Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

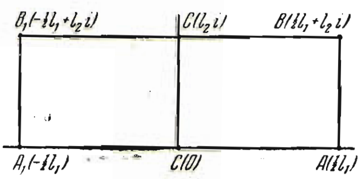
ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ЖИДКОСТИ, НАПОЛНЯЮЩЕЙ ОТКРЫТЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ СОСУД

Л. С. Иванова
(Москва)

Если закрытый сосуд, наполненный жидкостью, внезапно приходит в поступательное движение, то жидкость в сосуде будет вести себя подобно твердому телу и частицы жидкости приобретут одинаковые скорости. В том случае, когда сосуд открыт, частицы жидкости вследствие наличия свободной поверхности будут иметь различные скорости. Импульс сил J, подействовавший со стороны жидкости на стенки сосуда, будет отличаться от mv_0, где m — масса жидкости, а v_0 — скорость, приобретенная сосудом (предполагается для простоты, что скорость эта направлена горизонтально).

В настоящей работе вычисляется указанный импульс сил J, подействовавший на вертикальные стенки прямоугольного сосуда. По аналогии с присоединенной массой движущегося в несжимаемой жидкости тела можно назвать присоединенной массой жидкости абсолютную величину отношения J / v_0.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим открытый сверху сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, наполненный невесомой, несжимаемой, невязкой жидкостью. Высота сечения сосуда в плоскости, параллельной плоскости возможного движения, равна l_2, а длина l_1. Внезапно сосуд с жидкостью начинает двигаться в направлении его дна со скоростью v_0. Движение жидкости будет, очевидно, плоское, невихревое и свободное от источников. Требуется определить присоединенную массу жидкости, заключенной в сосуде.



Фиг. 1

Пусть одна из плоскостей течения является плоскостью комплексного переменного $z=x+yi$, причем ось x проходит через l_1, а ось y проходит через середину l_1 параллельно l_2 (фиг. 1).

Абсолютное течение жидкости определяется комплексным потенциалом

$$w(z) = \varphi + \psi i$$

где потенциал скоростей φ связан с подействовавшими на стенки сосуда импульсивными давлениями p и плотностью жидкости ρ соотношением[1]

$$p = -\rho\varphi \tag{1.1}$$

Так как на свободной поверхности импульсивные давления равны нулю, то согласно (1.1)

$$\varphi = \operatorname{Re} w = 0 \tag{1.2}$$

Нормальные скорости жидкости $\partial\varphi / \partial n$ у стенок совпадают с нормальными скоростями стенок v_n, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n \tag{1.3}$$

Импульс сил, подействовавший на стенку сосуда AB, равен

$$J = -\rho\int_0^{l_2} \varphi\, dy = -\rho y\varphi\Big|_0^{l_2} + \rho\int_0^{l_2} y\, d\varphi$$

Так как при $y = l_2$ потенциал скоростей $\varphi = 0$, то

$$J = \rho \int\limits_0^{l_2} y\, d\varphi \tag{1.4}$$

Комплексная скорость течения в любой точке

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.5}$$

Так как $x = {}^1/_2\, l_1 = \text{const}$ на AB, то

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{dy} dy = -\operatorname{Im} \frac{dw}{dz} dy \tag{1.6}$$

Согласно (1.4) и (1.6)

$$J = -\rho \int\limits_0^{l_2} y \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} dy \tag{1.7}$$

Если μ — присоединенная масса жидкости в сосуде, то в силу симметрии имеем

$$\frac{\mu}{2} = \left| \frac{J}{v_0} \right| = \left| -\frac{\rho}{v_0} \int\limits_0^{l_2} y \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} dy \right| \tag{1.8}$$

Комплексная скорость течения dw / dz удовлетворяет следующим граничным условиям [см. (1.2) и (1.3)]:

на свободной поверхности

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \quad v_x = 0 \quad \text{при } -\frac{1}{2} l_1 < x < \frac{1}{2} l_1 \text{ и } y = l_2 \tag{1.9}$$

у дна сосуда

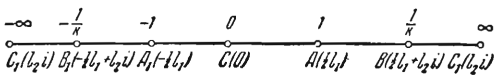
$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dz} = -v_y = 0 \quad \text{при } -\frac{1}{2} l_1 < x < \frac{1}{2} l_1 \text{ и } y = 0 \tag{1.10}$$

на вертикальных стенках

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \quad v_x = v_0 \quad \text{при } y = \pm \frac{1}{2} l_1 \text{ и } 0 < y < l_2 \tag{1.11}$$

Таким образом, задача сводится к определению комплексной скорости dw / dz в прямоугольнике ABA_1B_1 при граничных условиях (1.9), (1.10), (1.11).

§ 2. Общее решение задачи. Для определения комплексной скорости область течения — прямоугольник ABA_1B_1 в плоскости z — отображается на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t. Тогда граничная задача сводится к определению dw / dz по заданной на части действительной оси ее действительной части и на части действительной оси ее мнимой части. Пользуясь симметрией, можно установить соответствие между отображаемыми и отображенными точками так, как это указано на фиг. 2. Переменные z и t будут связаны соотношением [2]:



Фиг. 2

$$z = A \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \tag{2.1}$$

Так как $z = 0$ при $t = 0$, то постоянное слагаемое в правой части опущено.

Размеры сосуда определяются следующим образом: $t = 1$ при $z = {}^1/_2\, l_1$; откуда в соответствии с (2.1) получим

$$\frac{1}{2} l_1 = A \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = AK \tag{2.2}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k.

Так как $x = {}^1/_2 l_1$ на отрезке AB, то согласно (2.1) и (2.2)

$$z = \frac{1}{2} l_1 + yi = A \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + A \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad \text{на } AB$$

Отсюда

$$y = A \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}, \quad \text{или} \quad y = A \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} \quad \left(\begin{matrix} t\sqrt{1-k'^2\tau^2} = 1 \\ k' = \sqrt{1-k^2} \end{matrix}\right) \text{ на } AB \tag{2.3}$$

т. е. ордината выражается через эллиптический интеграл первого рода с модулем k'.

Так как $t = 1/k$ при $y = l_2$, то

$$l_2 = A \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = A \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = AK' \tag{2.4}$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k'.

Из (2.2) и (2.4) имеем окончательно

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2K}{K'} \tag{2.5}$$

Введем теперь функцию [3]

$$f(t) = \frac{dw}{dz} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \tag{2.6}$$

где $\sqrt{t^2-1}$ действителен и положителен при действительном $t > 1$.

Граничные условия для этой функции получаются путем преобразования граничных условий (1.9), (1.10) и (1.11); имеем

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = 0 \qquad \text{при} \quad |t| > \frac{1}{k} \qquad \text{на } BC_1 \text{ и } B_1C_1$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dz} = 0 \qquad \text{при} \quad -1 < t < 1 \qquad \text{на } A_1A$$

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = v_0 \qquad \text{при} \quad 1 < |t| < \frac{1}{k} \qquad \text{на } AB \text{ и } A_1B_1$$

$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{dw}{dz} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right] = 0 \qquad (|t| < 1,\ t^2 - 1 < 0) \qquad \text{на } AA_1$$

$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{dw}{dz} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right] = 0 \qquad \left(|t| > \frac{1}{k} > 1,\ t^2 - 1 > 0\right) \qquad \text{на } BC_1 \text{ и } B_1C_1$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dw}{dz} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right] = \frac{v_0}{\sqrt{t^2-1}} \qquad (t > 1,\ t^2 - 1 > 0) \qquad \text{на } AB$$

$$\operatorname{Re} f(t) = -\frac{v_0}{\sqrt{t^2-1}} \qquad \text{на } A_1B_1$$

Определение функции $f(t)$ по ее действительной части, заданной на действительной оси, приводит к выражению

$$f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\xi)\, d\xi}{(\xi - t)} = \frac{v_0}{\pi i} \left\{ -\int_{-1/k}^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi - t)} + \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi - t)} \right\}$$

Интегралы в фигурных скобках легко вычисляются. Имеем

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\frac{v_0}{\pi i}\log\frac{k\sqrt{t^2-1}-k'}{k\sqrt{t^2-1}+k'}$$

Откуда согласно (2.6)

$$\frac{dw}{dz} = f(t)\sqrt{t^2-1} = \frac{v_0}{\pi i}\log\frac{k\sqrt{t^2-1}-k'}{k\sqrt{t^2-1}+k'} \tag{2.7}$$

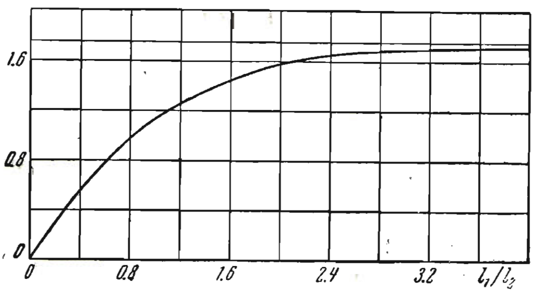
Легко видеть, что

$$\frac{dw}{dz} = v_0 + \frac{v_0}{\pi i}\log\frac{k'-k\sqrt{t^2-1}}{k'+k\sqrt{t^2-1}} \quad \text{на } AB \tag{2.8}$$

После подстановки $\operatorname{Im} dw\,/\,dz$ согласно (2.8) в (1.8) для присоединенной массы на AB получим

$$\frac{\mu}{2} = \left|\frac{J}{v_0}\right| = \tag{2.9}$$

$$= \left|\frac{\rho}{\pi}\int\limits_0^{l_2} y\log\frac{k'-k\sqrt{t^2-1}}{k'+k\sqrt{t^2-1}}\,dy\right|$$



Фиг. 3

где y определяется из (2.3) и (2.5). Рассмотрим отношение [принимая во внимание (2.2) и (2.4)]

$$\frac{\mu}{2m} = \frac{\mu}{2\rho l_1 l_2} = \frac{\mu}{4\rho A^2 KK'}$$

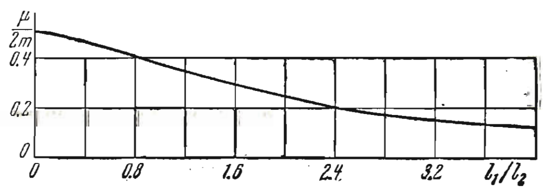
где m — масса всей жидкости. Отсюда из (2.9) получается

$$\frac{\mu}{2m} = \frac{1}{2KK'\pi}\left|\int\limits_0^{l_2}\frac{y}{A}\log\frac{k'-k\sqrt{t^2-1}}{k'+k\sqrt{t^2-1}}\,d\frac{y}{A}\right| \tag{2.10}$$

Вычисляя интеграл, входящий в (2.9) и (2.10), численными методами для различных l_1/l_2, находим график зависимости присоединенной массы $^1/_2\,\mu$ от l_1/l_2 (фиг. 3) и коэффициента присоединенной массы $\mu/2m$ от l_1/l_2 (фиг. 4), построенный на основании следующих результатов:

$l_1/l_2 = 0$	0.823	2.00	3.98	∞
$\mu\pi/2\rho l_2^2 = 0$	0.988	1.58	1.72	1.73
$\mu/2m = 0.5$	0.397	0.25	0.138	0

Замиетм, что вследствие наличия свободной поверхности не все частицы жидкости будут одинаково участвовать в горизонтальном движении, например, частицы жидкости на свободной поверхности, не примыкающие непосредственно к стенкам, не приобретают горизонтальной скорости ($\varphi = 0$), поэтому наличие свободной поверхности приводит к уменьшению присоединенной массы по сравнению с массой жидкости ($\mu/2m < {}^1/_2$).



Фиг. 4

§ 3. Предельные случаи. Пусть одна из стенок сосуда, например $A_1 B_1$, отодвигается в бесконечность, тогда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2K}{K'} = \infty \tag{3.1}$$

Можно обратить течение и рассмотреть ограниченный дном и свободной поверхностью поток, ударяющийся о препятствие AB. Дополнительное, вызванное ударом течение должно будет погасить нормальные скорости на препятствии и затухнуть в бесконечности. Импульс сил, подействовавший на препятствие, и присоединенная масса $^1/_2\, \mu$ жидкости могут быть также определены из (2.9) и (3.1). После замены в (2.9)

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \sqrt{t^2 - 1} = \frac{k' \sin \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

получим

$$\mu_1 = \left| \frac{\rho}{\pi} \int_0^{l_2} y \log \left[\left(1 - \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}\right) : \left(1 + \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}\right) \right] dy \right| \tag{3.2}$$

Из (3.1) следует, что $k' = 0$ и $k = 1$. Подстановка этих значений в (2.3) дает

$$y = A\varphi, \qquad dy = A\, d\varphi \tag{3.3}$$

Тогда из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\mu_1 = \left| \frac{\rho A^2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \varphi \log \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\, d\varphi \right| \tag{3.4}$$

После вычисления численными методами интеграла, входящего в (3.4), получается окончательно

$$\mu_1 = \frac{1.73\, \rho}{\pi}$$

Коэффициент A определяется из (3.1) и (2.4). Имеем

$$K' = \frac{\pi}{2}, \qquad A = \frac{l_2}{K'} = \frac{2l_2}{\pi}$$

Другой предельный случай, когда $l_1 / l_2 = 0$, получается при $k = 0$ и $k' = 1$. Физически очевидно, что в этом предельном случае жидкость можно рассматривать почти как заключенную в замкнутом сосуде и тогда ее присоединенная масса равна сумме всех частиц жидкости: $\mu / 2m = 1/2$.

Поступила 26 III 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III. Гостехиздат, 1951.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.