Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНЕЙ

В. И. Зубов

(Ленинград)

Рассматриваем следующую систему:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{ki}, \qquad f_{ki} = f_{ki}(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{1}$$

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов этой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Будем считать, что начало координат $x_1 = \ldots = x_n = 0$ является точкой равновесия системы (1). Пусть $\mathbf{A}^*$ — матрица, транспонированная к $\mathbf{A}$. Обозначим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*), \qquad \{B\}_{ik} = \left\{\frac{1}{2}(f_{ki} + f_{ik})\right\}_{ik}$$

Составим уравнение $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}| = 0$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Обозначим корни этого уравнения через $\lambda_i = \lambda_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1,\ldots,n)$.

Теорема 1. Если $\lambda_i \leqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$ в некоторой области D, содержащей начало координат, то $x_1 = \cdots = x_n = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Умножая k-е уравнение системы (1) на x_k и суммируя полученные равенства по k от 1 до n, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2}(f_{ki} + f_{ik}) x_i x_k$$

Запись этого в матричной форме такова:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{X}^*\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{X}^*\mathbf{B}\mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}^* = \| x_1, \ldots, x_n \|, \qquad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Сделаем замену переменных:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Z}, \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

где $\mathbf{P}$ — ортогональная матрица, выбранная так, что $\mathbf{P}^*\mathbf{B}\mathbf{P}$ есть диагональная матрица:

$$\mathbf{P}^*\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

Заметим, что введенное преобразование не нарушает вопроса об устойчивости. Равенство (2) после преобразования (3) будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{Z}^*\mathbf{P}^*\mathbf{E}\mathbf{P}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*\mathbf{P}^*\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{Z} \tag{4}$$

Но $\mathbf{P^*P = E}$; поэтому имеем $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{Z^*EZ = Z^*P^*BPZ}$, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_1^2 + \ldots + z_n^2) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 \tag{5}$$

Разделив обе части равенства на $z_1^2 + \ldots + z_n^2$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d(z_1^2 + \ldots + z_n^2)}{z_1^2 + \ldots + z_n^2} = \frac{\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2}{z_1^2 + \ldots + z_n^2}\,dt$$

После интегрирования имеем

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 = (z_{10}^2 + \ldots + z_{n0}^2)\exp\left(2\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2}{z_1^2 + \cdots z_n^2}\,dt\right) \tag{6}$$

Так как под интегралом стоит отрицательная функция, то все доказано.

Следствие 1. Если все $\lambda_i < -\delta$, δ — постоянная и $\delta > 0$, то начало координат асимптотически устойчиво.

Этот же случай имеет место, когда $\delta = \delta(t)$, причем

$$\int_{t_0}^{+\infty}\delta(t)\,dt = +\infty \tag{7}$$

Если $\lambda_i < -\delta$ при всех $x_1, \ldots, x_n$, то будет асимптотическая устойчивость в целом, причем

$$x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t) \leqslant (x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2)\,e^{-\delta(t-t_0)} \tag{8}$$

Следствие 2. На функции f_{ki} не наложены условия, гарантирующие единственность решения, поэтому, как показал Н. П. Еругин, траектория $M(t)$ может достичь начала координат (особая точка) в конечный промежуток времени. В нашем же случае интегральная кривая, достигнув в конечный промежуток времени начала координат, покинуть его не может, ибо нарушается устойчивость.

Рассмотрим ряд частных случаев системы (1).

1. Если $f_{ij} = -f_{ij}$, то $x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t) = x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2$; в этом случае $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.

2. Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, \ldots, x_k) \tag{9}$$

Предположим, что $X_k(t, 0, \ldots, 0) = 0$ и пусть функции $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные по искомым функциям. Тогда система (9) перепишется в виде

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_k(t, \theta x_1, \ldots, \theta x_n)}{\partial x_i}\,x_i \tag{10}$$

Вводя в рассмотрение матрицу Якоби $\{\partial X_k / \partial x_i\}_{ik}$, для системы (10) можно сформулировать теорему. Если симметризованная матрица Якоби

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)\right\}_{ik}$$

имеет собственные числа $\lambda_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то очевидное решение асимптотически устойчиво (на возможность привлечения здесь матрицы Якоби внимание автора обратил С. М. Лозинский.)

Формула (4) при дополнительных предположениях на функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ дает следующие результаты.

Пусть существуют $\lambda(t) \geqslant \lambda_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при каждом $t_0 \leqslant t < +\infty$. Тогда, если

$$\int_{t_0}^{+\infty} \lambda(t)\, dt < +\infty$$

то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво.

Пусть существуют $\mu(t) \leqslant \lambda_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ при $t_0 \leqslant t < +\infty$, тогда, если

$$\int_{t_0}^{+\infty} \mu(t)\, dt = +\infty$$

то нулевое решение неустойчиво.

Пусть $f_{ki}(\infty, 0, \ldots, 0) = C_{ki} = \mathrm{const}$ и $C = \{C_{ki}\}_{ki}$.

Введем в рассмотрение числа $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — корни уравнения

$$|\mathbf{C} - \nu \mathbf{E}| = 0$$

Теорема 2. Если $f_{ki}(t, x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны при $x_1 = \cdots = x_n = 0$ и $t = \infty$ и ν_i имеют отрицательные вещественные части, то очевидное решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть функция $V(x_1, \cdots, x_n)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k,\, i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} x_i c_{ki} = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Тогда в силу системы (1)

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{i,\, k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} x_i (f_{ki} - c_{ki}) \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{i,\, k=1}^{n} b_{ki} x_i x_k$$

где b_{ki} — линейные формы от $(f_{ki} - c_{ki})$ с постоянными коэффициентами; поэтому $b_{ki} \to 0$ при $x_i \to 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $t \to \infty$. По всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое T и δ, что как только $t > t$ и $|x_i| < \delta$, так сейчас же $|b_{ki}| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \sum_{i,\, k=1}^{n} b_{ki} x_i x_k \right| \leqslant \sum_{i,\, k=1}^{n} |b_{ki}|\, |x_i|\, |x_k| \leqslant \varepsilon (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 < \varepsilon n^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dt} < \sum_{k=1}^{n} x_k^2 (-1 + n^2 \varepsilon)$$

выбираем ε так, чтобы $-1 + n^2\varepsilon < 0$, т. е. $\varepsilon < n^{-2}$.

Таким образом, найденная функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а это и требовалось доказать.

Замечание 1. Путем замены переменной в системе (1) ($t = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ возрастающая вместе с τ) можно добиться того, чтобы $f_{ki}(t, 0, \ldots, 0) \to c_{ki}$ при $t \to +\infty$, причем $c_{ki} < +\infty$ и c_{ki} постоянные и вопрос об устойчивости при этой замене не нарушается.

Замечание 2. Из теоремы 2 для системы (9) вытекает следующие утверждение. Если собственные числа матрицы Якоби $\{\partial X_k / \partial x_i\}_{ik}$ при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и $t = \infty$ имеют отрицательные вещественные части, то очевидное решение асимптотически устойчиво.

Примечание. Теорема 2 рассматривает систему (1), являющуюся более общей, чем система, предложенная в задаче Айзермана, но мы требуем непрерывности f_{ki}, чего в задаче Айзермана не требуется.

Поступила 15 V 1953