Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ КРУГОВОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

В работе исследуются неосесимметричные состояния равновесия цилиндрической оболочки вращения средней длины, находящейся под действием внешнего гидростатического давления и осевой нагрузки. Предполагается, что в осесимметричном напряженном состоянии (существующем при достаточно малых нагрузках) усилия от осевой нагрузки будут или меньше, чем усилия от внешнего давления, или же соизмеримы с ними.

Для рассматриваемой задачи приводятся основные соотношения и уравнения нелинейной теории местной потери устойчивости безмоментного напряженного состояния оболочек. При выяснении асимптотических свойств интегралов соответствующих дифференциальных уравнений выводится обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.7); дается простая вариационная формула (2.17) для определения критической нагрузки. Показывается, что учет краевого эффекта осесимметричного напряженного состояния дает лишь несущественную при тонкостенных оболочках поправку к значению критической нагрузки, определенной по безмоментному состоянию.

Предполагая, что характер деформации, выясненный при определении критической нагрузки, имеет место и в некоторой начальной части послекритической стадии, выводятся упрощенные уравнения (4.2), (4.3) для ее исследования, а также дается эквивалентная им вариационная формула. Так как вывод упрощенных соотношений основан на асимптотических свойствах решения точных (в смысле теории местной потери устойчивости безмоментного состояния оболочек) уравнений, то излагаемый метод дает тем более точные результаты, чем меньше отношение толщины стенки оболочки к радиусу кривизны ее срединной поверхности.

В задаче предполагается, что цилиндрическая оболочка вращения нагружена осесимметричным внешним давлением и осевой силой, которые изменяются пропорционально изменению некоторого параметра нагрузки, причем, когда этот параметр равен нулю, оболочка находится в ненапряженном состоянии.

Для достаточно малых значений параметра нагрузки оболочка имеет осесимметричное напряженное состояние, которое в силу сделанных предположений складывается из безмоментного и смешанного напряженных состояний; при этом последнее для тонких оболочек появляется лишь в краевых зонах или же в зонах, где толщина оболочки изменяется ступенчато. Безмоментное же состояние может иметь местный характер, как это следует из приведенных ниже выражений (1.2), только в случае действующего в узкой зоне внешнего давления при сравнительно малом значении осевой силы. Этот случай здесь не рассматривается.

Целью работы является изучение неосесимметричных форм равновесия, которые при достаточно больших значениях внешнего давления заведомо существуют.

Неосесимметричная форма равновесия оболочки, возможная при определенном значении параметра нагрузки, описывается относительно осесимметричной формы, которая существует или по крайней мере возможна при этой же нагрузке. По этой причине осесимметричное состояние равновесия будет в дальнейшем называться начальным состоянием.

За исключением весьма пологих оболочек, при исследовании неосесимметричных форм равновесия оболочек вращения в качестве начального состояния равновесия принимается, как правило, только безмоментная составляющая осесимметричного напряженного состояния, а краевой эффект вообще не рассматривается. Это будет допускаться также и в данной работе; однако в соответствующих местах будет указано, какие следствия влечет за собой это допущение.

За основную идею разработки рассматриваемой задачи автор обязан А. Л. Гольденвейзеру.

1. Основные соотношения. Отнесем срединную поверхность оболочки с радиусом кривизны R к безразмерным координатам ξ, θ, причем пусть линии $\xi = \mathrm{const}$ будут направляющие, а линии $\theta = \mathrm{const}$ — образующие цилиндрической поверхности. Квадрат линейного элемента срединной поверхности дается формулой

$$(ds)^2 = R^2 [(d\xi)^2 + (d\theta)^2] \tag{1.1}$$

Тангенциальные усилия безмоментного осесимметричного состояния T_ξ, T_θ в случае внешнего гидростатического давления

$$p(\xi) = \sigma q(\xi)$$

и осевой силы σV определяются без труда:

$$T_\xi = \sigma V, \qquad T_\theta = -\sigma R q(\xi) \tag{1.2}$$

Здесь $q(\xi)$ — непрерывная функция, $V = \mathrm{const}$ зависят от вида, а не от величины внешней нагрузки.

Предположим, что при некотором значении параметра нагрузки σ, кроме осесимметричного состояния (1.2), возможно еще по крайней мере одно неосесимметричное состояние равновесия. Пусть $T_\xi + S_\xi$, $T_\theta + S_\theta$ будут нормальные, S — сдвигающее усилия, а M_ξ, M_θ — изгибающие, H — крутящий моменты.

Усилия S_ξ, S_θ, S могут быть, как известно, с определенной точностью выражены через функцию напряжения F. Имеем

$$S_\xi = ERF^{\cdot\cdot}, \qquad S_\theta = ERF'', \qquad S = -ERF'^{\cdot} \tag{1.3}$$

Здесь E — модуль Юнга; штрихом и точкой обозначены частные производные

$$(\cdots)' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdots), \qquad (\cdots)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdots)$$

Пусть дальше Ru, Rv, Rw будут физические составляющие вектора перемещения точки, ε_ξ, ε_θ — относительные удлинения, γ — сдвиг, а $\varkappa_\xi$, $\varkappa_\theta$, τ — параметры изменения кривизны срединной поверхности при переходе оболочки в неосесимметричное состояние равновесия.

Зависимость между этими величинами устанавливается следующими приближенными соотношениями [1]:

$$\begin{gathered} u' + \tfrac{1}{2}(w')^2 = \varepsilon_\xi, \qquad v^{\cdot} - w + \tfrac{1}{2}(w^{\cdot})^2 = \varepsilon_\theta, \qquad u^{\cdot} + v' + w'w^{\cdot} = \gamma \\ R\varkappa_\xi = -w'', \qquad R\varkappa_\theta = -w^{\cdot\cdot}, \qquad R\tau = -w'^{\cdot} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Воспользуемся условием совместности деформации

$$\varepsilon_\xi^{\cdot\cdot} + \varepsilon_\theta'' - \gamma'^{\cdot} + w'' + w''w^{\cdot\cdot} - w'^{\cdot}w'^{\cdot} = 0 \tag{1.5}$$

и условием равновесия

$$\frac{1}{R} S_\theta - (T_\xi + S_\xi)\varkappa_\xi - (T_\theta + S_\theta)\varkappa_\theta - 2S\tau + \frac{1}{R^2}(M_\xi'' + M_\theta^{\cdot\cdot} + 2H'^{\cdot}) = 0 \tag{1.6}$$

при простейших физических соотношениях

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{EtR}(S_\xi - \nu S_\theta), \quad M_\xi = \frac{Et^3R^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_\xi + \nu\varkappa_\theta), \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{EtR} S$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{EtR}(S_\theta - \nu S_\xi), \quad M_\theta = \frac{Et^3R^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_\theta + \nu\varkappa_\xi), \quad H = \frac{Et^3R^3}{12(1+\nu)}\tau \tag{1.7}$$

где ν — коэффициент Пуассона, $Rt = Rt(\xi)$ — толщина стенки, непрерывная вместе с двумя производными функция от ξ.

Тогда определение указанных выше неосесимметричных форм равновесия можно привести к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{t}\left\{\nabla^2\nabla^2 F + 2t\left(\frac{1}{t}\right)'\nabla^2 F' + t\left(\frac{1}{t}\right)''(F'' - \nu F^{\cdot\cdot})\right\} + w'' + w''w^{\cdot\cdot} - w'^{\cdot}w'^{\cdot} = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{t}F'' - \lambda^2\left\{\nabla^2\nabla^2 w + \frac{2}{t^3}(t^3)'\nabla^2 w' + \frac{1}{t^3}(t^3)(w'' + \nu w^{\cdot\cdot})\right\} +$$
$$+ \sigma(q_\xi w'' - q_\theta w^{\cdot\cdot}) + \frac{1}{t}(F''w^{\cdot\cdot} + F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot}) = 0 \tag{1.9}$$

где

$$\nabla^2(\cdots) = (\cdots)'' + (\cdots)^{\cdot\cdot}, \qquad \lambda^2 = \frac{t^2}{12(1-\nu^2)}, \qquad q_\xi = \frac{V}{EtR}, \qquad q_\theta = \frac{q}{Et} \tag{1.10}$$

Рассмотрим два варианта краевых закреплений, налагающих на решение системы (1.8), (1.9) на контурах срединной поверхности $\xi = 0$, $\xi = l$ условия:

либо
$$w = 0, \qquad S_\xi = 0, \qquad v = 0, \qquad M_\xi = 0 \tag{1.11}$$
либо
$$w = 0, \quad u^{\cdot} = 0, \quad v = 0, \quad w' = 0, \quad \oint S_\xi\, d\theta = 0 \tag{1.12}$$

При первом варианте оболочка присоединена к тонкостенной диафрагме, весьма жесткой в своей плоскости, но гибкой в направлении, нормальном к плоскости диафрагмы; при втором варианте диафрагма недеформируема, но не препятствует поступательным осевым смещениям.

Входящие в условия (1.11), (1.12) тангенциальные компоненты вектора перемещения u, v определяются через функции w, F формулами

$$u' = -\frac{1}{2}(w')^2 + \frac{1}{t}(F^{\cdot\cdot} - \nu F''), \qquad v^{\cdot} = w - \frac{1}{2}(w^{\cdot})^2 + \frac{1}{t}(F'' - \nu F^{\cdot\cdot})$$
$$u^{\cdot} + v' = -w'w^{\cdot} - \frac{2(1+\nu)}{t}F'^{\cdot} \tag{1.13}$$

причем уравнение (1.8) будет условием интегрируемости системы (1.13).

2. Критическое значение нагрузки. По определению при критическом значении параметра нагрузки $\sigma = \sigma_э$ существует, кроме осесимметричной формы равновесия, еще по крайней мере одно неосесимметричное состояние равновесия, бесконечно близкое к начальному. Отсюда следует, что такое неосесимметричное состояние определяется решением уравнений (1.8), (1.9), где нелинейные члены нужно отбросить.

Ищем решение этой системы в виде

$$F(\xi, \theta) = F_э(\xi)\cos s\theta, \qquad w(\xi, \theta) = w_э(\xi)\cos s\theta \tag{2.1}$$

Опуская в дальнейшем изложении в этом разделе индексы $э$ в обозначениях функций $F_э(\xi)$, $w_э(\xi)$, для определения этих функций и параметра $\sigma_э$ получим систему

$$\frac{1}{t}\left\{F'''' - 2s^2F'' + s^4F + 2t\left(\frac{1}{t}\right)'(F''' - s^2F') + t\left(\frac{1}{t}\right)''(F'' + \nu s^2F)\right\} + w'' = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{t}F'' - \lambda^2\left\{w'''' - 2s^2w'' + s^4w + \frac{2}{t^3}(t^3)'(w''' - s^2w') + \frac{1}{t^3}(t^3)''(w'' - \nu s^2w)\right\} + \\ + \sigma_э(q_\xi w'' + s^2q_\theta w) = 0 \tag{2.3}$$

В соответствии с формой решения (2.1) положим

$$u(\xi, \theta) = u_э(\xi)\cos s\theta, \qquad v(\xi, \theta) = v_э(\xi)\sin s\theta \tag{2.4}$$

Функции $u_э(\xi)$, $v_э(\xi)$, которые в этом разделе для краткости обозначим через u, v, определяются из уравнений

$$u' = -\frac{1}{t}(s^2F + \nu F''), \qquad sv = w + \frac{1}{t}(F'' + \nu s^2F)$$

$$-su + v' = 2(1+\nu)\frac{1}{t}sF' \tag{2.5}$$

вытекающих из (1.13) после отбрасывания нелинейных членов.

Задача состоит в определении наименьшего собственного значения $\sigma_э$ системы (2.2), (2.3) при однородных краевых условиях (1.11) или (1.12). Для решения этой задачи следует по возможности выяснить характер решения путем оценки критической нагрузки при различных видах деформации. Осуществляемую деформацию описывают именно интегралы системы (2.2), (2.3), которые приводят к наименьшему значению $\sigma_э$. Кроме этих интегралов, могут существовать и интегралы, описывающие местные явления (например, краевой эффект). Уравнения (2.2), (2.3) нередко могут быть упрощены, как только будут выяснены свойства какой-либо группы интегралов. Конечно, это обстоятельство имеет значение для доведения решения до числовых результатов.

Предположим, что в начальном напряженном состоянии усилия от осевой нагрузки будут или меньше усилий от внешнего давления, или же соизмеримы с ними, т. е. $q_\xi \leqslant q_\theta$. Предположим далее, что толщина оболочки Rt в любом месте мало отличается от некоторого среднего значения Rt_0. Введение первого предположения суживает круг рассматриваемых задач, однако для получения дальнейших результатов это необходимо. Второе же предположение практически всегда выполняется.

Приступим к качественному анализу решений системы (2.2), (2.3).

Введем в рассмотрение малый параметр $h = t_0/R$ и выясним асимптотические свойства решения при $h \to 0$.

Пусть функции F и w увеличиваются при дифференцировании в h^{-r} раз, т. е. $F' \sim h^{-r}F$, $w' \sim h^{-r}w$, и пусть будет $s \sim h^{-p}$, где r и p — пока неизвестные числа, подлежащие определению из условия минимума $\sigma_э$. Рассмотрим три случая: (1) $r < p$, (2) $r > p$, (3) $r = p$.

В первом случае функции F и w могут быть с точностью $\sup(h^{2p-2r}, h^{2p})$ определены из уравнений[1]

$$\frac{1}{t} s^4 F + w'' = 0, \qquad \frac{1}{t} F'' - \lambda^2 s^4 w + \sigma_э s^2 q_\theta w = 0 \tag{2.6}$$

Исключая из этой системы функцию F, получим

$$\frac{1}{t} (tw'')'' + (\lambda^2 s^8 - \sigma_э s^6 q_\theta)\, w = 0 \tag{2.7}$$

Отсюда легко видеть, что при $4p = 1 + 2r$ искомая величина $\sigma_э q_\theta$ принимает наименьшее значение $\sigma_э q_\theta \sim h^{1.5-r}$.

Во втором случае функции F и w определяются из системы

$$\frac{1}{t} F'''' + w'' = 0, \qquad \frac{1}{t} F'' - \lambda^2 w'''' + \sigma_э q_\xi w'' = 0 \tag{2.8}$$

с точностью $\sup(h^{2r-2p}, h^r)$. Исключая из этой системы функцию F, придем к уравнению

$$\lambda^2 w^{(6)} + w'' - \sigma_э q_\xi w'''' = 0 \tag{2.9}$$

Откуда следует, что наименьшее критическое значение $\sigma_э q_\xi \sim h$ достигается при $r = 0.5$. В третьем же случае наименьшее критическое значение $\sigma_э q_\xi \sim \sigma_э q_\theta \sim h$ имеет место при $r = p = 0.5$.

Из сказанного вытекает, что первый вид деформации при выполнении условия $r < 0.5$ приводит к наименьшему значению критической нагрузки. Не определенная пока величина r может быть определена из краевых условий.

Допустим, что нам удастся установить те требования, выполнение которых дает для r значение меньше 0.5. Отметим еще, что для обеспечения точности $h^{0.5}$ дальнейших результатов должно быть $r = 0$.

Если $r < 0.5$, то, кроме четырех интегралов уравнения (2.7), система (2.2), (2.3) имеет еще четыре интеграла уравнения

$$\lambda^2 w'''' + w = 0 \tag{2.10}$$

так как в уравнении (2.9) последним членом левой части можно пренебречь с точностью $h^{0.5-r}$. Эти интегралы возрастают при дифференцировании в $h^{-0.5}$ раз. Определяемые интегралами дифференциального уравнения (2.7) составляющие вектора перемещения u, v могут быть с точностью $\sup(h^{2p-2r}, h^{2p})$ выражены соотношениями

$$u' = \frac{1}{s^2} w'', \qquad v = \frac{1}{s} w, \qquad u = \frac{1}{s^2} w' \tag{2.11}$$

[1] Говоря, что некоторое уравнение имеет точность h, мы под этим подразумеваем, что отброшенные из уравнения члены имеют порядок h по сравнению с главными сохраненными в уравнении членами.

а перемещения u, v при краевом эффекте, определяемом интегралами уравнения (2.10), можно найти с точностью $h^{0.5-r}$ из соотношений

$$u' = \nu w, \qquad v = (2+\nu)\, s\lambda^2 w'', \qquad u = -\nu\lambda^2 w''' \tag{2.12}$$

Обозначим интегралы уравнения (2.7) попрежнему через w, а интегралы уравнения (2.10) через ψ. При помощи этих интегралов краевые условия при $\xi = 0$, $\xi = l$ могут быть представлены в следующем виде:

при краевом закреплении (1.11)

$$w + \psi = 0, \quad w'' - \lambda^2 s^4 \psi'' = 0, \quad w + (2+\nu)\lambda^2 s^2 \psi'' = 0, \quad w'' + \psi'' = 0 \tag{2.13}$$

при краевом закреплении (1.12)

$$w + \psi = 0, \quad w' - \nu\lambda^2 s^2 \psi''' = 0, \quad w + (2+\nu)\lambda^2 s^2 \psi'' = 0, \quad w' + \psi' = 0 \tag{2.14}$$

Условия (2.13) выполняются, если

$$w = 0, \qquad w'' = 0 \tag{2.15}$$

а условия (2.14) — если

$$w = 0, \qquad w' = 0 \tag{2.16}$$

Таким образом, в обоих вариантах краевых закреплений следует положить $\psi \equiv 0$, т. е. краевой эффект вообще отсутствует[1].

Свойства первой собственной функции уравнения (2.7), удовлетворяющей краевым условиям (2.15) или (2.16), зависят от длины оболочки. Легко убедиться, что у оболочки средней длины ($l \sim h^0$) эта функция существенно не увеличивается при дифференцировании, т. е. $r = 0$. Вообще уравнение (2.7) при краевых условиях (2.15) или (2.16) при введенных предположениях позволяет дать для r оценку $l \sim h^r$.

Точность полученных результатов не превысит $h^{0.5-r}$; поэтому определение критической нагрузки коротких оболочек, длина которых $l \lesssim h^{0.5}$, по уравнению (2.7) невозможно, как бы мала ни была величина h.

У длинных оболочек ($l \gg h^{-0.5}$) $s \sim h^0$ и для определения этих состояний равновесия неприменимы самые исходные уравнения (2.2), (2.3).

Приводим еще вариационную задачу, эквивалентную задаче о собственном значении (2.7), (2.15), (2.16).

Критическое значение начального безмоментного напряженного состояния может быть определено из вариационной формулы

$$\delta \int_0^l \{(tw'')^2 + t(\lambda^2 s^8 - \sigma_э s^6 q_0)\, w^2\}\, d\xi = 0 \tag{2.17}$$

где в сравнение допускаются параметр s и функции $w(\xi)$, удовлетворяющие краевому условию $w = 0$ при краевом закреплении (1.11) и краевым условиям $w = 0$, $w' = 0$ при краевом закреплении (1.12).

[1] Можно показать, что краевые условия (2.15), (2.16) для функции w имеют место и при некоторых других вариантах краевых закреплений. Именно, для всех возможных вариантов, при которых $w = 0$, кроме этого равенства, существенным является еще либо $S_\xi = 0$, либо $u^* = 0$, а остальная пара краевых условий удовлетворяется при помощи краевого эффекта. Варианты, рассмотренные здесь, представляются наиболее важными для практических приложений.

3. Влияние краевого эффекта начального напряженного состояния на критическую нагрузку. Пусть будут $\varkappa_\xi$ — кривизна образующих, T_θ^* — кольцевое усилие от краевого эффекта начального напряженного состояния. Главные кривизны срединной поверхности в осесимметричном состоянии, таким образом, будут R^{-1}, $-\varkappa_\xi$, а тангенциальные усилия

$$T_\xi = \sigma V, \qquad T_\theta = -\sigma R q + T_\theta^* \tag{3.1}$$

причем, пока $|T_\xi| \sim |T_\theta| \ll Eth$, $\varkappa_\xi$ и T_θ^* изменяются пропорционально изменению параметра нагрузки σ. Если ϑ — угол поворота образующей срединной поверхности при осесимметричной деформации, то

$$R\varkappa_\xi = -\sigma\vartheta', \qquad T_\theta^* = \sigma E t \lambda^2 \vartheta''' \tag{3.2}$$

где функция ϑ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2\vartheta'''' + \vartheta = 0 \tag{3.3}$$

и краевым условиям

$$\text{либо} \quad \vartheta' = 0, \quad \lambda^2\vartheta''' = q_\theta + \nu q_\xi, \qquad \text{либо} \quad \vartheta = 0, \quad \lambda^2\vartheta''' = q_\theta + \nu q_\xi \tag{3.4}$$

Здесь первая группа соответствует краевым условиям (1.11), вторая — условиям (1.12). Рассматривая ради простоты оболочку с постоянной толщиной стенки, можем выписать уравнения для определения критического значения параметра нагрузки $\sigma_э$ в следующем виде:

$$\frac{1}{t}(F'''' - 2s^2F'' + s^4F) + w'' - \mu\sigma_э s^2\vartheta' w = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{t}(F'' - \mu\sigma_э s^2\vartheta' F) - \lambda^2(w'''' - 2s^2w'' + s^4w) + \\ + \sigma_э(q_\xi w'' - q_\theta s^2 w) - \mu\sigma_э s^2\lambda^2\vartheta''' w = 0 \tag{3.6}$$

где множителем $\mu = 1$ отмечены члены, происходящие от краевого эффекта. Для оценки влияния краевого эффекта на критическую нагрузку, полагая μ малым параметром, воспользуемся разложениями:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots, \qquad w = w_0 + \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \ldots \\ \sigma_э = \sigma_{э0} + \mu\sigma_{э1} + \mu^2\sigma_{э2} + \cdots \tag{3.7}$$

Если мы требуем, чтобы (3.7) было решением системы (3.5), (3.6) при всех достаточно малых значениях параметра μ, то, собирая в уравнениях (3.5), (3.6) члены с одинаковыми показателями μ, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений. Первая подсистема, конечно, совпадает с (2.2), (2.3); вторая же подсистема имеет вид:

$$\frac{1}{t}(F_1'''' - 2s^2F_1'' + s^4F_1) + w_1'' = \sigma_{э0} s^2\vartheta' w_0 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{t}F_1'' - \lambda^2(w_1'''' - 2s^2w_1'' + s^4w_1) + \sigma_{э0}(q_\xi w_1'' - q_\theta s^2 w_1) = \\ = \frac{1}{t}\sigma_{э0} s^2\vartheta' F_0 - \sigma_{э1}(q_\xi w_0'' - q_0 s^2 w_0) + \sigma_{э0} s^2\lambda^2\vartheta''' w_0 \tag{3.9}$$

Построение следующих систем также не представляет затруднений. Решение первой подсистемы можно считать известным. Для отыскания решений второй подсистемы — уравнений (3.8), (3.9) — нужно прежде всего определить $\sigma_{э1}$ — первую поправку к критическому значению параметра нагрузки $\sigma_{э0}$, полученному без учета краевого эффекта. Для этой цели умножим уравнение (3.8) на функцию F_0/t, уравнение (3.9) на w_0 и проинтегрируем в промежутке $(0, l)$. Затем последовательным интегрированием по частям освобождаем подинтегральные выражения в левых частях уравнений от производных от F_1, w_1. Складывая оба уравнения и учитывая свойства решения первой подсистемы, а также краевые условия, налагаемые на функции w_0, F_0, w_1, F_1, получим условие

$$\sigma_{э1}\int_0^l q_\theta w_0^2\, d\xi = -\sigma_{э0}\int_0^l \left(\frac{2}{t}F_0\vartheta' w_0 + \lambda^2\vartheta''' w_0^2\right) d\xi . \tag{3.10}$$

Отсюда и определяется $\sigma_{э1}$. В предыдущем разделе работы была получена для оболочек средней длины оценка $\sigma_{э0}q_\theta \sim h^{1.5}$. Пусть параметр нагрузки будет выбран так, что $\sigma_{э0}\sim 1$. Тогда $q_\theta \sim h^{1.5}$ и, как легко убедиться, $\vartheta' \sim h^{0.5}$, $\vartheta''' \sim h^{-1.5}$. Кроме того, $F_0 \sim h w_0$.

Исходя из этих оценок, можно установить, что подинтегральные выражения в условии (3.10) соизмеримы. Однако правая часть (3.10) содержит быстро затухающую функцию, и поэтому значение этого интеграла будет у оболочек средней длины ($l \sim h^0$) лишь порядка $h^{0.5}$ по сравнению с интегралом в левой части. Отсюда получим $\sigma_{э1} \sim h^{0.5}\sigma_{э0}$.

Ограничиваясь рассмотрением влияния краевого эффекта в первом приближении, отметим следующее. Во-первых, при тонкостенных оболочках, где h — малая величина, наличие краевого эффекта существенно не изменяет критическую нагрузку, определенную по безмоментному состоянию. Во-вторых, если все же учесть влияние краевого эффекта, то необходимо критическое значение безмоментного состояния определить с точностью h, а не с точностью $h^{0.5}$, присущей, например, уравнению (2.7) или вариационной формуле (2.18). Однако для этого нужно уточнить и самые исходные уравнения (1.8), (1.9): при этой точности уже нельзя выразить тангенциальные усилия S_ξ, S_θ, S через функцию напряжения и параметры изменения кривизны через функцию w.

Остается еще выяснить, какие усилия и изменения кривизн вызывает наличие краевого эффекта в начальном напряженном состоянии.

Уравнения (3.8), (3.9) имеют: (а) интегралы, существенно не увеличивающиеся при дифференцировании, и (б) интегралы, увеличивающиеся в $h^{-0.5}$ раз при дифференцировании (типа краевого эффекта).

Для интегралов группы (а) получим оценку $w_1 \sim h^{0.5}w_0$, $F_1 \sim h^{0.5}F_0$, откуда следует, что они дают несущественную поправку к интегралам системы (2.6). Для интегралов группы (б) имеем $w_1 \sim h w_0$, $F_1 \sim h F_0$. Таким образом, учитывая свойства интегралов группы (б), получим $w_1'' \sim w_0''$, $F_1'' \sim F_0''$, т. е. изменение кривизны образующих и кольцевые усилия в краевой зоне будут величинами такого же порядка, как и в средней части оболочки. Так как они вызывают лишь малые напряжения порядка $h^{0.5}$ по сравнению с наибольшими напряжениями в средней части оболочки, то и определять их не нужно.

4. Определение состояний равновесия в послекритической стадии. Критической нагрузкой определяется начало новой ветви состояний равновесия; это — ветвь неосесимметричных форм равновесия, которую будем называть послекритической стадией состояний равновесия оболочки, несмотря на то, что неосесимметричные формы могут существовать и при докритических значениях ($\sigma < \sigma_э$) параметра нагрузки [1].

Около начальной точки этой стадии качественный характер форм равновесия, конечно, достаточно хорошо описывается формой, определяемой при отыскании критической нагрузки. При удалении от точки разветвления формы равновесия послекритической стадии постепенно изменяются вплоть до второй точки разветвления (если она существует), где происходит новое качественное изменение состояний равновесия [2].

Исходя из этого, вполне естественно полагать, что результаты, полученные в разделе 2 данной статьи, применимы и при исследовании по крайней мере некоторой начальной части послекритической стадии. Положение о возможности такого обобщения сводится к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} &F' \sim F, \quad F'' \sim F, \ldots, \qquad && F^{\cdot} \sim h^{-0.25}F, \quad F^{\cdot\cdot} \sim h^{-0.5}F, \ldots \\ &w' \sim w, \quad w'' \sim w, \ldots, \qquad && w^{\cdot} \sim h^{-0.25}w, \quad w^{\cdot\cdot} \sim h^{-0.5}w, \ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Соотношения (4.1) позволяют представить основные уравнения (1.8), (1.9) в упрощенном виде, так как, пренебрегая членами порядка $h^{0.5}$ и меньше по сравнению с главными, будем иметь

$$\frac{1}{t}F^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + w'' + w''w^{\cdot\cdot} - w'^{\cdot}w'^{\cdot} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{t}F'' - \lambda^2 w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \sigma q_0 w^{\cdot\cdot} + \frac{1}{t}(F''w^{\cdot\cdot} + F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot}) = 0 \tag{4.3}$$

Решение системы (4.2), (4.3) может удовлетворить только двум краевым условиям на контурных кривых $\xi = 0$, $\xi = l$ срединной поверхности. Об удовлетворении всей совокупности краевых условий речь будет итти ниже; отметим, однако, что в результате проведенного в разделе 2 анализа для системы типа (4.2), (4.3), т. е. для линеаризованной системы (4.2), (4.3), получены следующие краевые условия:

$$w = 0, \qquad S_\xi = 0 \qquad \text{при краевом закреплении (1.11)} \tag{4.4}$$

$$w = 0, \qquad u^{\cdot} = 0, \qquad \oint S_\xi \, d\theta = 0 \quad \text{при краевом закреплении (1.12)} \tag{4.5}$$

Примем эти условия пока в качестве исходного положения и выпишем их через функции w и F. Если $w \lesssim h^{0.5}$, то из (4.2) на основании оценок (4.1) вытекает, что $t^{-1} F \sim hw$, а это позволяет при помощи

[1] Если начальная часть послекритической стадии относится к неустойчивым состояниям равновесия оболочки, то при нагружении она этих состояний, очевидно, не проходит. Исследование начальной части послекритической стадии в этом случае все же необходимо для определения величины энергетического барьера, отделяющего устойчивые состояния равновесия.

[2] Как показал В. И. Федосьев [2], могут существовать и изолированные ветви состояний равновесия. Приводимые рассуждения к этим состояниям не относятся.

(1.13) представить краевые условия (4.4), (4.5) соответственно в виде

$$w=0, \qquad F=0 \tag{4.6}$$

$$w=0, \qquad w'=0, \qquad \oint F^{\cdot\cdot}d\theta=0 \tag{4.7}$$

Переход от системы (1.8), (1.9) к упрощенной системе (4.2), (4.3) оправдывается, если при $h\to 0$ решение F, w системы (4.2), (4.3), удовлетворяющее краевым условиям (4.6) или (4.7), имеет ограниченные частные производные по ξ до четвертого порядка. Для того чтобы лучше разобраться в этом вопросе, вводим временно новые переменные. Пусть будут

$$F=h^{1.5}tf, \qquad w=h^{0.5}g, \qquad q_\theta=h^{1.5}n_\theta, \qquad \lambda^2=h^2d^2, \qquad \theta=h^{0.25}\eta \tag{4.8}$$

где f, g — функции от ξ, η, а n_θ, d — функции от ξ; причем $d^2\sim 1$, а при нагрузках, существенно не отличающихся от критической, также $\sigma n_\theta\sim 1$. В переменных (4.8) все коэффициенты уравнения (4.2), (4.3) порядка единицы:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial\eta^4}+\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2=0 \tag{4.9}$$

$$d^2\frac{\partial^4 g}{\partial\eta^4}+\sigma n_\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{2}{t}\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{1}{t}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2}f\right)\left(1+\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\,\partial\eta}=0 \tag{4.10}$$

и поэтому ни система (4.9), (4.10), ни краевые условия к этой системе

$$\text{либо} \qquad g=0, \qquad f=0 \tag{4.11}$$

$$\text{либо} \qquad g=0, \qquad \frac{\partial g}{\partial\xi}=0, \qquad \oint\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}d\eta=0 \tag{4.12}$$

при $\xi=0$, $\xi=l$, на наш взгляд, не содержат внутренних источников, которые бы обуславливали неограниченные производные по ξ до четвертого порядка периодического относительно η решения системы (4.9), (4.10) при краевых условиях (4.11) или (4.12).

Переходим к краевым условиям и рассмотрим сначала случай (1.11).

На решение системы (4.2), (4.3) наложим условия $w=0$, $S_\xi=0$ на контуре срединной поверхности; вместе с тем при ожидаемом характере деформации (4.1) будет $t^{-1}F\sim hw$ и поэтому, как это вытекает из оценки отдельных членов во втором соотношении (1.13), при условии $w=0$ условие $v=0$ будет также удовлетворяться. Однако четвертое условие (1.11) не выполняется, так как по уравнению (4.2) и краевым условиям (4.6) на контуре $w''=(w'^{\cdot})^2\neq 0$. Оно удовлетворяется посредством краевого эффекта, который является решением системы

$$\frac{1}{t}F''''+w''+w''w^{\cdot\cdot}-w'^{\cdot}w'^{\cdot}=0 \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{t}F''-\lambda^2 w''''+\frac{1}{t}(F''w^{\cdot\cdot}+F^{\cdot\cdot}w''-2F'^{\cdot}w'^{\cdot})=0 \tag{4.14}$$

Свойства решения этой системы

$$\begin{matrix} F'\sim h^{-0.5}F, & F''\sim h^{-1}F,\ \ldots, & F^{\cdot}\sim h^{-0.25}F, & F^{\cdot\cdot}\sim h^{-0.5}F,\ \ldots \\ w'\sim h^{-0.5}w, & w'\sim h^{-1}w,\ \ldots, & w^{\cdot}\sim h^{-0.25}w, & w^{\cdot\cdot}\sim h^{-0.5}w,\ \ldots \end{matrix} \tag{4.15}$$

и местный характер описывающейся им деформации позволяют систему (4.13), (4.14) выделить из исходной системы (1.8), (1.9), хотя это при нелинейных уравнениях в общем случае недопустимо. При помощи краевого эффекта можно удовлетворить четвертому краевому условию (1.11), не нарушая при этом краевых условий, уже выполненных решением системы (4.2), (4.3). В самом деле, решение системы (4.2), (4.3) при $w \sim h^{0.5}$ характеризуется оценками

$$w \sim h^{0.5}, \qquad \frac{1}{t} F \sim h^{1.5}, \qquad v \sim h^{0.75}, \qquad w'' \sim h^{0.5} \tag{4.16}$$

а решение системы (4.13), (4.14) при $w'' \sim q^{0.5}$ — оценками

$$w \sim h^{1.5}, \qquad \frac{1}{t} F \sim h^{2.5}, \qquad v \sim h^{1.75}, \qquad w'' \sim h^{0.5} \tag{4.17}$$

Соотношение соответствующих величин в (4.16) и (4.17) доказывает наше утверждение. Отметим еще, что наибольшие напряжения от краевого эффекта будут лишь порядка $h^{0.5}$ по сравнению с наибольшими напряжениями, определяемыми решением системы (4.2), (4.3), и поэтому решать систему (4.13), (4.14) не приходится. В случае краевого закрепления (1.12) мы наложим на решение системы (4.2), (4.3) краевые условия (4.7). Можно показать, что эти условия обеспечивают выполнение всех краевых условий (1.12). Действительно, так как $t^{-1}F \sim hw$, то компоненты u, v перемещения могут быть определены из упрощенных соотношений

$$v^{\cdot} = w - \frac{1}{2}(w^{\cdot})^2, \qquad u^{\cdot} + v' = -w'w^{\cdot}, \tag{4.18}$$

Имея в виду требование периодичности решения относительно θ, легко убедиться, что условие $w = 0$ на контуре приводит также и к удовлетворению условия $v = 0$. Условие $u^{\cdot} = 0$ на контуре можно заменить равноценным условием $u^{\cdot\cdot} = 0$; это будет выполнено, если на контуре $w' = 0$. Таким образом, краевые условия (4.7) для (4.2), (4.3) обеспечивают выполнение условий (1.12). Пусть Π будет изменение потенциальной энергии при переходе оболочки от осесимметричного состояния равновесия в неосесимметричное состояние при определенном значении нагрузки. Вышеизложенное позволяет представить Π в весьма простом виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} ER^3 \iint \left\{ \frac{1}{t} (F^{\cdot\cdot})^2 + t\lambda^2 (w^{\cdot\cdot})^2 - \sigma q_0 t (w^{\cdot})^2 \right\} d\xi \, d\theta \tag{4.19}$$

Если в функционале Π допускать в сравнение периодичные относительно θ функции w, удовлетворяющие при $\xi = 0$, $\xi = l$ условию $w = 0$ при краевом закреплении (1.11) и условиям $w = 0$, $w' = 0$ при краевом закреплении (1.12), а также периодическую относительно θ функцию F, определяемую сравниваемыми функциями w посредством (4.2), то условие стационарности функционала Π выразится уравнением (4.3).

В самом деле, при условиях, наложенных на сравниваемые функции:

$$\frac{1}{2} \delta \iint \frac{1}{t} (F^{\cdot\cdot})^2 \, d\xi \, d\theta = \iint \frac{1}{t} F \delta F^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \, d\xi \, d\theta = -\iint F \delta (w'' + w'' w^{\cdot\cdot} - w'^{\cdot} w'^{\cdot}) d\xi d\theta =$$
$$= -\oint F \delta w' \, d\theta - \iint (F'' + F'' w^{\cdot\cdot} + F^{\cdot\cdot} w'' - 2F'^{\cdot} w'^{\cdot}) \, \delta w \, d\xi \, d\theta$$

и поэтому

$$\delta\Pi = ER^3\Big\{-\oint F\delta w'\,d\theta - \iint (F'' + F''w^{\cdot\cdot} + F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} - \\ - t\lambda^2 w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \sigma q_0 t w^{\cdot\cdot})\,\delta w\,d\xi\,d\theta\Big\} \tag{4.20}$$

По основной лемме вариационного исчисления отсюда вытекает, что при стационарном значении функционала Π функции w и F удовлетворяют уравнению (4.3). Кроме того, при краевом закреплении (1.11), когда на контуре срединной поверхности сравниваемые функции w имеют свободную вариацию w', условие $\delta\Pi=0$ влечет за собой также удовлетворение краевого условия $F=0$. Итак, интегрирование системы (4.2), (4.3) при краевых условиях (4.6) или (4.7) может быть сведено к отысканию стационарного значения функционала Π.

Приведем еще в развернутом виде уравнения (4.2), (4.3) для случая, когда их решение отыскивается в виде

$$w = \sum_{\alpha=0}^{\infty} w_\alpha \cos\alpha s\theta, \qquad F = \sum_{\alpha=0}^{\infty} F_\alpha \cos\alpha s\theta \tag{4.21}$$

где $w_\alpha = w_\alpha(\xi)$, $F_\alpha = F_\alpha(\xi)$. Имеем

$$\frac{1}{t}k^4s^4F_k + w_k'' - \frac{s^2}{2}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\{(\alpha\pm k)^2 w_\alpha'' w_{\alpha\pm k} + \alpha(\alpha\pm k)w_\alpha' w_{\alpha\pm k}'\} = 0 \tag{4.22}$$

$$\frac{1}{t}F_k'' - (\lambda^2k^4s^4 - \sigma k^2s^2q_0)w_k - \frac{s^2}{2t}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\{(\alpha\pm k)^2(F_\alpha'' w_{\alpha\pm k} + F_{\alpha\pm k}w'') + \\ + 2\alpha(\alpha\pm k)F_\alpha' w_{\alpha\pm k}'\} = 0 \tag{4.22}$$

В этих соотношениях функции $w_{\alpha-k}$, $F_{\alpha-k}$ с отрицательными индексами $(\alpha-k<0)$ следует заменить функциями с соответствующими положительными индексами $w_{k-\alpha}$, $F_{k-\alpha}$. Входящие в уравнения (4.22), (4.23) функции w_0, F_0'' определяются формулами

$$w_0 = \frac{s^2}{4}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha^2 w_\alpha^2, \qquad F_0'' = \frac{s^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha^2(F_\alpha w_\alpha)'' \tag{4.24}$$

В заключение отметим, что предложенный метод не может быть применен для решения рассматриваемой задачи с краевыми условиями $w=0$, $u=0$, $v=0$, $w'=0$ при $\xi=0$, $\xi=l$, так как в этом случае потенциальная энергия не может быть определена с требуемой точностью без количественного учета краевого эффекта.

Поступила 16 VI 1953

Институт строительства и стройматериалов
АН Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
2. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, т. IX, вып. 5, 1945.