Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ

О. П. Алексеева

(Ленинград)

В настоящей заметке указывается способ построения замкнутых вещественных решений краевых задач дифференциальных уравнений математической физики, пригодный как для уравнений параболического типа, так и для уравнений эллиптического и гиперболического типов. (Имеются в виду преимущественно уравнения с постоянными коэффициентами.) В качестве примера дается построение замкнутого решения простейшего волнового уравнения при данных краевых условиях. Для сравнения приводится решение задачи в виде рядов Фурье и бегущих волн.

1. Известно, что интеграл по комплексному переменному $p = x + iy$ вдоль дуги C выражается через криволинейные интегралы следующим образом:

$$\int\limits_C f(p)\,dp = \int\limits_C u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int\limits_C v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy \tag{1.1}$$

где

$$f(p) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.2}$$

С другой стороны, известно, что после применения преобразования Лапласа-Карсона решение самых различных краевых задач дается при помощи интеграла Римана-Меллина

$$f(t; z, \ldots) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)\,dp, \qquad f(p) = \frac{e^{pt}}{p}\, f^*(p; z, \ldots) \tag{1.3}$$

Здесь $f^*(p; z, \ldots)$ означает изображение по Лапласу-Карсону решения какой-либо определенной краевой задачи. Выражая, согласно (1.1), интеграл (1.3) через криволинейные интегралы, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[u(\sigma, y) + iv(\sigma, y)]\,dy \tag{1.4}$$

Отсюда, отделяя действительную часть, имеем

$$f(t; z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\sigma, y)\,dy \tag{1.5}$$

Это и есть замкнутое вещественное решение краевой задачи, соответствующей изображению $f^*(p; z, \ldots)$. Существование интеграла (1.3) обеспечивает существование и сходимость интеграла (1.5).

2. В качестве примера рассмотрим проводник длиной h. Пусть при $t = 0$ ток I и потенциал V равны 0. На конце $z = h$ цепь открыта. К концу $z = 0$ в момент времени $t = 0$ прилагается постоянная электродвижущая сила E. Сопротивление R и проводимость G равны нулю. Пусть L и C означают самоиндукцию и емкость. Требуется найти потенциал $V = V(z, t)$.

Задача сводится к интегрированию волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

при условиях

$$\{V\}_{z=0} = E, \qquad \left\{\frac{\partial V}{\partial z}\right\}_{z=h} = 0, \qquad \{V\}_{t=0} = \left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\}_{t=0} = 0 \tag{2.2}$$

Применяя к (2.1) и (2.2) преобразование Лапласа-Карсона, получим уравнение

$$\frac{d^2 V^*}{dz^2} = \frac{p^2}{v^2}\,V^*, \qquad v^2 = \frac{1}{LC} \tag{2.3}$$

с граничными условиями

$$\{V^*\}_{z=0} = E, \qquad \left\{\frac{\partial V^*}{\partial z}\right\}_{z=h} = 0. \tag{2.4}$$

Решая (2.3) при условиях (2.4), получим

$$V^* = E\,\frac{\operatorname{ch}[p(h-z)/v]}{\operatorname{ch}(ph/v)} \tag{2.5}$$

Следовательно, на основании (1.3)

$$V(t;z) = \frac{E}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,\frac{\operatorname{ch}[p(h-z)/v]}{\operatorname{ch}(ph/v)}\,dp \tag{2.6}$$

От этого решения можно перейти к обычному решению в виде ряда Фурье, если вычислить интеграл (2.6) при помощи теории вычетов. Действительно, обозначив

$$f(p) = \frac{Ee^{pt}}{p}\,\frac{\operatorname{ch}[p(h-z)]/v]}{\operatorname{ch}(ph/v)} \tag{2.7}$$

получим

$$V(t;z) = E\operatorname*{Res}_{p=0} f(p) + E\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname*{Res}_{p=p_n} f(p) + \operatorname*{Res}_{p=p_{-n}} f(p)\Big] \tag{2.8}$$

где

$$p_n = i\,\frac{(2n-1)\,v\pi}{2h}, \qquad p_{-n} = -i\,\frac{(2n-1)\,v\pi}{2h} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2.9}$$

Далее

$$\operatorname*{Res}_{p=0} f(p) = 1, \qquad \operatorname*{Res}_{p=p_n} f(p) = (-1)^n\,\frac{2}{\pi(2n-1)}\exp i\,\frac{(2n-1)\,v\pi t}{2h}\cos\frac{(h-z)(2n-1)\pi}{2h}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=p_{-n}} f(p) = (-1)^n\,\frac{2}{\pi(2n-1)}\exp -i\,\frac{(2n-1)\,v\pi t}{2h}\cos\frac{(h-z)(2n-1)\pi}{2h}$$

и, следовательно, на основании (2.8)

$$V(t;z) = E + \frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(h-z)(2n-1)\pi}{2h}\cos\frac{(2n-1)\,v\pi}{2h}\,t \tag{2.10}$$

Этот же (2.10) результат можно получить, применяя к задаче (2.1) — (2.2) метод Фурье. В самом деле, пусть

$$V = (1+W)\,E \tag{2.11}$$

Тогда, для того чтобы удовлетворить (2.2), функцию W необходимо определить из условий

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad \{W\}_{z=0} = 0, \quad \left\{\frac{\partial W}{\partial z}\right\}_{z=h} = 0, \quad \{W\}_{t=0} = -1, \quad \left\{\frac{\partial W}{\partial t}\right\}_{t=0} = 0 \tag{2.12}$$

Полагая, как обычно,

$$W = T(t)\,Z(z) \tag{2.1}$$

получим после подстановки (2.13) в (2.12)

$$T'' + (v\lambda)^2 T = 0, \qquad T = A\sin v\lambda t + B\cos v\lambda t$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \qquad Z = c_1\cos(h-z)\lambda + c_2\sin(h-z)\lambda$$

Теперь

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial z}\right\}_{z=h} = \{\lambda c_1\sin(h-z)\lambda - \lambda c_2\cos(h-z)\lambda\}_{z=h} = 0, \qquad c_2 = 0$$

$$\{W\}_{z=0} = \{c_1\cos(h-z)\lambda\}_{z=0} = c_1\cos h\lambda = 0, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h}$$

Значит,

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin v\lambda_n t + B_n\cos v\lambda_n t)\cos(h-z)\lambda_n \tag{2.14}$$

Последнее условие (2.12) дает $A_n = 0$. Наконец,

$$\{W\}_{t=0} = -1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(h-z)\frac{(2n-1)\pi}{2h} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2h}z$$

Отсюда

$$(-1)^{n+1}B_n = \frac{2}{h}\int_0^h(-1)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2h}z\,dz = -\frac{4}{(2n-1)\pi}, \qquad B_n = (-1)^n\frac{4}{(2n-1)\pi}$$

Таким образом,

$$W = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(h-z)(2n-1)\pi}{2h}\cos\frac{(2n-1)v\pi}{2h}t$$

и мы снова пришли к (2.10).

Однако для выяснения физической стороны явления в данном случае вместо (2.10) целесообразно использовать другое решение этой задачи. Его можно получить, разлагая (2.5) в экспоненциальный ряд:

$$V^* = E\frac{\operatorname{ch}\rho(h-z)}{\operatorname{ch}\rho h} = E\frac{e^{\rho(h-z)} + e^{-\rho(h-z)}}{e^{\rho h} + e^{-\rho h}} = E\frac{e^{-\rho z}(1 + e^{-2\rho(h-z)})}{1 + e^{-2\rho h}} =$$

$$= E[e^{-\rho z} + e^{-\rho(2h-z)} - e^{-\rho(2h+z)} - e^{-\rho(4h-z)} + e^{-\rho(4r+z)} + \cdots] \qquad \left(\rho = \frac{p}{v}\right) \tag{2.15}$$

Обозначим

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

тогда, переходя от каждого члена (2.15) к оригиналу, по теореме запаздывания найдем

$$\frac{V(z,t)}{E} = \sigma\left(t - \frac{z}{v}\right) + \sigma\left(t - \frac{2h-z}{v}\right) - \sigma\left(t - \frac{2h+z}{v}\right) - \sigma\left(t - \frac{4h-z}{v}\right) + \cdots \tag{2.17}$$

Это решение имеет отчетливый физический смысл. Первое слагаемое (2.17) показывает, что, пока потенциал не дошел до точки z, он в этой точке равен нулю. Затем, после того как потенциал достиг точки z, он в этой точке равен E до тех пор, пока отразившаяся от точки $z = h$ волна не вернется в z, и т. д.

Таким образом, с возрастанием времени t число слагаемых в (2.17) увеличивается. Объясняется это тем, что потенциал V распространяется с конечной **скоростью v** так, что с возрастанием t и число отраженных волн увеличивается. Поэтому на первый взгляд кажется маловероятной возможность замкнутого представления ряда (2.17). Тем не менее это не так.

3. Для получения замкнутого решения задачи (2.1) — (2.2) нужно согласно (1.5) и (1.2) отделить в (2.7) действительную часть. Сначала находим

$$\frac{e^{pt}}{p}=\frac{e^{(\sigma+iy)\,t}}{\sigma+iy}=\frac{e^{\sigma t}\,(\sigma\cos yt+y\sin yt)}{\sigma^2+y^2}+i\,\frac{e^{\sigma t}\,(\sigma\sin yt-y\cos yt)}{\sigma^2+y^2}\tag{3.1}$$

После этого в результате аналогичных преобразований получаем

$$\frac{\operatorname{ch}\dfrac{p\,(h-z)}{v}}{\operatorname{ch}\dfrac{ph}{v}}=\frac{e^{\frac{h-z}{v}(\sigma+iy)}+e^{-\frac{h-z}{v}(\sigma+iy)}}{e^{\frac{h}{v}(\sigma+iy)}+e^{-\frac{h}{v}(\sigma+iy)}}=P\,(y)+iQ\,(y)$$

где

$$P=\frac{\cos\frac{(h-z)\,y}{v}\operatorname{ch}\frac{(h-z)\,\sigma}{v}\cos\frac{hy}{v}\operatorname{ch}\frac{h\sigma}{v}+\sin\frac{(h-z)\,y}{v}\operatorname{sh}\frac{(h-z)\,\sigma}{v}\sin\frac{hy}{v}\operatorname{sh}\frac{h\sigma}{v}}{\cos^2\frac{hy}{v}\operatorname{ch}^2\frac{h\sigma}{v}+\sin^2\frac{hy}{v}\operatorname{sh}^2\frac{h\sigma}{v}}$$

$$Q=\frac{\sin\frac{(h-z)\,y}{v}\operatorname{sh}\frac{(h-z)\,\sigma}{v}\cos\frac{hy}{v}\operatorname{ch}\frac{h\sigma}{v}-\cos\frac{(h-z)\,y}{v}\operatorname{ch}\frac{(h-z)\,\sigma}{v}\sin\frac{hy}{v}\operatorname{sh}\frac{h\sigma}{v}}{\cos^2\frac{hy}{v}\operatorname{ch}^2\frac{h\sigma}{v}+\sin^2\frac{hy}{v}\operatorname{sh}^2\frac{h\sigma}{v}}\tag{3.2}$$

Значит, на основании (1.5)

$$V\,(t,\,Z)=\frac{E}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\frac{e^{\sigma t}\,(\sigma\cos yt+y\sin yt)}{\sigma^2+y^2}P\,(y)-\frac{e^{\sigma t}\,(\sigma\sin yt-y\cos yt)}{\sigma^2+y^2}Q\,(y)\right]dy$$

$$(\sigma>0,\ t>0)\tag{3.3}$$

Мы воспользовались тем, что под знаком интеграла стоит четная функция. Это решение удовлетворяет всем условиям задачи. Например, легко проверяется условие $\partial V\,/\,\partial z=0$ при $z=h$. При $z=0$ получим

$$V\,(t,\,0)=\frac{E}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{e^{\sigma t}\,(\sigma\cos yt+y\sin yt)}{\sigma^2+y^2}\,dy\tag{3.4}$$

Но известно, что

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sigma\cos yt+y\sin yt}{\sigma^2+y^2}\,dy=\pi e^{-\sigma t}\qquad(t>0,\ \sigma>0)\tag{3.5}$$

Значит, (3.4) дает $V\,(t,\,0)=E$. Таким образом, второе граничное условие тоже выполнено. При $\sigma=0$ интеграл (3.5) принимает вид:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin yt}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}\qquad(t>0)\tag{3.6}$$

Этот результат находится в соответствии с тем, что в данном в случае в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp$$

путь интегрирования проходит через полюс подинтегральной функции. Отсюда видно, каким образом из (3.5) появляется интеграл (3.6), встречающийся в работе Н. П. Еругина [1].

Интегралы (3.5) и (3.6) являются основными интегралами для замкнутых решений краевых задач. Формула (3.3) дает замкнутое представление ряда (2.17).

4. Переход к граничным условиям, зависящим от времени, осуществляется при помощи теоремы свертывания. Например, пусть требуется построить замкнутое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

При условиях

$$\{u\}_{z=0} = \varphi(t), \quad \{u\}_{z=h} = 0, \quad \{u\}_{t=0} = \left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{t=0} = 0 \tag{4.2}$$

Решение (4.1) — (4.2) в области изображений имеет вид:

$$u^* = \varphi^*(p) \frac{\operatorname{sh}(h-z)p}{\operatorname{sh} hp} \tag{4.3}$$

Как и раньше, находим

$$\frac{\operatorname{sh}(h-z)p}{\operatorname{sh} hp} \doteqdot v(t, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{\sigma t}(\sigma \cos yt + y \sin yt)}{\sigma^2 + y^2} R(y) - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{\sigma t}(\sigma \sin yt - y \cos yt)}{\sigma^2 + y^2} S(y)\right] dy \qquad (t > 0, \ \sigma > 0) \tag{4.4}$$

где

$$R = \frac{\cos(h-z) y \operatorname{sh}(h-z)\sigma \cos hy \operatorname{sh} h\sigma + \sin(h-z) y \operatorname{ch}(h-z)\sigma \sin hy \operatorname{ch} h\sigma}{\cos^2 hy \operatorname{sh}^2 h\sigma + \sin^2 hy \operatorname{ch}^2 h\sigma}$$

$$S = \frac{\sin(h-z) y \operatorname{ch}(h-z)\sigma \cos hy \operatorname{sh} h\sigma - \cos(h-z) y \operatorname{sh}(h-z)\sigma \sin hy \operatorname{ch} h\sigma}{\cos^2 hy \operatorname{sh}^2 h\sigma + \sin^2 hy \operatorname{ch}^2 h\sigma}$$

После этого получаем окончательный результат в виде

$$u(t, z) = \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(\tau)\, v(t-\tau; z)\, d\tau \tag{4.5}$$

Поступила 4 V 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.