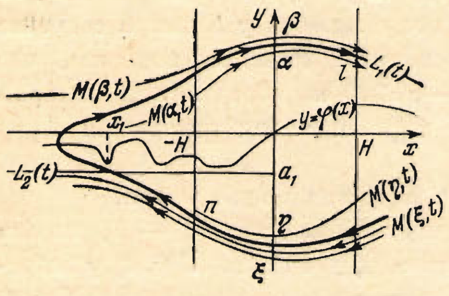
Но тогда в силу равенства (2.11) и неравенства (4.6) для x на отрезке $[x_1, 0]$ кривая $L_1(t)$ отличается по ординате меньше чем на ε от $M(\xi, t)$, а, значит, $L_1(t)$ проходит через сегмент $[\xi, \eta]$ оси y.

Осталось указать способ нахождения числа E. Это число можно найти, например, следующим образом. Возьмем сегмент $[\alpha, \beta]$ шириной ε и построим $M(\beta, t)$ до $x=-B<-A$. При этом предполагается, что $M(\beta, t)$ имеет при $x=-B, y>0$. Проведем через точку $(-B, 0)$ траекторию $N(t)$, эта траектория пересечет ось y в точке $y=d$, где $d<\beta$. По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных найдется такое число $E>0$, при котором любая траектория, проходящая через точку $(x=0,\ y=y_1)$, где $|y_1-d|\leqslant E$, не будет пересекать ось x при $x\geqslant -A$. Такое число $E\leqslant\varepsilon$ и будет искомым.

Действительно, построим на верхней полуоси оси y сегмент $[\alpha, \beta]$ шириной E.

Если при этом окажется, что $\beta\geqslant d$, то $[\alpha, \beta]$ будет искомым сегментом, если же окажется, что $\beta<d$, то $L_1(t)$ пересекает ось x при $x>-B$ и ее надо строить.

На отрицательной полуоси оси y построим сегмент $[\xi, \eta]$ по указанному выше правилу. Тогда граница области устойчивости при $|x|\leqslant H$ будет заключена в следующей полосе (фиг. 7): верхняя часть границы ограничивается сверху кривой $M(\beta, t)$, снизу — на участке $0\leqslant x\leqslant H$ — кривой $l\alpha$, каждая ордината которой меньше соответствующей ординаты $M(\beta, t)$ на E, а на участке $-H\leqslant x\leqslant 0$ — кривой $M(\alpha, t)$; нижняя часть границы ограничивается снизу кривой $M(\xi, t)$, сверху — на участке $-H\leqslant x\leqslant 0$ — кривой $n\eta$, каждая ордината которой больше соответствующей ординаты $M(\xi, t)$ на ε, а на участке $0\leqslant x\leqslant H$ — кривой $M(\eta, t)$.



Фиг. 7

§ 5. Уточним качественную картину поведения интегральных кривых системы (1.5) в окрестности начала координат.

Предположим для этого, что в окрестности точки $x=0$ функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную. Положим $\varphi'(0)=p$ и запишем систему (1.5) в виде

$$\frac{dx}{dt}=y-px-\psi(x), \qquad \frac{dy}{dt}=cpx+c\psi(x) \tag{5.1}$$

Здесь $\psi(x)$ такова, что $x^{-1}\psi(x)\to 0$ при $x\to 0$.

По Фроммеру (см., например, [2]), тангенс u_k угла, под которым движения могут входить в состояние равновесия $(0, 0)$, определяется квадратным уравнением

$$u^2-pu-cp=0 \tag{5.2}$$

Необходимое условие существования движений, приближающихся к особой точке $(0, 0)$ с определенной касательной, состоит в неотрицательности дискриминанта уравнения (5.2)

$$\Delta=p^2+4cp\geqslant 0$$

В случае $\Delta < 0$ корни квадратного уравнения (5.2) будут комплексными числами и движения приближаются к особой точке (0, 0) по спирали. Особая точка в случае $\Delta < 0$ есть фокус.

Если p и c таковы, что $\Delta > 0$, то существуют два критических направления, под которыми интегральные кривые могут входить в состояние равновесия (0, 0). Эти направления определяются числами

$$u_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4cp}}{2} \qquad (u_1 > u_2) \tag{5.3}$$

Так как

$$-p + \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4cp}}{2} \neq 0 \qquad \text{при } \Delta > 0$$

то критические направления u_1 и u_2 обыкновенные, причем вдоль направления u_1 в особую точку (0, 0) входит при $t \to +\infty$ бесконечное множество интегральных кривых, а вдоль направления u_2 в точку (0, 0) входит при $t \to +\infty$ только одна интегральная кривая $N_2(t)$.

Этот факт следует из того, что для указанных критических направлений выполняются неравенства (см. [2], стр. 465)

$$\frac{\partial \Phi(u_1, 0)}{\partial u} > 0, \qquad \frac{\partial \Phi(u_2, 0)}{\partial u} < 0$$

Уравнение траектории $N_2(t)$, входящей в особую точку (0, 0) вдоль прямой $y = u_2 x$, можно найти методом последовательных приближений Из (2.11) имеем

$$y = \int_0^x \frac{c\varphi(x)}{y - \varphi(x)}\, dx \tag{5.4}$$

Нулевое приближение берем равным $y_0 = u_2 x$; тогда первое приближение найдется из

$$y_1 = \int_0^x \frac{c\varphi(x)}{u_2 x - \varphi(x)}\, dx$$

Дальнейшие приближения даются рекуррентной формулой

$$y_n(x) = \int_0^x \frac{c\varphi(x)}{y_{n-1}(x) - \varphi(x)}\, dx \tag{5.5}$$

Таким образом, если $\Delta > 0$, то все движения, начинающиеся выше кривой $N_2(t)$, при $t \to +\infty$ входят в состояние равновесия (0, 0), касаясь прямой $y = u_1 x$ в первом координатном угле. Движения, начинающиеся ниже кривой $N_2(t)$, при $t \to +\infty$ входят в точку покоя (0, 0), касаясь прямой $y = u_1 x$ в третьем координатном угле. Особая точка в случае $\Delta > 0$ есть узел.

В случае $\Delta = 0$ и $p > 0$ характер особой точки зависит от $\varphi(x)$. Если, в частности, потребовать, чтобы в окрестности начала координат $\varphi(x)$ была непрерывно дифференцируема, то по теореме Лопа (см. [4], стр. 120) все интегральные кривые уравнения (2.11) войдут в начало координат, касаясь прямой $y = \frac{1}{2} px$. В этом случае особая точка тоже оказывается узлом.

Обратимся к случаю $p = 0$. В этом случае единственным критическим направлением является направление $u = 0$, т. е. ось x. Покажем, что ни одна траектория системы (1.5) не входит в состояние равновесия (0, 0) при $t \to +\infty$, имея при этом в качестве касательной положительную полуось оси x.

Действительно, если траектория $M(t)$ входит в начало координат вдоль положительной полуоси оси x, то при достаточно больших значениях t вдоль $M(t)$ должно оказаться $y > 0$, так как в правой полуплоскости y строго убывает с возрастанием времени. Но тогда, как следует из (2.11), при таких t вдоль $M(t)$ не может оказаться $0 \leqslant dy / dx < -c$, а следовательно, $M(t)$ не может иметь при $t \to +\infty$ своей касательной положительную полуось оси x.

Аналогично показывается, что ни одна траектория не входит при $t \to +\infty$ в начало координат вдоль отрицательной полуоси оси x. Следовательно, особая точка (0, 0) в случае $\varphi'(0) = 0$ есть фокус.

Поступила 6 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
2. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1949.
5. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.