Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

М. М. Смирнов

(Ленинград)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(u)=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2 и β — функции от x, y и t, причем

$$a_{11}>0,\qquad a_{22}>0,\qquad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0 \qquad (2)$$

Функция u называется функционально-инвариантным решением уравнения (1), если $F(u)$ есть также решение уравнения (1) при произвольной функции F.

Функционально-инвариантные решения, как известно, удовлетворяют как уравнению (1), так и уравнению характеристик

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-a_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2a_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-a_{22}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$$

или в силу (2)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sqrt{a_{11}}\frac{\partial u}{\partial x}-\sqrt{a_{22}}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sqrt{a_{11}}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (4)$$

Пусть $\xi=\xi(x,y,t)$ есть любое решение уравнения (3). Подставляя это решение в уравнение (3) и дифференцируя соответственно по t, x и y, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}&=\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\sqrt{a_{11}}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial t}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}&=\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial a_{22}}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\sqrt{a_{11}}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial t}&=\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial a_{11}}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial a_{22}}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\sqrt{a_{11}}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}
\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставляя $\xi=\xi(x,y,t)$ в левую часть уравнения (1) и заменяя производные $\partial^2\xi/\partial x^2$, $\partial^2\xi/\partial y^2$, $\partial^2\xi/\partial t^2$ по формулам (5), получим

$$\begin{aligned}
L(\xi)=&\left(\sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t}+a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y}+2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}}-2b_1a_{12}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\\
&+\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y}+2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}}-2b_2a_{12}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}
\end{aligned} \qquad (6)$$

Функция $\xi = \xi(x, y, t)$ будет функционально-инвариантным решением уравнения, если $L(\xi) = 0$, т. е.

$$\left(\sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} - 2b_1 a_{12}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} - 2b_2 a_{12}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

Пусть $\xi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ — общее решение уравнения (3), где α_1 и α_2 — левые части первых интегралов соответствующей системы дифференциальных уравнений для уравнения (3). Тогда условие (7) принимает следующий вид:

$$\left(M_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + M_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \left(M_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + M_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} - 2b_1 a_{12} \\ M_2 &= \sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} - 2b_2 a_{12} \end{aligned} \tag{9}$$

Из уравнения (8) найдем функцию φ, если отношение

$$\frac{M_1\partial\alpha_1 / \partial x + M_2\partial\alpha_1 / \partial y}{M_1\partial\alpha_2 / \partial x + M_2\partial\alpha_2 / \partial y} = f$$

есть функция от α_1 и α_2. Для того чтобы функция f была функцией только от α_1 и α_2, необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$\frac{D(f, \alpha_1, \alpha_2)}{D(x, y, t)} = 0$$

Вычисляя этот определитель, получим

$$\begin{aligned} &M_1\left(M_1\frac{\partial a_{22}}{\partial x} + M_2\frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right)\sqrt{a_{11}} - 2a_{12}M_1\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial M_2}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial t}\right) - \\ &- M_2\left(M_1\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + M_2\frac{\partial a_{11}}{\partial y}\right)\sqrt{a_{22}} + 2a_{12}M_2\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial M_1}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Если условие (10) выполнено, то уравнение (1) имеет функционально-инвариантные решения.

Отметим, что условие (8) будет выполнено для произвольной функции φ, если $M_1 = M_2 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} &\sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} - 2b_1 a_{12} = 0 \\ &\sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} - 2b_2 a_{12} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

В этом случае любое решение уравнения (3) является функционально-инвариантным решением уравнения (1).

Аналогично, если $\eta = \psi(\alpha_3, \alpha_4)$ есть общее решение уравнения (4), где α_3 и α_4 — левые части интегралов соответствующей системы дифференциальных уравнений для уравнения (4), получим

$$\left(M_3\frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + M_4\frac{\partial \alpha_3}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} + \left(M_3\frac{\partial \alpha_4}{\partial x} + M_4\frac{\partial \alpha_4}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_4} = 0 \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} M_3 &= \sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} - a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} + 2b_1 a_{12} \\ M_4 &= \sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} + 2b_2 a_{12} \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнения (12) найдем функцию ψ, если отношение

$$\frac{M_3 \partial\alpha_3 / \partial x + M_4 \partial\alpha_3 / \partial y}{M_3 \partial\alpha_4 / \partial x + M_4 \partial\alpha_4 / \partial y} = f_1$$

есть функция от α_3 и α_4. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{D(f_1, \alpha_3, \alpha_4)}{D(x, y, t)} = 0$$

Вычисляя этот определитель, получим

$$\begin{aligned} M_3\left(M_3 \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + M_4 \frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right)\sqrt{a_{11}} - 2a_{12}M_3\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial M_4}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial M_4}{\partial y} + \frac{\partial M_4}{\partial t}\right) - \\ - M_4\left(M_3 \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + M_4 \frac{\partial a_{11}}{\partial y}\right)\sqrt{a_{22}} + 2a_{12}M_4\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial M_3}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial M_3}{\partial y} + \frac{\partial M_3}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Если условие (14) выполнено, то уравнение (1) имеет функционально-инвариантные решения.

Отметим, что условие (12) будет выполнено для произвольной функции ψ, если $M_3 = M_4 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} - a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} + 2b_1 a_{12} = 0 \\ \sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} + 2b_2 a_{12} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

В этом случае любое решение уравнения (4) является функционально-инвариантным решением уравнения (1).

Легко видеть, что условия (10) и (14) всегда выполняются для уравнения (1) с постоянными коэффициентами. Следовательно, уравнение (1) с постоянными коэффициентами имеет два функционально-инвариантных решения:

$$u_1(x, y, t) = (b_2 - \beta\sqrt{a_{22}})\,x - (b_1 - \beta\sqrt{a_{11}})\,y + (b_2\sqrt{a_{11}} - b_1\sqrt{a_{22}})\,t$$

$$u_2(x, y, t) = (b_2 + \beta\sqrt{a_{22}})\,x - (b_1 + \beta\sqrt{a_{11}})\,y + (b_1\sqrt{a_{22}} - b_2\sqrt{a_{11}})\,t$$

Рассмотрим случай, когда $b_1 = b_2 = \beta = 0$. Уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{16}$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} — положительные постоянные. Его общее решение имеет вид:

$$u(x, y, t) = \Phi(x + \sqrt{a_{11}}\,t,\ y + \sqrt{a_{22}}\,t) + \Psi(x - \sqrt{a_{11}}\,t,\ y - \sqrt{a_{22}}\,t) \tag{17}$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Найдем решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \tag{18}$$

Принимая во внимание начальные условия (18) для определения функций Φ и Ψ в общем решении (17), получим два равенства:

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) + \Psi(x, y)$$

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{a_{11}}\Phi_x' + \sqrt{a_{22}}\Phi_y' - \sqrt{a_{11}}\Psi_x' - \sqrt{a_{22}}\Psi_y'$$

или

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) + \Psi(x, y) \tag{19}$$

$$2\sqrt{a_{11}}\Phi_x' + 2\sqrt{a_{22}}\Phi_y' = \sqrt{a_{11}}\varphi_x' + \sqrt{a_{22}}\varphi_y' + \varphi_1(x, y) \tag{20}$$

Найдем общее решение уравнения (20).

Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{dy}{\sqrt{a_{22}}} = \frac{d\Phi}{\omega(x, y)} \tag{21}$$

где

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a_{11}}\,\varphi_x' + \sqrt{a_{22}}\,\varphi_y' + \varphi_1(x, y)\right] \tag{22}$$

Система (21) имеет два первых интеграла:

$$\sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x = C_1, \qquad \Phi - \varkappa(x, \sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) = C_2 \tag{23}$$

где

$$\varkappa(x, C_1) = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\int_0^x \omega\left(x, \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,x + \frac{C_1}{\sqrt{a_{11}}}\right) dx \tag{24}$$

и общее решение уравнения (20) получаем в виде

$$\Phi(x, y) = \varkappa(x, \sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) + F(\sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) \tag{25}$$

где F — произвольная функция. Подставляя (25) в равенство (19), получаем:

$$\Psi(x, y) = \varphi(x, y) - \varkappa(x, \sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) - F(\sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) \tag{26}$$

Подставляя найденные функции Φ и Ψ в общее решение (17), получим

$$u(x, y, t) = \varphi(x - \sqrt{a_{11}}\,t, \quad y - \sqrt{a_{22}}\,t) +$$
$$+ \varkappa(x + \sqrt{a_{11}}\,t, \sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x) - \varkappa(x - \sqrt{a_{11}}\,t, \sqrt{a_{11}}\,y - \sqrt{a_{22}}\,x)$$

или в силу (22), (23) и (24)

$$u(x, y, t) = \varphi(x - \sqrt{a_{11}}\,t, y - \sqrt{a_{22}}\,t) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\int_{x-\sqrt{a_{11}}\,t}^{x+\sqrt{a_{11}}\,t} \left[\sqrt{a_{11}}\,\varphi_x'(x, y) + \sqrt{a_{22}}\,\varphi_y'(x, y) + \varphi_1(x, y)\right] dx \tag{27}$$

где при интегрировании нужно считать

$$y = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,x + \frac{C_1}{\sqrt{a_{11}}}$$

Формула (27) дает решение уравнения (16), удовлетворяющего начальным условиям (18).

Пример. Найти решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Применяя формулу (27) при $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi_1(x, y) = 0$, после несложных преобразований получим решение задачи:

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + (a_{11} + a_{22})\,t^2$$

Поступила 12 V 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Функционально-инвариантные решения уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Ученые записки ЛГУ, Серия матем. наук, вып. XVI, 1949.