Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Г. В. Каменков

(Москва)

1. В фундаментальном сочинении Ляпунова [1] дано определение устойчивых и неустойчивых движений любой материальной системы.

В этом сочинении решение задачи об устойчивости приводится к исследованию интегралов уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1.1}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — известные вещественные функции вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Функции эти в области, достаточно близкой к началу координат, разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными, ограниченными и непрерывными по отношению к t коэффициентами. Математическое определение устойчивости, данное Ляпуновым для возмущений $x_1, \ldots, x_n$, формулируется так.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ суть произвольно задаваемые числа. Если при всяких A_i, как бы малы они ни были, могут быть выбираемы положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы при всяких вещественных x_{i0}, удовлетворяющих условиям

$$|x_{i0}| \leqslant \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

и при всех t, превосходящих t_0, выполнялись неравенства

$$|x_i| < A_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

то невозмущенное движение по отношению к величинам x_i устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Под x_{i0} подразумевается значение функций $x_i(t)$ при $t = t_0$.

Геометрический смысл определения устойчивости, данного Ляпуновым, заключается в следующем.

Построим в n-мерном пространстве параллелепипед с центром в начале координат и с гранями, параллельными координатным плоскостям. Величину граней этого параллелепипеда определим числами $2A_1, \ldots, 2A_n$.

Если для данного параллелепипеда возможно построить новый параллелепипед и выбрать величину граней его так, чтобы для значений времени $t > t_0$ функции $x_i(t)$ оставались внутри первого параллелепипеда, если только значения x_{i0} находились внутри второго параллелепипеда, то невозмущенное движение по отношению к величинам x_i устойчиво.

Не искажая смысла, вложенного Ляпуновым в определение устойчивости, Н. Г. Четаев[2] дает иную, более удобную запись определения устойчивости: если при всяком произвольно заданном числе A, как бы оно мало ни было, может быть выбираемо положительное число λ так, чтобы при всяких возмущениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющих условию

$$x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2 \leqslant \lambda$$

и при всяком t, превосходящем t_0, выполнялось неравенство

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < A$$

то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Геометрический смысл определения устойчивости Четаева аналогичен изложенному выше, с той только разницей, что вместо двух n-мерных параллелепипедов берутся две n-мерные сферы с радиусами A и λ.

Замечание. Совершенно ясно, что, не уменьшая общности задачи и не искажая смысла определения устойчивости, можно было бы вместо двух n-мерных сфер взять две любые n-мерные поверхности, определенным образом построенные. Например, можно было бы взять два n-мерных соосных эллипсоида вида

$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = A, \qquad \lambda_1 x_{10}^2 + \cdots + \lambda_n x_{n0}^2 = \lambda$$

В более общем виде эти два соосных эллипсоида можно записать уравнениями

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = A, \qquad y_{10}^2 + \cdots + y_{n0}^2 = \lambda \tag{1.4}$$

где

$$y_s = a_{s1} x_1 + \cdots + a_{sn} x_n, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение устойчивости движения, формулированное Ляпуновым, подразумевает изменение интегралов системы уравнений (1.1) в интервале времени от t_0 до ∞, причем величина t_0 может быть сколь угодно большой. На начальные возмущения x_{i0} Ляпунов накладывает условие, ограничивающее изменение их сверху гранями параллелепипеда со сколь угодно малыми ребрами λ_i, выбираемыми по нашему усмотрению в зависимости от заданных значений A. Таким образом, x_{i0} ничем не ограничиваются снизу.

Решение математической задачи относительно изменения функций $x_i(t)$ в интервале времени от t_0 до ∞ в известной степени будет характеризовать невозмущенное движение, определяя его качество в смысле прочности или неподатливости к действию возмущений. Это механическое свойство движения Ляпунов называет устойчивостью.

Сохраняя механический смысл понятия устойчивости и неустойчивости, которое вкладывает в него Ляпунов, поставим задачу отыскать такие невозмущенные движения, которые являлись бы устойчивыми на конечном интервале времени, начиная с того момента времени, при котором рассматриваемые элементы движения получили возмущения.

Очевидно, что любое движение, не обладающее механической устойчивостью, будет удовлетворять условиям (1.2) и (1.3) на конечном интервале времени; причем этот интервал времени соответствующим выбором чисел A и λ можно сделать сколь угодно большим. Поэтому, сохраняя механический смысл понятия устойчивости и неустойчивости, вытекающий из определения Ляпунова, определение устойчивости и неустойчивости на конечном интервале времени дадим в несколько иной форме.

2. Предположим, что задача об устойчивости движения некоторой материальной системы приведена к исследованию n-функций $x_i(t)$, удовлетворяющих системе уравнений возмущенного движения вида (1.1).

Определение. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом положительном числе A величины x_s, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n)^2 \leqslant A \tag{2.1}$$

на конечном интервале времени $[t_0, t_0 + \tau]$, если только начальные значения этих функций x_{i0} удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_{10} + \cdots + a_{sn}x_{n0})^2 \leqslant A, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.2}$$

то невозмущенное движение будет устойчиво на интервале времени τ; в противном случае — неустойчиво, т. е. $\tau = 0$. Здесь следует отметить, что в отличие от определения Ляпунова числа A и λ равны между собой.

Геометрический смысл определения устойчивости на конечном интервале времени имеет следующую интерпретацию. Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ система получила некоторые отличные от нуля произвольно малые возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Если эти возмущения в момент времени t_0 находились внутри или на поверхности n-мерного эллипсоида

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_{10} + \cdots + a_{sn}x_{n0})^2 = A$$

и если затем функции $x_i(t)$ оставались внутри области, ограниченной этим эллипсоидом, по крайней мере до значения $t = t_1$, то движение устойчиво на интервале $[t_0, t_1]$; в противном случае — неустойчиво.

Запишем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \cdots + p_{in}x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

где функции X_i имеют ту же структуру, что и функции, фигурирующие в системе уравнений (1.1), с той только разницей, что разложение их по целым положительным степеням x_i начинается с членов не ниже второго порядка. Величины p_{ij} представляют собой вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t. Задача заключается в том, чтобы, не интегрируя систему уравнений (2.3), определить:

1) необходимые и достаточные условия устойчивости по первому приближению, т. е. условия, когда в исследуемых дифференциальных уравнениях можно отбросить все члены выше первого порядка относительно величин x_i и вместо первоначальных уравнений рассматривать полученную таким путем систему линейных дифференциальных уравнений;

2) интервал времени τ, на котором имеет место устойчивость невозмущенного движения.

3. Рассмотрим основные теоремы об устойчивости и неустойчивости на конечном интервале времени. Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет вид (2.3).

Предположим, что невозмущенное движение в момент времени t_0 получило возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1} x_{10} + \cdots + a_{sn} x_{n0})^2 \leqslant A$$

Запишем систему уравнений (2.3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = p_{i1}(t_0)\, x_1 + \cdots + p_{in}(t_0)\, x_n + \Delta p_{i1}(t)\, x_1 + \cdots + \Delta p_{in}(t)\, x_n + \\ + X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

где

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(t_0) + \Delta p_{ij}(t), \qquad \Delta p_{ij}(t_0) = 0$$

а $p_{ij}(t_0)$ — значения функций $p_{ij}(t)$ при $t = t_0$.

Эту систему уравнений линейным преобразованием с постоянными вещественными коэффициентами

$$y_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.2)$$

можно привести к системе уравнений, линейные члены которой будут удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Если уравнение

$$\begin{vmatrix} p_1(t_0) - \varkappa & \cdots & p_{1n}(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(t_0) & \cdots & p_{nn}(t_0) - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.3)$$

которое в дальнейшем изложении будем называть характеристическим, не имеет кратных корней, то система уравнений (3.1) может быть приведена к виду

$$(3.4)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \varkappa_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \Delta P_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}^{(0)} u_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}^{(0)} v_j + Y_i(y_j, v_j, u_j, t)$$

$$\frac{du_s}{dt} = \lambda_s u_s - \mu_s v_s + \sum_{j=1}^{m} \Delta Q_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{sj}^{(1)} u_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{sj}^{(1)} v_j + U_s(y_j, u_j, v_j, t)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = \lambda_s v_s + \mu_s u_s + \sum_{j=1}^{m} \Delta R_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{sj}^{(2)} u_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{sj}^{(2)} v_j + V_s(y_j, u_j, v_j, t)$$

$$i = 1, \ldots, m, \qquad s = 1, \ldots, \sigma, \qquad m + 2\sigma = n$$

где ΔP_{ij}, ΔQ_{sj}, ΔR_{sj}, ΔU_{sj}, ΔV_{sj} представляются линейными формами от Δp_{ij} и, следовательно, все они равны нулю при $t = t_0$. Функции $Y_i(y_j, u_j, v_j, t)$, $U_s(y_j, u_j, v_j, t)$, $V_s(y_j, u_j, v_j, t)$ таковы, что разложения их по степеням переменных y_i, u_s, v_s начинаются с членов не ниже второго порядка. В уравнениях (3.4) m равно числу вещественных корней, а 2σ — числу комплексных корней. Величины u_s и v_s, так же как и y_i являются линейными формами переменных $x_1, \; x_2, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами. Относительно системы уравнений (3.1) можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если характеристическое уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения при $t = t_0$, не имея кратных корней, имеет только отрицательные корни или комплексные с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение обладает устойчивостью на некотором конечном интервале времени τ.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим изменение величины

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} (u_s^2 + v_s^2)$$

во времени, подразумевая под y_i, u_s, v_s линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям (3.4).

Дифференцируя r^2 по t, получим

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} = {} & \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + \qquad (3.5) \\ & + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \Delta P_{ij} y_j y_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{m} \Delta U_{ij}^{(0)} u_j y_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{m} \Delta V_{ij}^{(0)} v_j y_i + \\ & + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta Q_{ij} y_j u_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}^{(1)} u_j u_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}^{(1)} v_j u_i + \\ & + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta R_{ij} y_j v_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}^{(2)} u_j v_i + \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}^{(2)} v_j v_i + \\ & + S(y_1, \ldots, y_m, u_1, \ldots, u_\sigma, v_1, \ldots, v_\sigma, t) \end{aligned}$$

где $S(y_j, u_j, v_j, t)$ представляет собой голоморфную функцию переменных y_j, u_j, v_j, разложение которой по степеням этих переменных начинается с членов не ниже третьего порядка.

Все двойные суммы в выражении (3.5) обращаются в нуль при $t = t_0$, так как все функции ΔP_{ij}, ΔQ_{ij}, ΔR_{ij}, ΔU_{ij}, ΔV_{ij} являются линейными формами от Δp_{ij}, последние же обращаются в нуль при $t = t_0$.

Докажем, что знак производной от r^2 по t определяется совокупностью членов

$$\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2)$$

для всех значений времени в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем разность $t_1 - t_0 = \tau$ является величиной, по крайней мере конечной.

Действительно, из уравнения (3.5) следует, что

$$r\frac{dr}{dt}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+ \tag{3.6}$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{m}y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}(u_s^2+v_s^2)\Big]\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|\Delta P_{ij}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{m}|\Delta Q_{ij}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{m}|\Delta R_{ij}|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta U_{ij}^{(0)}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta U_{ij}^{(1)}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta U_{ij}^{(2)}|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta V_{ij}^{(0)}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta V_{ij}^{(1)}|+\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}|\Delta V_{ij}^{(2)}|\Big]+$$

$$+S(y_1,\ldots,y_m,\,u_1,\ldots,u_\sigma,\,v_1,\ldots,v_\sigma,\,t)$$

В силу тех свойств, которыми обладают все функции ΔP, ΔQ, ΔU, ΔV, можно утверждать, что здесь выражение в скобках, содержащее двойные суммы, представляет собой некоторую положительную и непрерывную функцию $H(t)$, обращающуюся в нуль при $t=t_0$.

На основании изложенного неравенство (3.6) можно записать в форме

$$r\frac{dr}{dt}\leqslant\sum_{i=1}^{m}[\varkappa_i+H(t)]\,y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}[\lambda_s+H(t)]\,(u_s^2+v_s^2)+S(y_i,u_i,v_i,t) \tag{3.7}$$

Очевидно, что в силу условий, наложенных на корни характеристического уравнения и на значения x_{i0}, правая часть выражения (3.7) будет отрицательной независимо от S по крайней мере до того момента времени, когда одно из выражений $\varkappa_i+H(t)$ или $\lambda_s+H(t)$ не обратится в нуль. Пусть наименьшее из чисел $\varkappa_i$ и λ_s есть величина корня $\varkappa_\alpha$; тогда, определяя t_1, из уравнения

$$\varkappa_\alpha+H(t_1)=0$$

получим момент времени, когда знак dr^2/dt может измениться и принять положительное значение.

В силу непрерывности функции $H(t)$ этот момент времени будет таков, что величина $\tau=t_1-t_0$ будет иметь по крайней мере конечное значение. Таким образом, теорему можно считать доказанной.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один положительный корень или два с положительными вещественными частями, то невозмущенное движение не обладает устойчивостью на конечном интервале времени, т. е. $\tau=0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим знак производной от r^2 по t. Пусть положительным корнем характеристического уравнения является корень $\varkappa_1$. Тогда, обозначая сумму двойных сумм, фигурирующих в правых частях уравнения (3.5), через L, запишем уравнение (3.5) в виде

$$r\frac{dr}{dt}=\varkappa_1 y_1^2+\sum_{i=2}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+L+S \tag{3.8}$$

подразумевая под L квадратичную форму переменных y_i, u_i, v_i с ограниченными и непрерывными относительно t коэффициентами, обращающимися в нуль при $t = t_0$. Из равенства (3.8) получим

$$r^2 = r_0^2 \exp\left(2 \int_{t_0}^{t} \left[\varkappa_1 y_1^2 + \sum_{i=2}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + L + S\right] \frac{dt}{r^2}\right) \quad (3.9)$$

Пользуясь возможностью произвольного выбора начальных значений, подберем их согласно равенству

$$y_{10}^2 = A, \qquad y_{20} = \cdots = y_{m0} = 0,\ u_{10} = \cdots = u_{\sigma 0} = 0,\ v_{10} = \cdots v_{\sigma 0} = 0$$

Тогда знак величины подинтегральной функции в окрестности выбранной точки определяется знаком выражения $\varkappa_1 y_1^2$. Из (3.9) получаем неравенство $r^2 > A$, которое и доказывает теорему 2.

Аналогичным приемом можно доказать, что если характеристическое уравнение имеет хотя бы два корня с положительной вещественной частью, то движение также неустойчиво. Нам остается теперь рассмотреть случаи, когда среди корней характеристического уравнения имеются нулевые, чисто мнимые и кратные корни.

В теореме 1 дано условие, при котором решение вопроса об устойчивости не зависит от членов выше первого порядка. При этом доказывается только достаточность приведенного условия; докажем теперь его необходимость.

Теорема 3. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один нулевой или два чисто мнимых корня при остальных отрицательных или комплексных с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение может не обладать устойчивостью на конечном интервале времени.

Положим в уравнениях (3.4) $\varkappa_1 = 0$

$$Y_1 = a^2 y_1^3, \quad Y_2 = \cdots = Y_m = 0, \quad U_1 = \cdots = U_\sigma = 0, \quad V_1 = \cdots = V_\sigma = 0$$

При этих условиях производная r^2 по t будет иметь вид:

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{i=2}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + L + a^2 y_1^4 \quad (3.10)$$

где L, как и в предыдущей теореме, представляет собой квадратичную форму переменных y_i, u_s, v_s с непрерывными и ограниченными коэффициентами, обращающимися в нуль при $t = t_0$.

Из уравнения (3.10) находим

$$r^2 = r_0^2 \exp\left[2 \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=2}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + L + a y_1^4\right) \frac{dt}{r^2}\right] \quad (3.11)$$

Пользуясь произвольным выбором начальных значений величин y_i, u_s, v_s, наложим на них условие

$$y_{10}^2 = A, \quad y_{20} = \cdots = y_{m0} = 0, \quad u_{10} = \cdots = u_{\sigma 0} = 0, \quad v_{10} = \cdots = v_{\sigma 0} = 0$$

Тогда можно утверждать, что подинтегральная функция в уравнении (3.11) при $t=t_0$ принимает значение, которое является величиной положительной.

В силу непрерывности интегралов y_i, u_s, v_s системы уравнений (3.4) и коэффициентов правых частей этих уравнений можно утверждать, что значение подинтегральной функции будет положительное для значений t, близких к t_0.

Следовательно, $r^2 > A$ для всех $t_1 > t > t_0$.

Последнее неравенство служит доказательством теоремы 3 и одновременно показывает, что условие, формулированное в теореме 1, является не только достаточным, но и необходимым.

Рассмотрим теперь систему уравнений (3.1) в предположении, что ее характеристическое уравнение имеет кратные корни.

В этом случае всегда найдется линейная подстановка с постоянными вещественными коэффициентами, преобразующая систему уравнений (3.1) в такую, которая распадается на несколько групп уравнений вида

$$(i = 2, 3, \ldots, k_1)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \varkappa_1 y_1 + E_1 + Y_1, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \varkappa_1 y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i$$

$$\frac{dy_{k_1+1}}{dt} = \varkappa_2 y_{k_1+1} + E_{k_1+1} + Y_{k_1+1}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \varkappa_2 y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i$$

$$(i = k_1 + 2, \ldots, k_1 + k_2)$$

. . . .

$$(i = m - k_\alpha + 2, \ldots, m)$$

$$\frac{dy_{m-k_\alpha+1}}{dt} = \varkappa_\alpha y_{m-k_\alpha+1} + E_{m-k_\alpha+1} + Y_{m-k_\alpha+1}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = x_\alpha y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i$$

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda_1 u_1 - \mu_1 v_1 + H_1 + U_1, \qquad \frac{du_s}{dt} = \lambda_1 u_s - \mu_1 v_s + u_{s-1} + H_s + U_s$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1 + \mu_1 u_1 + K_1 + V_1, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \lambda_1 v_s + \mu_1 u_s + v_{s-1} + K_s + V_s$$

$$(s = 2, 3, \ldots, r_1)$$

$$\frac{du_{r_1+1}}{dt} = \lambda_2 u_{r_1+1} - \mu_2 v_{r_1+1} + H_{r_1+1} + U_{r_1+1}$$

$$\frac{dv_{r_1+1}}{dt} = \lambda_2 v_{r_1+1} + \mu_2 u_{r_1+1} + K_{r_1+1} + V_{r_1+1}$$

$$(s = r_1 + 2, r_1+3, \ldots, r_1+r_2)$$

$$\frac{du_s}{dt} = \lambda_2 u_s - \mu_2 v_s + u_{s-1} + H_s + U_s$$

$$\frac{dv_s}{dt} = \lambda_2 v_s + \mu_2 u_s + v_{s-1} + K_s + V_s$$

. . . .

$$\frac{du_{\sigma-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta u_{\sigma-r_\beta+1} - \mu_\beta v_{\sigma-r_\beta+1} + H_{\sigma-r_\beta+1} + U_{\sigma-r_\beta+1}$$

$$\frac{dv_{\sigma-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta v_{\sigma-r_\beta+1} + \mu_{\sigma-r_\beta+1} u_{\sigma-r_\beta+1} + K_{\sigma-r_\beta+1} + V_{\sigma-r_\beta+1}$$

$$\frac{du_s}{dt} = \lambda_\beta u_s - \mu_\beta v_s + u_{s-1} + H_s + U_s \qquad (s = \sigma - r_\beta + 2, \ldots, \sigma)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = \lambda_\beta v_s + \mu_\beta u_s + v_{s-1} + K_s + V_s \qquad (3.12)$$

где α и β равны числу групп уравнений, соответствующих действительным и комплексным корням. Числа $k_1, \ldots, k_\alpha$, $r_1, \ldots, r_\beta$ определяют порядок кратности каждого корня.

Может случиться, что некоторые вещественные корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\alpha$ или комплексные корни

$$\lambda_1 \pm \mu_1 \sqrt{-1}, \quad \lambda_2 \pm \mu_2 \sqrt{-1}, \ldots, \lambda_\sigma \pm \mu_\sigma \sqrt{-1}$$

равны между собой.

Все величины E, H, K представляются линейными формами переменных y_i, u_i, v_i с коэффициентами, зависящими линейно от Δp_{ij}.

Относительно системы уравнений (3.1) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Если характеристическое уравнение системы уравнений (3.1), не имея положительных корней или комплексных с положительными вещественными частями, имеет кратные вещественные отрицательные корни $\varkappa_i$ и кратные комплексные корни с отрицательными вещественными частями λ_s и если при этом все диагональные миноры определителей

$$D(\varkappa_i) = \begin{vmatrix} -\varkappa_i & -\frac{1}{2} & 0 \ldots 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\varkappa_i & -\frac{1}{2} \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -\frac{1}{2} & -\varkappa_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, \ldots, \alpha)$$

$$D(\lambda_s) = \begin{vmatrix} -\lambda_s & -\frac{1}{2} & 0 \ldots 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda_s & -\frac{1}{2} \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -\frac{1}{2} & -\lambda_s \end{vmatrix} \quad (s = 1, \ldots, \beta) \tag{3.13}$$

будут больше нуля, то невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени независимо от членов высших порядков.

В том случае, когда хотя бы один диагональный минор окажется отрицательным, невозмущенное движение будет неустойчиво независимо от членов высших порядков.

Числа k_i и r_s указывают на порядок определителей $D(\varkappa_i)$ и $D(\lambda_s)$.

Для доказательства теоремы исследуем изменение величины r^2 с течением времени, принимая за r^2 величину

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} (u_s^2 + v_s^2)$$

Из этого выражения и при помощи системы уравнений (3.12) получаем

$$r^2 = A \exp\left(-2 \int_{t_0}^{t} (H - L - S) \frac{dt}{r^2}\right)$$

где

$$2H = -\varkappa_1 \sum_{i=1}^{k_1} y_i^2 - \varkappa_2 \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} y_i^2 - \cdots - \varkappa_\alpha \sum_{i=m-k_\alpha+1}^{m} y_i^2 -$$

$$-\lambda_1 \sum_{s=1}^{r_1} (u_s^2 + v_s^2) - \lambda_2 \sum_{s=r_1+1}^{r_1+r_2} (u_s^2 + v_s^2) - \cdots - \lambda_\beta \sum_{s=\sigma-r_\beta+1}^{\sigma} (u_s^2 + v_s^2) -$$

$$-y_1y_2 - \cdots - y_{k_1-1}y_{k_1} - y_{k_1+1}y_{k_1+2} - \cdots - y_{k_2+1}y_{k_2} - \cdots - y_{m-1}y_m -$$

$$-u_1u_2 - u_2u_3 - \cdots - u_{r_1-1}u_{r_1} - u_{r_1+1}u_{r_1+2} - \cdots - u_{r_2-1}u_{r_2} - \cdots - u_{\sigma-1}u_\sigma -$$

$$-v_1v_2 - \cdots - v_{\sigma-1}v_\sigma$$

При условии положительности всех диагональных миноров определителей $D(\varkappa_i)$ и $D(\lambda_s)$ квадратичную часть функции $2H$, состоящую из членов, коэффициенты которых не зависят от t, при помощи линейного преобразования можно привести к сумме квадратов, коэффициенты при которых будут положительные.

Функцию $2(H-L-S)$ после преобразования можно записать в виде

$$2(H-L-S) = a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \cdots + a_nz_n^2 + L_1(z_i, t) + S_1(z_i, t)$$

Здесь $L_1(z_i, t)$ является квадратичной формой с непрерывными коэффициентами, обращающимися в нуль при $t=t_0$, через S_1 обозначена голоморфная функция, разложение которой по степеням z_i начинается с членов не ниже третьего порядка; переменные z_i являются линейными формами от y_i, u_s, v_s.

Очевидно, что для значений t, близких к t_0, знак функции $2(H-L-S)$ определяется совокупностью членов $a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \ldots + a_nz_n^2$ независимо от выражений L_1 и S_1.

На основании изложенного можно утверждать, что $r^2 < A$ до некоторого момента t_1, причем разность $t_1 - t_0 = \tau$ является величиной, по меньшей мере конечной. Это неравенство доказывает первую часть теоремы 4.

Если предположить, что хотя бы один диагональный минор определителей $D(\varkappa_i)$ или $D(\lambda_s)$ является величиной отрицательной, то одно из чисел a_i будет также отрицательным.

Пусть это число будет a_1. Воспользовавшись возможностью произвольного выбора начальных значений y_{i0}, u_{s0}, v_{s0}, подберем начальное значение z_{i0} таким образом, чтобы $z_{20} = z_{30} = \cdots = z_{n0} = 0$, и, проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были изложены в теореме 2, можно утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво.

Для того чтобы доказать необходимость условий, формулированных в данной теореме, можно предположить, что одно из чисел a_i, например a_1, обращается в нуль.

Тогда всегда можно подобрать члены высшего порядка таким образом, чтобы $S_1 = az_1^4$, которые превратят устойчивое движение в неустойчивое.

Таким образом, мы доказали необходимость формулированных условий.

4. При доказательстве необходимых и достаточных условий устойчивости движений по первому приближению на конечном интервале времени мы не интересовались величиной этого интервала. В приложениях же эта величина играет существенную роль, поэтому необходимо дать способ определения интервала времени, гарантирующего устойчивость, т. е. необходимо определить разность $t_1 - t_0 = \tau$ или величину несколько меньше ее, при которой была бы справедлива доказанная теорема об устойчивости.

Для решения этой задачи обратимся к системе уравнений (3.1) и к выражению (3.5), которое запишем в несколько иной форме:

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + L(y_i, u_s, v_s, t) + S(y_i, u_s, v_s, t) \quad (4.1)$$

где $L(y_i, u_s, v_s, t)$ является квадратичной формой с непрерывными по отношению к t коэффициентами, обращающимися в нуль при $t = t_0$.

В дальнейшем для удобства записи обозначим переменные u_s и v_s буквами y_i, пронумеровав их в следующем порядке:

$$u_1 = y_{m+1}, \qquad u_2 = y_{m+2}, \ldots, u_\sigma = y_{m+\sigma}$$

$$v_1 = y_{m+\sigma+1}, \quad v_2 = y_{m+\sigma+2}, \ldots, v_\sigma = y_{m+2\sigma}$$

Тогда выражение (4.1) можно записать в следующей форме:

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{i=m+1}^{m+\sigma} \lambda_i (y_i^2 + y_{i+\sigma}^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta C_{ij} y_i y_j + S$$

где ΔC_{ij} равны нулю при $t = t_0$.

Заменив три первые суммы, фигурирующие в правой части, через $-H$, получим

$$r^2 = A \exp\left(-2\int_{t_0}^{t} (H - S)\frac{dt}{r^2}\right) \quad (4.2)$$

где H — квадратичная форма переменных $y_1, \ldots, y_n$.

Для определения интервала времени, гарантирующего устойчивость невозмущенного движения, составим определитель, являющийся дискриминантом формы H:

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_i y_j$$

$$c_{ii} = -\varkappa_i - \Delta C_{ii} \qquad (i = 1, \ldots, m), \qquad c_{s+\sigma,\, s+\sigma} = -\lambda_s - \Delta C_{s+\sigma,\, s+\sigma}$$

$$c_{ss} = -\lambda_s - \Delta C_{ss} \qquad (s = m+1, \ldots, \sigma), \quad c_{ij} = c_{ji}$$

$$D(\varkappa_i, \lambda_s) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Квадратичная форма H будет определять знак подинтегральной функции $H - S$ независимо от S в том случае, когда в результате преобразования ее к сумме квадратов все коэффициенты при квадратах переменных, являющиеся функциями времени, будут отличны от нуля и иметь одинаковые знаки на всем интервале времени $\tau = t_1 - t_0$.

Из уравнения (4.2) следует, что для устойчивости невозмущенного движения необходимо, чтобы H была определенно-положительной формой для всех значений времени, заключающихся в интервале $\tau = t_1 - t_0$.

Это условие будет выполняться в том случае, если все диагональные миноры определителя $D(\varkappa_i, \lambda_s)$ являются положительными, т. е. будут иметь место неравенства

$$\Delta_i = c_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \Delta_n = D(\varkappa_i, \lambda_s) > 0 \tag{4.3}$$

В том случае, когда хотя бы один из миноров меняет знак, квадратичная форма H перестает быть определенно-положительной.

Предположим, что для некоторых значений времени Δ_n обращается в нуль:

$$\Delta_n = 0 \tag{4.4}$$

Из этого уравнения мы можем определить несколько моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Пусть t_1 является наименьшей величиной из всех $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Тогда разность $t_1 - t_0 = \tau$ будет тем интервалом времени, на котором гарантируется устойчивость невозмущенного движения. Может случиться, что неравенства (4.3) справедливы для всех значений времени $t > t_0$, тогда будет гарантирована устойчивость невозмущенного движения на интервале времени (t_0, ∞).

Замечание. Необходимо отметить, что равенства (4.4) не определяют максимального значения времени t, гарантирующего соблюдение неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{in}x_n)^2 < A \tag{4.5}$$

Очевидно, это значение времени будет больше t_1, так как t_1 определяет значение времени, начиная с которого величина r^2, будучи менее A, для значений t, близких t_1, может возрастать, оставаясь меньше A.

Задача, связанная с определением максимального значения времени, обеспечивающего соблюдение неравенства (4.5), представляет большой интерес с точки зрения приложений к решению прикладных задач.

Поступила 2 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1935.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивости движения. Гостехиздат, 1948.