Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВОБОДНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Г. А. Бугаенко

(Молотов)

1. В случае стационарного движения жидкости уравнения тепловой конвекции имеют вид [1]:

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \nu\,\triangle\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T, \qquad (\mathbf{v}\nabla)\,T = \chi\,\triangle T, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, T — температура, отсчитываемая от условного нуля, p — избыточное (над гидростатическим) давление, ρ — средняя плотность жидкости, ν, χ, β — коэффициенты вязкости, температуропроводности и теплового расширения соответственно, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения тел.

Если конвекционное движение жидкости совершается в вертикальном достаточно длинном цилиндре, то для его средней (удаленной от концов) части вектор скорости можно считать вертикальным [2], так что

$$v = v\,(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх. Поэтому уравнения тепловой конвекции упрощаются и в проекциях на оси декартовой системы координат запишутся так:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad v\,\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\triangle v + \beta g T$$

$$v\,\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\,\triangle T, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Последнее из этих уравнений показывает, что скорость v не зависит от z, т. е. $v = v\,(x,\ y)$, а первое и второе — что давление может зависеть только от z, т. е. $p = p\,(z)$; остальные уравнения перепишем поэтому в виде

$$0 = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dz} + \nu\,\triangle v + \beta g T, \qquad v\,\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\,\triangle T \tag{1.1}$$

Так как отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\beta g \rho}\,\frac{d^2 p}{dz^2}, \qquad \triangle T = \frac{1}{\beta g \rho}\,\frac{d^3 p}{dz^3} - \frac{\nu}{\beta g}\,\triangle\triangle v \tag{1.2}$$

то подстановка этих выражений во второе уравнение (1.1) дает

$$v\,(x,\ y)\,\frac{d^2 p}{dz^2} = \chi\,\frac{d^3 p}{dz^3} - \chi\nu\rho\,\triangle\triangle v \tag{1.3}$$

Дифференцируя по z, имеем

$$v\,(x,\ y)\,\frac{d^3 p}{dz^3} = \chi\,\frac{d^4 p}{dz^4} \tag{1.4}$$

Так как при конвекционном движении жидкости скорость $v = v(x, y) \not\equiv \mathrm{const}$, то отсюда

$$\frac{d^3p}{dz^3} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2p}{dz^2} = C \tag{1.5}$$

Следовательно, согласно первому уравнению (1.2) $\partial T / \partial z$ есть величина постоянная:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = A \quad \text{или} \quad T = Az + f(x, y) \tag{1.6}$$

Этот вид функции T был принят Г. А. Остроумовым [2] на основании экспериментов.

Рассмотрим конвекционные движения, для которых температура не зависит от координаты z, т. е.

$$T = T(x, y) \tag{1.7}$$

Решение задач этого класса связано с решением некоторого уравнения Пуассона для плоской области. Уравнения (1.1) в этом случае примут вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \nu\triangle v + \beta g T, \qquad \triangle T = 0 \tag{1.8}$$

Левая часть первого уравнения (1.8) не зависит от x и y, а правая не зависит от z; поэтому они равны постоянной. Если эту постоянную обозначать через νB, то уравнения конвекции (1.8) примут вид:

$$\triangle v(x, y) = B - \frac{g\beta}{\nu} T(x, y), \qquad \triangle T(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

Введем безразмерные величины — температуру Θ и скорость u — при помощи соотношений

$$T = T_0\Theta, \quad v = \frac{\chi}{l} u, \quad \nu B = g\beta T_0 C, \quad \triangle = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.10}$$

где T_0 — характеристическая температура, l — характеристическая длина, C — безразмерная постоянная, x и y — уже безразмерные координаты. После преобразований получим уравнения тепловой конвекции в безразмерной форме

$$\triangle u = \Pi(C - \Theta), \qquad \triangle\Theta = 0 \tag{1.11}$$

Здесь

$$\Pi = PG \qquad \left(P = \frac{\nu}{\chi}, \ G = \frac{g\beta T_0 l^3}{\nu^2}\right)$$

произведение чисел Прандтля и Грассгофа.

Таким образом, изучение выделенного класса конвекционных движений сводится к решению уравнения Лапласа, определяющего распределение температуры, и последующего решения уравнения Пуассона, определяющего распределение скорости в поперечном сечении цилиндра. Из этих уравнений следует, что распределение температуры не отличается от такового для неподвижной среды, — факт, обусловленный ортогональностью скорости к градиенту температуры.

Сделаем еще несколько замечаний о граничных условиях.

Для скорости граничное условие имеет вид $v(x, y) = 0$ на γ, где γ — контур поперечного сечения цилиндра, и выражает факт прилипания вязкой жидкости к стенкам цилиндра.

Граничные условия для температуры могут быть в зависимости от обстоятельств различными, так как на контуре γ может быть задана как температура T, так и нормальная производная от температуры $\partial T / \partial n$.

Если конвекционное движение совершается в вертикальной цилиндрической полости, окруженной твердым массивом, то обычно требуют непрерывности температуры и нормальной составляющей потока тепла на контуре γ, задавая еще дополнительно градиент температуры вдали от полости, окруженной твердым массивом [2]; могут быть и другие граничные условия для температуры.

Задача, разобранная в работе [3], относится к выделенному нами выше классу конвекционных течений и соответствует тому частному случаю, когда Θ и u зависят только от $\sqrt{x^2+y^2}=r$; область — круговое кольцо, на границе которого температура задана постоянной.

Отметим, что из решения, предложенного в работе [2], нельзя получить как частный случай решение изучаемого нами класса задач, так что последнее приобретает самостоятельное значение.

В заключение укажем, что в уравнение Пуассона входит постоянная B или C, которую следует определять из условия замкнутости потока.

2. *Пример 1.* Рассмотрим тепловую конвекцию в бассейне прямоуголного сечения, ширина которого равна a, а длина b.

Краевая задача для температуры представляется уравнением $\triangle T = 0$ с граничными условиями

$$T=\begin{cases} T_1(x) & \text{при } y=b, \\ T_2(x) & \text{при } y=0, \end{cases} \qquad T=\begin{cases} T_1(y) & \text{при } x=a \\ T_2(y) & \text{при } x=0 \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи можно найти методом разделения переменных; известно [4]

$$T(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_k^{(1)}+\beta_k^{(2)}}{2\mathrm{ch}\, k\pi b/2a}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)+\frac{\beta_k^{(1)}-\beta_k^{(2)}}{2\mathrm{sh}\, k\pi b/2a}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{a}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\delta_k^{(1)}+\delta_k^{(2)}}{2\mathrm{ch}\, k\pi a/2b}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{\delta_k^{(1)}-\delta_k^{(2)}}{2\mathrm{sh}\, k\pi a/2b}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\sin\frac{k\pi y}{b} \tag{2.1}$$

где

$$\beta_k^{(1)}=\frac{2}{a}\int_0^a T_1(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \qquad \beta_k^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a T_2(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx$$

$$\delta_k^{(1)}=\frac{2}{b}\int_0^b T_1(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy, \qquad \delta_k^{(2)}=\frac{2}{b}\int_0^b T_2(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy$$

Обращающуюся в нуль на границе прямоугольника скорость $v(x, y)$ будем искать в виде функции, разложенной в двойной ряд Фурье:

$$v(x, y)=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\pi^2(m^2/a^2+n^2/b^2)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.2}$$

где

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x, y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \tag{2.3}$$

Подставив сюда выражение функций $f(x, y)$, т. е. правую часть уравнения Пуассона (1.9):

$$f(x, y)=B-\frac{g\beta}{\nu}T(x, y) \tag{2.4}$$

после вычислений найдем с учетом (2.1)

$$a_{mn}=\frac{4B}{\pi^2}\,\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn}-$$
$$-\frac{2\beta g}{\pi\nu(m^2/a^2+n^2/b^2)}\left[\frac{n}{b^2}\left(\beta_m^{(2)}-\cos n\pi\beta_m^{(1)}\right)+\frac{m}{a^2}\left(\delta_n^{(2)}-\cos m\pi\delta_n^{(1)}\right)\right] \tag{2.5}$$

Для полного решения задачи необходимо еще определить постоянную B из условия замкнутости потока

$$\int_0^a \int_0^b v(x, y)\,dx\,dy = 0$$

После простых вычислений получим, что

$$B = \frac{\pi g \beta}{2\nu}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn\,(m^2/a^2+n^2/b^2)^2}\left[\frac{n}{b^2}\left(\beta_m^{(2)}-\cos n\pi\beta_m^{(1)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m}{a^2}\left(\delta_n^{(2)}-\cos m\pi\delta_n^{(1)}\right)\right]\right):\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos m\pi)^2(1-\cos n\pi)^2}{m^2n^2\,(m^2/a^2+n^2/b^2)}\right) \qquad (2.6)$$

Итак, формулы (2.1) и (2.2) с учетом (2.5) и (2.6) дают точное решение задачи о тепловой конвекции в средней части достаточно длинного вертикального цилиндра прямоугольного сечения в предположении, что температура не зависит от высоты z.

Пример 2. Рассмотрим тепловую конвекцию в круглом вертикальном цилиндре, окруженном твердым массивом; вычисления проведем в безразмерных переменных.

Если температуру твердого массива обозначить через Θ', то задача о конвекции представится уравнениями

$$\triangle u = \Pi\,(C-\Theta), \qquad \triangle\Theta = 0, \qquad \triangle\Theta' = 0 \qquad (2.7)$$

с краевыми условиями

$$\Theta = \Theta', \qquad \varkappa\frac{\partial\Theta}{\partial r} = \varkappa'\frac{\partial\Theta'}{\partial r} \qquad \text{на границе круга } r = 1 \qquad (2.8)$$

Здесь $\varkappa$ и $\varkappa'$ — коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

Не нарушая общности, можно принять, что заданный на бесконечности grad Θ направлен по оси x и равен единице. В качестве характеристической длины можно взять радиус круга. Представляя гармонические функции Θ и Θ' в виде рядов

$$\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \qquad \Theta' = r\cos\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\,(a_k'\cos k\varphi + b_k'\sin k\varphi) \qquad (2.9)$$

и пользуясь граничными условиями (2.8), получим, что

$$a_1 = \frac{2}{1+\lambda}, \qquad a_1' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{\varkappa}{\varkappa'}\right) \qquad (2.10)$$

Все прочие коэффициенты в (2.9) равны нулю; при этом учтено, что температуру Θ можно отсчитывать от ее значения на оси цилиндра.

Подставляя (2.10) в (2.9), получим распределение температуры в жидкости и в окружающем жидкость массиве:

$$\Theta = \frac{2}{1+\lambda}\,r\cos\varphi, \qquad \Theta' = \left(r + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi \qquad (2.11)$$

Чтобы определить распределение скорости жидкости в поперечном сечении цилиндра, представим уравнение (2.7) в декартовых переменных:

$$\triangle u = \Pi\left(C - \frac{2}{1+\lambda}x\right) \qquad \left(\Theta = \frac{2}{1+\lambda}x\right) \qquad (2.12)$$

Для интегрирования этого уравнения Пуассона достаточно найти его частное решение в виде

$$u_1 = ax^3 + bx^2 \qquad (2.13)$$

Подставив (2.13) в (2.12), находим

$$a = -\frac{\Pi}{3(1+\lambda)}, \qquad b = \frac{C\Pi}{2} \tag{2.14}$$

Частное решение (2.13) перепишем в полярных координатах, заменяя x через $r\cos\varphi$; получим

$$u_1(r, \varphi) = \frac{r^2}{2}\left[\frac{ar}{2}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi) + b(1+\cos 2\varphi)\right] \tag{2.15}$$

Нахождение общего решения $u_2(r, \varphi)$ однородного уравнения $\triangle u = 0$ не представляет трудностей, так как известны граничные значения искомой функции:

$$u_2(1, \varphi) = u(1, \varphi) - u_1(1, \varphi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi) + b(1+\cos 2\varphi)\right] \tag{2.16}$$

Здесь принято во внимание очевидное условие $u(1, \varphi) = 0$ для скорости на границе. Пользуясь тем, что гармоническая функция $u_2(r, \varphi)$ допускает представление в виде ряда

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \tag{2.17}$$

и определяя коэффициенты этого ряда при помощи условия (2.16), получим,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2}b, \qquad \alpha_1 = -\frac{3}{4}a, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}b, \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{4}a \tag{2.18}$$

Все прочие коэффициенты в (2.17) равны нулю. Подставляя (2.18) в (2.17), получим

$$u_2(r, \varphi) = -\frac{1}{2}\left(b + \frac{3}{2}ar\cos\varphi + br^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}ar^3\cos 3\varphi\right) \tag{2.19}$$

Суммируя частное решение u_1 с общим u_2 согласно (2.15) и (2.19) и подставляя значения a и b по (2.14), находим решение уравнения Пуассона (2.12) в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{\Pi}{4}\left(C - \frac{r\cos\varphi}{1+\lambda}\right)(r^2 - 1) \tag{2.20}$$

Постоянная C из условия замкнутости потока

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 u(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = 0$$

оказывается равной нулю. Окончательно закон распределения скорости будет

$$u(r, \varphi) = \frac{\Pi}{4(1+\lambda)} r(1 - r^2)\cos\varphi \tag{2.21}$$

Найденному закону распределения скорости (2.21) соответствует, очевидно, диаметрально антисимметричный характер течения: жидкость поднимается справа от оси y и опускается слева от нее.

Максимум скорости будет на окружности радиуса $r = 1/\sqrt{3}$ и равен

$$u_{\max} = \frac{\Pi}{4\sqrt{3}(1+\lambda)}\cos\varphi$$

Формулы (2.11) и (2.21) дают точное решение задачи.

Поступила 2 III 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред, стр. 204. ГИТТЛ, 1944.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.
3. Гершуни Г. З. О свободной тепловой конвекции в пространстве между вертикальными коаксиальными цилиндрами. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 4, 1952.
4. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1952.