Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНТРОЛЬНЫХ ДИАГРАММ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

В. С. Паскевич
(Ленинград)

В текущем контроле качества продукции применяются контрольные статистические диаграммы, как то: диаграммы по выборочному среднему и выборочному размаху, диаграммы по выборочному среднему и выборочному квадратичному уклонению и т. п. Значение этих диаграмм заключается в том, что они позволяют замечать, начинается ли нарушение нормального хода производственного процесса еще до того, как это нарушение приведет к значительному браку. Расчет диаграмм основан на методах математической статистики. Они могут применяться в тех случаях, когда качество продукции количественно измеримо, например: размер деталей, их вес, значения конусности, овальности и т. п. И тогда эта числовая характеристика определяет собой случайную величину. Для построения диаграмм необходимо, исходя из сущности производственного процесса, найти вероятностный закон распределения $y(x)$ этой случайной величины. Может оказаться, что измеримая величина подчиняется, например, нормальному закону, закону Максвелла, равновероятному закону и т. п. При измерении $n$ таких деталей мы имеем дело с результатами $n$ случайных независимых величин, каждая из которых распределена по одному и тому же закону $y(x)$. Или, как говорят, имеем дело с выборкой из генеральной совокупности, подчиняющейся вероятностному закону $y(x)$.

Контрольные диаграммы строятся по статистикам. Под статистикой, как известно, понимается всякая функция от измеряемых (случайных) величин. Таким образом сама по себе статистика является случайной величиной, ее вероятностный закон может быть вычислен на основе закона $y(x)$ и вида функции, которой она определяется. Выборочный размах, выборочное среднее, выборочное квадратичное уклонение — примеры статистик.

В настоящей статье выводится одно свойство контрольных статистических диаграмм, но прежде чем сформулировать его, введем понятие трубчатой статистики, как естественное обобщение выборочного размаха.

Выборочный размах

$$\max|x_i - x_j| \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

характеризуется тем, что

(а) эта статистика равна нулю в том и только том случае, когда $x_i$ равны между собой, т. е. когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$;

(б) поверхность уровня $\alpha$ этой статистики, т. е. геометрическое место точек, задаваемое уравнением

$$\alpha = \max|x_i - x_j| \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

представляет трубку, образующая которой параллельна прямой $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$;

(в) наконец, две поверхности уровня $\alpha_1$ и $\alpha_2$ этой статистики определяют две подобные трубки, т. е. трубки, которые могут быть получены одна из другой при помощи равномерного сжатия (растяжения) по всем направлениям, перпендикулярным прямой $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Наглядный геометрический смысл свойства (б) и (в) выборочного размаха приобретают в случае $n = 3$.

Будем говорить, что статистика $R$ является трубчатой, если для нее выполнены свойства (а) — (в).

Таким образом выборочный размах — трубчатая статистика. Трубчатой статистикой является выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^\circ)^2 \qquad \left(x^\circ = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

где $x^\circ$ — выборочное среднее; примером трубчатых статистик могут служить вообще все центральные выборочные моменты четной степени

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^\circ)^{2k}$$

Функции от перечисленных статистик, равные нулю лишь в том случае, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, опять-таки будут трубчатыми, например, выборочный стандарт, являющийся функцией выборочного квадратичного уклонения.

Докажем, что выборочное среднее и трубчатая статистика, вообще говоря, независимы лишь в том случае, когда генеральная совокупность подчиняется нормальному закону (точная формулировка этой теоремы приводится ниже). Таким образом только в этом случае контрольные статистические диаграммы по выборочному среднему и трубчатой статистике независимы, в частности, например, диаграммы по выборочному среднему и выборочному размаху. Поэтому всякий раз, когда рассматривается генеральная совокупность, распределенная не по нормальному закону, необходимо иметь в виду зависимость, существующую между этими диаграммами. В этом случае нельзя пользоваться результатами, снятыми с диаграмм по выборочному среднему и трубчатой статистике, как независимыми результатами.

*Теорема.* Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ — случайные независимые величины, подчиняющиеся одному и тому же (дифференциальному) закону распределения вероятностей $y(x)$.

Независимость выборочного среднего $x$ и достаточно гладкой трубчатой статистики $R$ (что будет уточнено ниже) имеет место тогда и только тогда, когда $y(x)$ является нормальным законом

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x-a}{\sigma}\right]^2\right) \tag{1}$$

Доказательство проводится при дополнительном предположении, а именно требуется еще, чтобы функция $y(x)$ была дважды дифференцируемой.

Для простоты рассмотрим случай $n = 3$.

Итак, имеются три случайные независимые величины $x_1, x_2, x_3$ распределенные по одному и тому же закону $y(x)$, а также некоторая трубчатая статистика $R$.

Поверхность уровня $\alpha = R(x_1, x_2, x_3)$ зададим в параметрическом виде, что всегда возможно

$$x_1 = t + f(\alpha)\,\psi_1(\varphi), \qquad x_2 = t + f(\alpha)\,\psi_2(\varphi), \qquad x_3 = t + f(\alpha)\,\psi_3(\varphi) \tag{2}$$

причем $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и

$$\psi_1(\varphi) + \psi_2(\varphi) + \psi_3(\varphi) = 0 \tag{3}$$

Обязательно найдется такая точка $\alpha_0$, для которой $f(\alpha_0) = 0$ (следует из определения трубчатой статистики). Будем предполагать, что:

1) функции $\psi_1(\varphi)$, $\psi_2(\varphi)$, $\psi_3(\varphi)$ в интервале $(0, 2\pi)$ являются кусочно-гладкими,

2) существует интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} \Delta(\varphi)\, d\varphi, \qquad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi_1(\varphi) & \psi_2(\varphi) & \psi_3(\varphi) \\ \psi_1'(\varphi) & \psi_2'(\varphi) & \psi_3'(\varphi) \end{vmatrix}$$

(здесь под $\Delta(\varphi)$ понимается модуль указанного определителя, причем штрихи означают дифференцирование по указанному аргументу);

3) функция $f(\alpha)$ имеет непрерывную производную.

При сделанных предположениях легко убедиться в существовании плотностей вероятности $p$ как у одномерных величин $R$ и $x^\circ$, так и у двухмерной $(R, x^\circ)$. Причем, принимая во внимание параметрическое представление (1), находим, что

$$\frac{\partial^2 p(R<\alpha, x^\circ<x)}{\partial\alpha\partial x} = f'(\alpha) f(\alpha) \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(x + f(\alpha)\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi$$

$$\frac{dp(x^\circ<x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y(\xi_1)\, y(\xi_2)\, y(3x-\xi_1-\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{4}$$

$$\frac{dp(R<\alpha)}{d\alpha} = f'(\alpha) f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(t + f(\alpha)\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi\, dt$$

Независимость $x^\circ$ и $R$, как хорошо известно, равносильна выполнимости соотношения

$$\frac{\partial^2 p(R<\alpha, x^\circ<x)}{\partial\alpha\,\partial x} = \frac{dp(x^\circ<x)}{dx}\frac{dp(R<\alpha)}{d\alpha} \tag{5}$$

Покажем прежде всего, что равенство (5) выполняется для всех нормальных законов. Действительно, если имеет место (1), то

$$\frac{p(x^\circ<x)}{dx} = \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{3}{2}\left[\frac{x-a}{\sigma}\right]^2\right)$$

$$\frac{dp(R<\alpha)}{d\alpha} = f(\alpha) f'(\alpha)\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{3}} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(f(\alpha)\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi$$

$$\frac{d^2 p(R<\alpha, x^\circ<x)}{\partial\alpha\,\partial x} = f(\alpha) f'(\alpha)\exp\left(-\frac{3}{2}\left[\frac{x-a}{\sigma}\right]^2\right) \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(f(\alpha)\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi$$

Отсюда непосредственно следует справедливость соотношения (5), а стало быть независимость среднего выборочного $x^\circ$ и трубчатой статистики $R$ для нормальных законов.

Покажем обратное, т. е. что из выполнимости (5) вытекает нормальность закона при условии его дважды дифференцируемости.

Действительно, из (4) и (5) находим, что при независимости $R$ и $x^\circ$ необходимо должно удовлетворяться следующее дифференциальное уравнение:

$$y^3(0) \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(x + A\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi = y^3(x) \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(A\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi \tag{6}$$

где $A = f(\alpha)$; при этом

$$\frac{dp(x^\circ<x)}{dx} = y^3(x) : \int_{-\infty}^{\infty} y^3(t)\, dt$$

$$\frac{dp(R<\alpha)}{d\alpha} = \frac{f(\alpha) f'(\alpha)}{y^3(0)} \int_{-\infty}^{\infty} y^3(t)\, dt \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{3} y(f(\alpha)\psi_i(\varphi)) \Delta(\varphi)\, d\varphi$$

Продифференцируем теперь по $A$ уравнение (6) два раза и положим затем $A = 0$.

Тогда получим

$$y^3(0)\Big[y(x)\,y'^2(x)\int\limits_0^{2\pi}[2\psi_1(\varphi)\,\psi_2(\varphi)+2\psi_1(\varphi)\,\psi_3(\varphi)+2\psi_2(\varphi)\,\psi_3(\varphi)]\times$$

$$\times\,\Delta(\varphi)\,d\varphi+y^2(x)\,y''(x)\int\limits_0^{2\pi}(\psi_1^2(\varphi)+\psi_2^2(\varphi)+\psi_3^2(\varphi))\,\Delta(\varphi)\,d\varphi\Big]=$$

$$=y^3(x)\Big[y(0)\,y'^2(0)\int\limits_0^{2\pi}(2\psi_1(\varphi)\,\psi_2(\varphi)+2\psi_1(\varphi)\,\psi_3(\varphi)+2\psi_2(\varphi)\,\psi_3(\varphi))\,\Delta(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\,y^2(0)\,y''(0)\int\limits_0^{2\pi}(\psi_1^2(\varphi)+\psi_2^2(\varphi)+\psi_3^2(\varphi))\,\Delta(\varphi)\,d\varphi\Big]$$

Но из соотношения (3) имеем, что

$$\psi_1^2(\varphi)+\psi_2^2(\varphi)+\psi_3^2(\varphi)=-2\,[\psi_1(\varphi)\,\psi_2(\varphi)+\psi_1(\varphi)\,\psi_3(\varphi)+\psi_2(\varphi)\,\psi_3(\varphi)]$$

Поэтому-то последнее выражение обращается в дифференциальное уравнение

$$\frac{y''(x)}{y(x)}-\frac{y'^2(x)}{y^2(x)}=-B,\qquad B=\frac{y'^2(0)}{y^2(0)}-\frac{y''(0)}{y(0)} \tag{7}$$

Из (7) получаем

$$\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)'=-B\qquad\text{или}\quad\frac{y'(x)}{y(x)}=-Bx+c_1$$

Поэтому

$$\ln y(x)=-\frac{1}{2}Bx^2+c_1x+c\quad\text{или}\quad y(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}Bx^2+c_1x+c\right)$$

Определяя произвольные постоянные из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}y(x)\,dx=1$$

получим распределение (1) с точностью до обозначений.

Эта задача поставлена передо мною Ю. В. Линником, давшим ценные указания для ее решения

Поступила 12 XI 1952